قانون اول نیوتن: اگر نیروی برآیند وارد بر ذره‌ای صفر باشد، اگر ابتدا ساکن باشد، در همان حال می‌ماند و اگر ابتدا در حرکت باشد با اندازه ثابت در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند.

قانون دوم نیوتن: اگر نیروی برآیند وارد بر ذره‌ای صفر نباشد، ذره شتابی متناسب با اندازه نیروی برآیند در جهت آن خواهد داشت.

۱) $F = ma$ — که در آن F و m و a به ترتیب، نیروی برآیند وارد بر ذره، جرم ذره و شتاب ذره هستند.

$1N = (1kg)(1m/s^2) = 1kg \cdot m/s^2$

قانون سوم نیوتن: نیروهای کنش و واکنش بین اجسامی که در تماس هستند دارای مقدار برابر، خط اثر یکسان و جهت مخالف هستند.

قانون گرانش نیوتن: طبق این قانون دو ذره به جرم M و m از یکدیگر به فاصله r نیروهای F و $-F$ که یکدیگر را جذب می‌کنند.

که در آن r = فاصله بین دو ذره
G = ثابت جهانی گرانش

۲) $F = G\frac{Mm}{r^2}$

۳) $g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow$ ۴) $W = mg$

$(1kg)(9.81 m/s^2) = 9.81 N$

وزن: نیروی F وارده از زمین را وزن W می‌گویند

$g = 9.81 m/s^2$ ؛ $g = 32.2 ft/s^2$

واحد نیرو N (نیوتن): نیرویی که شتاب $1 m/s^2$ را به جرم $1kg$ وارد کند.

۵) $W = (1kg)(1m/s^2) = 1kg \cdot m/s^2$

واحد اسلاگ (slug): واحد جرم سازگار با فوت، پوند و ثانیه، جرمی است که تحت نیروی $1 lb$ (پوند) شتاب $1 ft/s^2$ را دارد. این واحد جرم اسلاگ نام دارد. با جایگزینی $1 lb$ و $1 ft/s^2$ به ترتیب به جای F و a بدست می‌آید.

$F = ma \Rightarrow 1 lb = (1 slug)(1 ft/s^2) \Rightarrow$

۶) $1 slug = \frac{1 lb}{1 ft/s^2} = 1 lb \cdot s^2/ft$

در دینامیک که با نیرو، جرم و شتاب سروکار داریم، جرم اجسام (m) بر حسب اسلاگ، وزن (W) آنها بر حسب پاوند بیان می‌شود.

$W = mg \Rightarrow$ ۷) $m = \frac{W}{g}$ (lb، slug)

که در آن g شتاب ثقل است

$g = 32.2 ft/s^2$

سایر آحاد U.S. که معمولاً در مسائل مهندسی به کار می‌روند عبارتند از: اصلی: فوت (ft)، پاوند (lb)، ثانیه (s)

همچنین: مایل $mi = 5280 ft$ — اینچ $in = \frac{1}{12} ft$ — کیلوپوند $(kip) = 1000 lb$

تبدیل دستگاه‌های آحاد

آحاد طول: واحد طول در دستگاه U.S. طبق تعریف عبارت است از:

۸) $1\ ft = 0.3048\ m$

$1\ mi = 5280\ ft = 5280(0.3048\ m) = 1609\ m \Rightarrow$ ۹) $1\ mi = 1.609\ km$

$1\ in = \frac{1}{12}\ ft = \frac{1}{12}(0.3048\ m) = 0.0254\ m \Rightarrow$ ۱۰) $1\ in = 25.4\ mm$

آحاد نیرو: واحد نیرو در دستگاه U.S. (پوند یا lb) به عنوان وزن یک پوند استاندارد (پوند جرم) ($0.4536\ kg$) در سطح دریا در عرض جغرافیایی $45°$ که در آن $g = 9.807\ m/s^2$ تعریف می‌شود.

$W = mg$

$1\ lb = (0.4536\ kg)(9.807\ m/s^2) = 4.448\ kg \cdot m/s^2 \Rightarrow$ ۱۱) $1\ lb = 4.448\ N$

آحاد جرم: واحد جرم در دستگاه U.S. (اسلاگ) یک واحد فرعی است.

۱۲) $1\ slug = 1\ lb \cdot s^2/ft = 14.59\ kg$

گرچه از پوند استاندارد نمی‌توان به عنوان واحد مستقل جرم استفاده کرد، طبق تعریف:

۱۳) 1 پوند جرم $= 0.4536\ kg$

برای تعیین جرم یک جسم در آحاد SI (برحسب کیلوگرم) که وزن آن در آحاد U.S. (برحسب پوند) داده شده است از رابطه بالا استفاده می‌شود. در محاسبات تبدیل یک واحد از U.S. به آحاد SI، از ترتیب تبدیل استفاده می‌شود.

مثال

$M = 47\ lb \cdot in = 47(4.448\ N)(25.4\ mm) = 5310\ N \cdot mm = 5.31\ N \cdot m$

$M = 40\ N \cdot m = (40\ N \cdot m)\left(\frac{1\ lb}{4.448\ N}\right)\left(\frac{1\ ft}{0.3048\ m}\right) = 29.5\ lb \cdot ft$

جمع بردارها:

۱) $P+Q=Q+P$ ۲) $P-Q=P+(-Q)$

۳) $P+Q+S=(P+Q)+S$ ۴) $P+Q+S=(P+Q)+S=P+(Q+S)$

۵) $P+Q+S=(P+Q)+S=S+(P+Q)=S+(Q+P)=S+Q+P$

مؤلفه‌های نیروی قائم:

۶) $\boxed{F_x=F_x i}$, $\boxed{F_y=F_y j}$ ۷) $F=F_x i+F_y j$

۸) $\boxed{F_x=F\cos\theta}$, $\boxed{F_y=F\sin\theta}$ ۹) $\tan\theta=\frac{F_y}{F_x}$ ۱۰) $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$

تعیین برآیند نیروها از طریق جمع زدن مؤلفه‌های x و y :

۱۱) $R=P+Q+S$

۱۲) $R_x=P_x+Q_x+S_x$, $R_y=P_y+Q_y+S_y$ ۱۳) $R_x=\Sigma F_x$, $R_y=\Sigma F_y$

$\Rightarrow R=R_x i+R_y j$

تعادل ذره در صفحه:

۱۴) $R=\Sigma F=0$ ۱۵) $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$

مؤلفه‌های نیرو در فضا:

۱۶) $F_y=F\cos\theta_y$, $F_h=F\sin\theta_y$

۱۷) $F_x=F_h\cos\phi=F\sin\theta_y\cos\phi$ $F_z=F_h\sin\phi=F\sin\theta_y\sin\phi$

۱۸) $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$ ۱۹) $F_x=F\cos\theta_x$, $F_y=F\cos\theta_y$, $F_z=F\cos\theta_z$

۲۰) $F=F_x i+F_y j+F_z k$ ۲۱) $F=F(\cos\theta_x i+\cos\theta_y j+\cos\theta_z k)$

۲۲) $\lambda=\cos\theta_x i+\cos\theta_y j+\cos\theta_z k$ ۲۳) $\lambda_x=\cos\theta_x$, $\lambda_y=\cos\theta_y$, $\lambda_z=\cos\theta_z$

$\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2=1 \Rightarrow$ ۲۴) $\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1$

۲۵) $\cos\theta_x=\frac{F_x}{F}$, $\cos\theta_y=\frac{F_y}{F}$, $\cos\theta_z=\frac{F_z}{F}$

برآیند نیروهای متقاطع در فضا:

۳۱) $R_x=\Sigma F_x$, $R_y=\Sigma F_y$, $R_z=\Sigma F_z$ ۳۲) $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$

۳۳) $\cos\theta_x=\frac{R_x}{R}$, $\cos\theta_y=\frac{R_y}{R}$, $\cos\theta_z=\frac{R_z}{R}$

تعیین بردار نیروی متقارب و ... در فضا (سه بعدی) :

۲۶) $\overrightarrow{MN} = d_x i + d_y j + d_z k$

۲۷) $\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x i + d_y j + d_z k)$

۲۸) $F = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x i + d_y j + d_z k)$

۲۹) $F_x = \frac{F d_x}{d}$, $F_y = \frac{F d_y}{d}$, $F_z = \frac{F d_z}{d}$

۳۰) $\cos\theta_x = \frac{d_x}{d}$, $\cos\theta_y = \frac{d_y}{d}$, $\cos\theta_z = \frac{d_z}{d}$

تعادل ذره در فضا :

۳۱) $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$

استاتیک

فرمول‌های فصل چهارم

ضرب برداری دو بردار: ضرب برداری دو بردار P و Q برداری است مانند V با مشخصات زیر:

۱. خط اثر V بر صفحه شامل P و Q عمود است.

۲. مقدار V برابر است با حاصل ضرب مقادیر P و Q و سینوس زاویه θ بین P و Q (حاصل $\theta \le 180$)

۳. جهت V از قاعده دست راست تعیین می‌شود.

1) $V = PQ\sin\theta$

2) $V = P \times Q$

3) $V = P \times Q = P \times Q'$

4) $Q \times P = -(P \times Q)$

5) $P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$

5) $P \times Q' = P \times Q'_1 + P \times Q'_2$

7) $(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S)$

ضرب برداری بردارهای واحد قائم:

7)
$i \times i = 0 \qquad j \times i = -k \qquad k \times i = j$

$i \times j = k \qquad j \times j = 0 \qquad k \times j = -i$

$i \times k = -j \qquad j \times k = i \qquad k \times k = 0$

$V = P \times Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$

8) $V = (P_y Q_z - P_z Q_y)i + (P_z Q_x - P_x Q_z)j + (P_x Q_y - P_y Q_x)k$

9) $V_x = P_y Q_z - P_z Q_y \qquad V_y = P_z Q_x - P_x Q_z \qquad V_z = P_x Q_y - P_y Q_x$

10) $V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$

(M_O)

گشتاور (گشتاور نیرو) نسبت به یک نقطه: ضرب برداری r و F را گشتاور F نسبت به O گویند.

11) $M_O = r \times F$

d فاصله عمودی از O تا خط اثر F است.

12) $M_O = rF\sin\theta = Fd$

دو نیروی F و F' هم‌ارزند اگر و فقط اگر برابر باشند و گشتاورهای آنها نسبت به نقطه داده شده O برابر باشند.

13) $F = F' \quad , \quad M_O = M'_O$

قضیه وارینیون:

14) $r \times (F_1 + F_2 + \dots) = r \times F_1 + r \times F_2 + \dots$

مؤلفه‌های قائم گشتاور نیرو:

15) $r = xi + yj + zk$

16) $F = F_x i + F_y j + F_z k$

$M_O = r \times F \implies$ 17) $M_O = M_x i + M_y j + M_z k$

(۱۸)
$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

(۱۹) $$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

(۲۰) $$M_B = r_{A/B} \times F = (r_A - r_B) \times F$$

(۲۱) $$M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

که در آن $x_{A/B}$ ، $y_{A/B}$ ، $z_{A/B}$ مؤلفه‌های بردار $r_{A/B}$ هستند

$$\Rightarrow x_{A/B} = x_A - x_B \quad , \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad , \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

در مسائل مسطح یا دو بعدی سروکار داریم، گشتاور نیروی F در صفحه xy قرار دارد، گشتاور حول محور z عمود بر صفحه

$$M_O = (xF_y - yF_x)k \quad \Rightarrow \quad (۲۲)\ M_O = M_z = xF_y - yF_x$$

(۲۳) $$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad : \quad M_B = x_{A/B}F_y - y_{A/B}F_x$$

ضرب اسکالر دو بردار:

(۲۴) $$P \cdot Q = PQ\cos\theta$$ (۲۵) $$P \cdot Q = Q \cdot P$$

(۲۶) $$P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2$$ (۲۷) $$P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q = PQ\cos\theta_y = PQ_y$$

(۲۸) $$P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y$$ (۲۹) $$P \cdot Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \cdot (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

(۳۰)
$$i \cdot i = 1 \quad j \cdot j = 1 \quad k \cdot k = 1$$
$$i \cdot j = 0 \quad j \cdot k = 0 \quad k \cdot i = 0$$

(۳۱) $$P \cdot Q = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

کاربردها:

(۳۲) $$P \cdot P = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

(۱) تعیین زاویه بین دو بردار:

$$P = P_x i + P_y j + P_z k$$
$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z k$$
$$\Rightarrow P \cdot Q = PQ\cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

(۳۲) $$\cos\theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

(۲) تعیین تصویر بردار روی یک محور:

(۳۳) $$P_{OL} = P\cos\theta$$ (۳۴) $$P \cdot Q = PQ\cos\theta = P_{OL}\,Q \longrightarrow$$

(۳۵) $$P_{OL} = \frac{P \cdot Q}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q}$$ (۳۶) $$P_{OL} = P \cdot \lambda$$

(۳۷) $$P_{OL} = P_x\cos\theta_x + P_y\cos\theta_y + P_z\cos\theta_z$$

که در آن θ_x و θ_y و θ_z زوایای محور OL با محورهای مختصات هستند

ضرب سه‌گانه مختلط سه بردار :

۳۸) $S\cdot(P\times Q)$

۳۹) $S\cdot(P\times Q)=P\cdot(Q\times S)=Q\cdot(S\times P)=-S\cdot(Q\times P)=-P\cdot(S\times Q)=-Q\cdot(P\times S)$

$S\cdot(P\times Q)=S\cdot V=S_xV_x+S_yV_y+S_zV_z$

۴۰) $S\cdot(P\times Q)=S_x(P_yQ_z-P_zQ_y)+S_y(P_zQ_x-P_xQ_z)+S_z(P_xQ_y-P_yQ_x)$

۴۱) $S\cdot(P\times Q)=\begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$

گشتاور نیرو نسبت به یک محور :

۴۲) $M_{OL}=\lambda\cdot M_O=\lambda\cdot(r\times F)$ ۴۳) $M_{OL}=\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

که در آن λ_x و λ_y و λ_z = کسینوس‌های هادی محور OL ، x و y و z = مختصات نقطه اثر F ، F_x و F_y و F_z = مولفه‌های F

$M_{OL}=\lambda\cdot[(r_1+r_2)\times(F_1+F_2)]=\lambda\cdot(r_1\times F_1)+\lambda\cdot(r_1\times F_2)+\lambda\cdot(r_2\times F_1)+\lambda\cdot(r_2\times F_2)$

۴۴) $M_{OL}=\lambda\cdot(r_2\times F_2)$ ۴۵) $M_{BL}=\lambda\cdot M_B=\lambda\cdot(r_{A/B}\times F)$

که در آن :

$x_{A/B}=x_A-x_B$ ، $y_{A/B}=y_A-y_B$ ، $z_{A/B}=z_A-z_B$

λ_x و λ_y و λ_z = کسینوس‌های هادی محور BL

F_x و F_y و F_z = مولفه‌های نیروی F

۴۶) $M_{BL}=\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

گشتاور کوپل : دو نیروی F و ‎-F با اندازه‌های یکسان، خطوط اثر موازی و جهت‌های مخالف، تشکیل کوپل را می‌دهند. کوپل باعث چرخش جسم شده و باعث حرکت انتقالی جسم نمی‌شود، بلکه می‌خواهد آن را بچرخاند.

بردار M گشتاور کوپل

$r_A\times F+r_B\times(-F)=(r_A-r_B)\times F$ $\quad \underline{r_A-r_B=r}$ ۴۷) $M=r\times F$

۴۸) $M=rF\sin\theta=Fd$ که در آن d فاصله عمودی بین خطوط اثر F و ‎-F است. جهت M از قانون دست راست تعیین می‌شود.

کوپل‌های هم‌ارز :

۴۹) $F_1d_1=F_2d_2$

جمع کوپل‌ها : طبق قضیه وارینیون

$M=r\times R=r\times(F_1+F_2)\Rightarrow M=r\times F_1+r\times F_2\Rightarrow$ ۵۰) $M=M_1+M_2$

تجزیه یک نیرو به یک نیرو و یک کوپل در نقطه O :

$M_{O'}=r'\times F=(r+s)\times F=r\times F+s\times F$

۵۱) $M_{O'}=M_O+s\times F$

تبدیل سیستم نیروها به یک نیرو و یک کوپل:

۵۲) $R = \Sigma F \qquad M_O^R = \Sigma M_O = \Sigma (r \times F)$

۵۳) $M_{O'}^R = M_O^R + S \times R$

۵۴) $r = x i + y j + z k$

۵۵) $F = F_x i + F_y j + F_z k$

۵۶) $R = R_x i + R_y j + R_z k \qquad M_O^R = M_x^R i + M_y^R j + M_z^R k$

سیستم نیروهای هم ارز:

۵۷) $\Sigma F = \Sigma F' \quad , \quad \Sigma M_O = \Sigma M_O'$

۵۸) $\Sigma F_x = \Sigma F_x' \qquad \Sigma F_y = \Sigma F_y' \qquad \Sigma F_z = \Sigma F_z'$

$\Sigma M_x = \Sigma M_x' \qquad \Sigma M_y = \Sigma M_y' \qquad \Sigma M_z = \Sigma M_z'$

تبدیل ساده‌تر سیستم نیروها: ۱) نیروهای هم صفحه:

۵۹) $R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O$

اگر فاصله خط اثر برآیند با x و y نشان دهیم $\Rightarrow x R_y - y R_x = M_O^R$

۲) نیروهای موازی: معادل سیستم نیرو کوپل با نیروهای F در مشخص می‌شود:

۶۰) $R_y = \Sigma F_y \qquad M_x^R = \Sigma M_x \qquad M_z^R = \Sigma M_z$

این سیستم را می‌توان به یک نیرو تبدیل کرد. برای این منظور R را در نقطه A(x, 0, z) روی خط اثر R قرار می‌دهیم به طوری که گشتاور R حول O با M_O^R برابر شود:

$r \times R = M_O^R \Rightarrow (x i + z k) \times R_y j = M_x^R i + M_z^R k$

با مقایسه: $\boxed{-z R_y = M_x^R} \qquad \boxed{x R_y = M_z^R}$

طبق این معادلات، مختصات نقطه‌ای که R باید ... x و z بر حسب M_z^R و M_x^R بدست می‌آید.

استاتیک

مروری بر فصل چهارم

تعادل اجسام صلب : شرایط لازم و کافی برای تعادل جسم صلب عبارتست از :

۱) $\sum F = 0$, $\sum M_O = \sum (r \times F) = 0$

با قرار دادن بردار نیروها و گشتاورها به مولفه‌های کارتزین، شش معادله اسکالر زیر بدست می‌آید :

شش معادله تعادل :

۲) $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$

۳) $\sum M_x = 0$ $\sum M_y = 0$ $\sum M_z = 0$

تعادل جسم صلب در دو بعد :

۴) $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_O = 0$

سه معادله تعادل برای سازه دوبعدی :

۵) $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_A = 0$

سایر معادلات تعادل :

۶) $\sum F_x = 0$ $\sum M_A = 0$ $\sum M_B = 0$

۷) $\sum M_A = 0$ $\sum M_B = 0$ $\sum M_C = 0$ $\Rightarrow$ که در آن نقاط A، B و C روی یک خط راست قرار ندارند.

مرکز ثقل جسم دو بعدی :

$\sum F_z:\quad W=\Delta W_1+\Delta W_2+\dots+\Delta W_n$

۱) $\sum M_y:\quad \bar{x}W=x_1\Delta W_1+x_2\Delta W_2+\dots+x_n\Delta W_n$

$\sum M_x:\quad \bar{y}W=y_1\Delta W_1+y_2\Delta W_2+\dots+y_n\Delta W_n$

معادلات مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز ثقل G را تعریف می‌کنند : $\bar{y}W=\int y\,dW$ ، $\bar{x}W=\int x\,dW$ ، ۲) $W=\int dW$

گفته ، مرکز ثقل G یک جسم معمولاً روی جسم قرار ندارد.

مرکز وار سطوح و خطوط :

$\Delta W=\gamma t\,\Delta A$ ⇒ $\gamma=$ وزن مخصوص (وزن واحد حجم) ، $t=$ ضخامت ورق ، $\Delta A=$ مساحت جزئی

$W=\gamma t A$ ⇒ A مساحت کل ورق است

$\sum M_y:\quad \bar{x}A=x_1\Delta A_1+x_2\Delta A_2+\dots+x_n\Delta A_n$

$\sum M_x:\quad \bar{y}A=y_1\Delta A_1+y_2\Delta A_2+\dots+y_n\Delta A_n$

۳) $\bar{x}A=\int x\,dA \qquad \bar{y}A=\int y\,dA$ ⇒ مختصات مرکز وار سطح A

$\Delta W=\gamma a\,\Delta L$ ⇒ $\gamma=$ وزن مخصوص سیم ، $a=$ مساحت مقطع سیم ، $\Delta L=$ طول جزئی

۴) $\bar{x}L=\int x\,dL \ ,\ \bar{y}L=\int y\,dL$ ⇒ مختصات مرکز وار خط L

ممان‌های اول سطوح و خطوط :

۵) $Q_y=\int x\,dA$ ممان اول سطح A نسبت به محور y

$Q_x=\int y\,dA$ ممان اول سطح A نسبت به محور x

⇒ ۶) $Q_y=\bar{x}A$ ، $Q_x=\bar{y}A$

ورق‌ها و سیم‌های مرکب :

۷) $\bar{X}\sum W=\sum\bar{x}W \ ,\ \bar{Y}\sum W=\sum\bar{y}W$ ⇒ مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکز ثقل ورق مرکب

ممان‌های اول سطح مرکب ، مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکز وار

۸) $Q_y=\bar{X}\sum A=\sum\bar{x}A \ ,\ Q_x=\bar{Y}\sum A=\sum\bar{y}A$ ⇒

تعیین مرکز وار با انتگرال‌گیری :

۹) $Q_y=\bar{x}A=\int\bar{x}_{el}\,dA \ ,\ Q_x=\bar{y}A=\int\bar{y}_{el}\,dA$

قضایای پاپوس - گولدینوس :

قضیه I . مساحت یک سطح دوار برابر است با طول منحنی مولد ضرب در مسافتی که مرکز ثقل منحنی ضمن ایجاد این سطح طی می‌کند.

۱۰) $A = 2\pi \bar{y} L$ — مساحت یک سطح دوار

قضیه II . حجم یک جسم دوار برابر است با مساحت مولد ضرب در مسافتی که مرکز ثقل سطح در ضمن ایجاد جسم طی می‌کند.

۱۱) $V = 2\pi \bar{y} A$ — حجم یک جسم دوار

بارهای گسترده وارد بر تیرها :

$W = \int_0^L w\,dx \Rightarrow W = \int dA = A \Rightarrow (OP)W = \int x\,dW$ $(OP)\cdot W = A$, $dW = w\,dx = dA \Rightarrow$

۱۲) $(OP)A = \int_0^L x\,dA$ — معادل اول سطح زیر منحنی بار گسترده است

بارهای وارد بر سطوح غوطه‌ور :

۱۳) $w = bp = b\gamma h$ $\xrightarrow{\text{کمیات}}$

$p = \gamma h$

- $p =$ فشار مایع بر سطح
- $b =$ عرض صفحه
- $\gamma =$ وزن مخصوص مایع
- $h =$ فاصله عمودی از سطح آزاد
- $w =$ بار در طول واحد

حجم‌ها :
مرکز ثقل جسم سه‌بعدی . مرکز حجم :

۱۴) $\begin{cases} \Sigma F: & -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma M_O: & \bar{r} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma[r \times (-\Delta W\mathbf{j})] \end{cases}$

۱۵) $\bar{r}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma r\Delta W) \times (-\mathbf{j}) \Rightarrow W = \Sigma \Delta W \quad , \quad \bar{r}W = \Sigma r \Delta W$

با افزایش تعداد اجزا و کاهش اندازه هر جزء داریم $\Rightarrow$ ۱۶) $W = \int dW \quad , \quad \bar{r}W = \int r\,dW$

با قرار دادن مؤلفه‌های $\bar{r}$ و r معادلات اسکالر داریم $\Rightarrow$ ۱۷) $\bar{x}W = \int x\,dW \quad , \quad \bar{y}W = \int y\,dW \quad , \quad \bar{z}W = \int z\,dW$

$dW = \gamma\,dV \Rightarrow W = \gamma V \Rightarrow$ ۱۸) $\bar{r}V = \int r\,dV$

۱۹) $\bar{x}V = \int x\,dV \quad , \quad \bar{y}V = \int y\,dV \quad , \quad \bar{z}V = \int z\,dV$

مرکز ثقل جسم مرکب :

۲۰) $\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \quad , \quad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \quad , \quad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z}W$

اگر جسم همگن باشد مرکز ثقل آن بر مرکز حجم منطبق است.

۲۱) $\bar{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x}V \quad , \quad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y}V \quad , \quad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z}V$

تعیین مرکز حجم با انتگرال‌گیری :

۲۲) $\bar{x}V = \int x\,dV \quad , \quad \bar{y}V = \int y\,dV \quad , \quad \bar{z}V = \int z\,dV$

۲۳) $\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\,dV \quad , \quad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\,dV \quad , \quad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\,dV$

اگر جسم دارای دو صفحه تقارن باشد، مرکز ثقل آن روی فصل مشترک این دو صفحه است. $\bar{y} = \bar{z} = 0$

۲۴) $\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\,dV$

درسنامه فصل هفتم

روابط بین بار و برش : مجموع مولفه‌های قائم نیروهای وارد بر جسم آزاد CC' را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$V-(V+\Delta V)-w\Delta x=0$ $\Delta V=-w\Delta x$ $\Rightarrow$ 1) $\frac{dV}{dx}=-w$

2) $V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx$

2') $V_D-V_C=-($مساحت زیر منحنی بار بین D و C$)$

روابط بین برش و گشتاور خمشی :

$(M+\Delta M)-M-V\Delta x+w\Delta x\frac{\Delta x}{2}=0$ $\Rightarrow$ $\Delta M=V\Delta x-\frac{1}{2}w(\Delta x)^2$

3) $\frac{dM}{dx}=V$ $\Rightarrow$ معادله نشان می‌دهد که شیب منحنی گشتاور خمشی با مقدار برش برابر است.

4) $M_D-M_C=\int_{x_C}^{x_D} V\,dx$

4') $M_D-M_C=$ مساحت زیر منحنی برش بین D و C

وقتی برش مثبت است، مساحت زیر منحنی برش را مثبت درنظر گرفته، وقتی برش منفی است، مساحت زیر منحنی برش را منفی درنظر گرفته. در روابط ۴ و ۴' حتی در صورت وجود بارهای متمرکز بین D و C درست هستند. ولی اگر یک کوپل بین نقاط C و D وجود داشته باشد صحت نخواهد داشت زیرا این روابط تغییرات ناگهانی گشتاور خمشی که ناشی از کوپل وارده است درنظر گرفته نشده است.

استاتیک

فرمولهای فصل نهم

تعیین ممان دوم سطح با انتگرال‌گیری :

$1)\ I_x=\int y^2 dA \qquad I_y=\int x^2 dA$

ممان دوم مستطیل : (اصول)

$dA=b\,dy \qquad dI_x=y^2 b\,dy \Rightarrow 2)\ I_x=\int_0^h by^2 dy=\frac{1}{3}bh^3$

ممان اینرسی قطبی : یکی از انتگرالهای ممان دوم در مسائل پیچش محورهای استوانه‌ای و در مسائل چرخش تیغه‌ها عبارت است از :

ممان اینرسی قطبی سطح A نسبت به قطب O

$3)\ J_O=\int r^2 dA$ کە در آن $r=$ فاصله بین O و جزء سطح dA

از ممان‌های دوم قائم I_x و I_y یک سطح ممان اینرسی قطبی آن را می‌توان بدست آورد :

$r^2=x^2+y^2$

$J_O=\int r^2 dA=\int (x^2+y^2)dA=\int y^2 dA+\int x^2 dA \Rightarrow 4)\ J_O=I_x+I_y$

شعاع ژیراسیون سطح :

$I_x=k_x^2 A \Rightarrow 5)\ k_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}$ شعاع ژیراسیون

$I_y=k_y^2 A \Rightarrow 6)\ k_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad J_O=k_O^2 A \Rightarrow 7)\ k_O=\sqrt{\frac{J_O}{A}}$

$8)\ k_O^2=k_x^2+k_y^2$

قضیه محورهای موازی : ممان دوم I یک سطح نسبت به محور دلخواه AA' برابر است با ممان دوم $\bar{I}$ این سطح نسبت به محور مرکزی BB' که موازی AA' است به علاوه حاصل ضرب مساحت A در مجذور فاصله d بین این دو محور.

$9)\ I=\bar{I}+Ad^2$

$10)\ k^2=\bar{k}^2+d^2 \qquad 11)\ J_O=\bar{J}_C+Ad^2$ یا $k_O^2=\bar{k}_C^2+d^2$

حاصل ضرب اینرسی :

$12)\ I_{xy}=\int xy\,dA$ حاصل ضرب اینرسی مساحت A نسبت به محورهای x و y

$13)\ I_{xy}=\bar{I}_{xy}+\bar{x}\bar{y}A$ مختصات مرکز سطح A است.

محورهای اصلی و محاسبه ممان‌های اینرسی اصلی :

۱۴) $I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA \qquad I_{xy} = \int xy\, dA$

۱۵) $I_{x'} = I_x \cos^2\theta - 2I_{xy} \sin\theta\cos\theta + I_y \sin^2\theta$

۱۶) $I_{y'} = I_x \sin^2\theta + 2I_{xy} \sin\theta\cos\theta + I_y \cos^2\theta$

۱۷) $I_{x'y'} = (I_x - I_y)\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

با توجه به روابط مثلثاتی که در زیر می‌آوریم:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad , \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad , \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

۱۸) $I_{x'} = \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$

۱۹) $I_{y'} = \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$

$\Rightarrow$ ۲۱) $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$

۲۰) $I_{x'y'} = \frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$

۲۲) $\left(I_{x'} - \frac{I_x+I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$

۲۳) $I_{ave} = \frac{I_x+I_y}{2} \quad , \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$

۲۴) $(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$

۲۵) $\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$

۲۶) $I_{max} = I_{ave} + R \quad : \quad I_{min} = I_{ave} - R$

۲۷) $I_{max,min} = \frac{I_x+I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$