* بسمه تعالی *

معادله $x^2+1=0$ در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد * حال $i^2=-1$ را در نظر می گیریم فلذا داریم $x^2=i^2$ و در نتیجه $x=\pm I$ * یک عدد مختلط را به صورت $z=x+iy$ نمایش می دهند که در آن x مقدار حقیقی و y مقدار موهومی است مثل ←

$$Z=2+3i$$

جمع دو عدد مختلط ←

$$\left.\begin{array}{l} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} z_1+z_2=x_1+x_2+(y_1+y_2)i$$

تفاضل دو عدد مختلط ←

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$$

ضرب دو عدد مختلط ←

$$z_1 . z_2=(x_1+x_2)(y_1+y_2)i$$

فرم نمایی عدد مختلط ← می دانیم بنابر تعریف اویلر

$$\leftarrow e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$z=re^{i\theta} \qquad \{ (e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$$

مثال = قسمت حقیقی و موهومی اعداد زیر را بیابید *

$$z=(1+i)^{120}$$

$1+i$

$x+iy \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \longrightarrow r=|z|=\sqrt{1^۲+1^۲}=\sqrt{۲}$

$tg\theta=\frac{y}{x}=1 \longrightarrow \theta=۴۵^\circ=\frac{1}{۴}$

$W=\sqrt{۲}\left(\cos\frac{1}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$

$z=\left(\sqrt{۲}\left(\cos\frac{1}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)\right)^{1۲۰}=(\sqrt{۲})^{1۲۰}\left(\cos 1۲۰\frac{\pi}{۴}+i\sin 1۲۰\frac{\pi}{۴}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{مقدار حقیقی}=\boxed{۲^{۶۰}} \\ \text{" موهوم}=\boxed{0} \end{cases}$

$Z=(\sqrt{۳}+i)^۶$

$\sqrt{۳}+i$

$x+iy \longrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{۳} \\ y=1 \end{cases} \longrightarrow r=|z|=\sqrt{1+۳}=\sqrt{۴}=۲$

$tg\,\theta=\frac{1}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \theta=۳۰^\circ=\frac{1}{۶}$

$W=۲\left(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}\right)$

$Z=\left(۲\left(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}\right)\right)^۶$

$Z=(۲)^۶\left(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}\right)\rightarrow \begin{cases} \text{حقیقی}=-۶۴ \\ \text{موهوم}=0 \end{cases}$

$$Z = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} i\right)^{۱۲۷}$$

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲} \\ y = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \longrightarrow r = |z| = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴}} = ۱$$

$$tg\theta = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲ = \sqrt{۳} \longrightarrow \theta = ۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$$

$$W = ۱\left(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}\right)$$

* نمایش اعداد مختلط در دستگاه قطبی = طول بردار om را اندازه z گویند $|z|$

اگر $z = x + iy$

اندازه z: $|z| = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$

$r = z$

زاویه بین محور x و om را به θ یا و یا Arg z نمایش می‌دهند همان
آرگومان گویند که در عدد مختلط معمولاً ←

$$0 < \theta \leq ۲\pi$$

می دانیم به اعداد مختلط $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ است پس ←

$$tg\,\theta = \frac{y}{x} \longrightarrow \theta = Arg\,tg\left(\frac{y}{x}\right)$$

پس عدد را می توان به صورت زیر هم نوشت ←

$$z = r(\cos\theta + \sin\theta)$$

★ شکل قطبی زیر را بیابید

$$z = 1+i \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow z = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\,\theta = \frac{y}{x} = 1 \longrightarrow \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ریشه n ام عدد مختلط ← برای بدست آوردن ریشه n ام یعنی $\sqrt[n]{z}$ باید توجه داشت به ابتدا باید عدد به صورت قطبی نوشته شود پس از قضیه دموآور استفاده شود ←

$$W = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} \Rightarrow w^n = z \Rightarrow z = re^{i\theta}$$

$$w = \rho e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \frac{2n\pi}{n} \end{cases}$$

ریشه مختلط از فرمول زیر بدست می آید ←

$$W_K = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)}$$

مثال = مطلوب است ریشه سوم ۱- ←

$$① = W = \sqrt[3]{-1} \longrightarrow x+iy \longrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \longrightarrow r=|z|=\sqrt{-1^2+0^2}=1$$

$$\boxed{W^3+1=0}$$

$$tg\theta = \frac{0}{-1} = 0 \longrightarrow \theta=0 \longrightarrow \theta=\pi$$

$$z = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$K=0 \longrightarrow W_0 = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{\pi+2(0)\pi}{3}} = 1e^{\frac{i\pi}{3}} = 1(\cancel{\cos\frac{\pi}{3}} + i\sin$$

$$K=1 \longrightarrow W_1 = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{\pi+2(1)(\pi)}{3}} = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1+0i$$

$$K=2 \longrightarrow W_2 = \sqrt[3]{1}\, e^{\frac{\pi+1(2)}{3}} = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$$

$$\sqrt[2]{1+\sqrt{3}} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \quad r = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$tg\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$n = 2 \longrightarrow K = 0, 1$$

$$W_0 = \sqrt[2]{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3}+0}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$W_1 = \sqrt[2]{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

* بسمه تعالی *

حاصلضرب دکارتی در مجموعه ← دو مجموعه A و B مفروض اند * حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

مثال ← $A = \{1,2\}$ و $B = \{3,4\}$

$$A \times B = \{(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)\}$$

$$B \times A = \{(3,1)(4,2)(4,1)(4,2)\}$$

در حالت کلی حاصلضرب دکارتی دو مجموعه دارای خاصیت جابه جایی نیست *

تعریف رابطه = یک رابطه مانند R از مجموعه A در مجموعه B زیر مجموعه ای است از حاصلضرب دکارتی $A \times B$ است

$$R_1 = \{(1,3)(2,3)\}$$

$$R_2 = \{(1,3)(1,4)(2,4)\}$$

$$R_3 = \{(2,4)\}$$

نکته = هر مجموعه ای که n عضو داشته باشد 2^n زیر مجموعه دارد

تعریف تابع = رابطه‌ای از $A\times B$ یعنی یک زیر مجموعه از حاصلضرب $A\times B$ یک تابع
هرگاه اگر x و y متعلق باشد به f

$(x,y)\in f$

$(x,z)\in f \longrightarrow y=z$

یعنی هیچ دو زوج مرتب آن دارای مؤلفه اول یکسان نباشد

$R_1=\{(1,2)(3,4)\}$ تابع است

$R_2=\{(1,2)(1,3)\}$ " نیست

$R_3=\{(1,2)(1,2)\}$ " نیست

* ضابطه یا قانون تابع = رابطه‌ای ریاضی بین x و y است که آن را به صورت $y=f(x)$ نشان می‌دهیم پس اگر یک تابع از A در B باشد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{cases} f: A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x)=y \end{cases}$$

مثال = اگر مجموعه A باشد $A=\{-1,0,2\}$ و هر عضو مجموعه A را در عدد ۵ ضرب کنیم در این صورت تابعی با ضابطه $f(x)=5x$ حاصل می‌شود عناصر مجموعه B را مشخص کنید

$B=\{-5,0,10\}$

* تعریف دامنه و برد تابع = مجموعه مؤلفه‌های اول عضوهای تابع f را دامنه تعریف f گویند و با D_f نمایش می‌دهند و مجموعه مؤلفه‌های دوم عضوهای تابع f را برد f گویند و با R_f نمایش می‌دهند

مثال = $f=\{(1,4)(3,5)(2,6)\}$

الف) آیا f تابع است؟ بله

ب) مطلوبست دامنه و برد آن؟

$D_f=\{1,3,2\}$

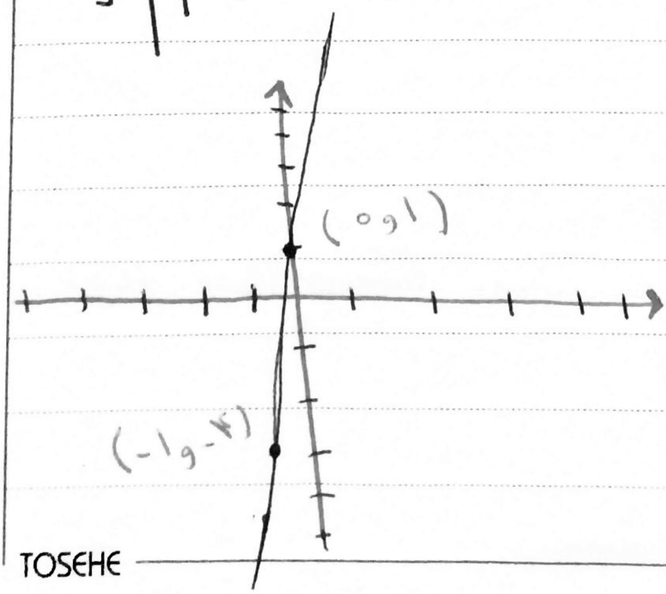
$R_f=\{4,5,6\}$

* تعریف نمودار تابع = به ازای هر x متعلق به دامنه تعریف تابع یک نقطه (x,y) که در آن y مساوی با $f(x)$ باشد به ما داده می‌شود * مجموعه تمام نقاط x و y نمودار تابع را تشکیل می‌دهند *

مثال = نمودار تابع $y=f(x)=5x+1$ را رسم کنید * $x\in R$

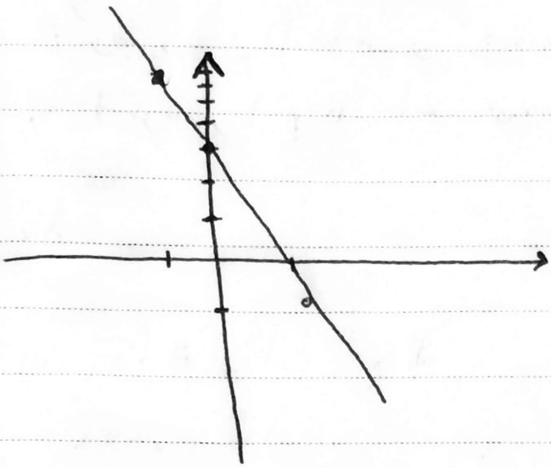
x	0	1	2	3	-1	-2
y	1	6	11	16	-4	-9

$y=\{(-1,-4)(-2,-9)(0,1)\}$



$y = f(x) = -4x + 3 \rightarrow$

x	-1	0	1
y	7	3	-1



* معرفی برخی از توابع =

توابع چند ضابطه ای = برخی از توابع هستند که مقدار تابع در تمام نقاط دامنه تعریفشان با یک ضابطه مشخص نمی شود که در این صورت تابع را با چند ضابطه مشخص می کنند و آن را تابع چند ضابطه ای گویند *

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 3 \\ 5x - 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

$f(0) = 3$

$f(-2) = (2 \times -2) + 3$

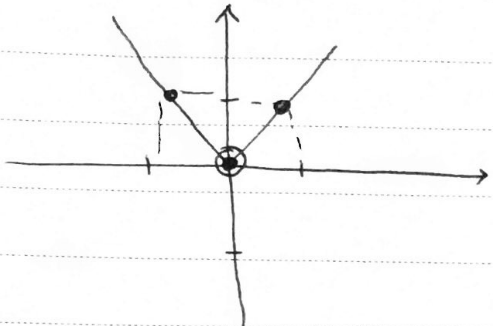
$f(3) = (5 \times 3) - 4$

$f(1) = (1)^2$

* تابع قدرمطلق = x به نماد $|x|$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود ←

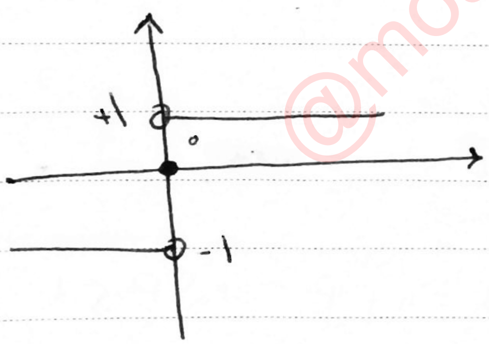
$$|x| \to \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

و نمودار آن به صورت زیر است ←



تابع علامت = تابع سه ضابطه‌ای زیر را تابع علامت گویند و آن را با $\operatorname{sign}(x)$ است *

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

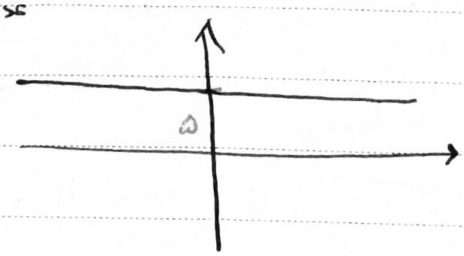


تابع ثابت = تابعی که برد آن فقط از یک عدد منحصر به فرد تشکیل شده باشد را تابع ثابت گویند

$C =$ عدد ثابت

$f(x) = C$

x	0	1	2	3
y	۵	۵	۵	۵



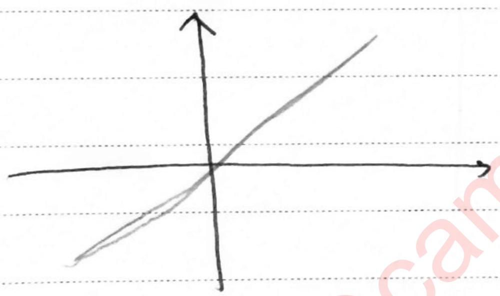
* تابع خطی = $f(x) = ax + b$ که در آن a و b اعداد ثابتی هستند

تابع توانی = $f(x) = x^n$ که n یک عدد صحیح مثبت است را تابع توانی گویند

$n = 1 \longrightarrow f(x) = x^1 = x$ *

$n = 2 \longrightarrow f(x) = x^2$ *

* تابع همانی = تابع $f(x) = x$ که هر x را به خودش می‌برد و نمودار آن نیمساز ناحیه اول و سوم است *



* تابع جزء صحیح = به طور کلی برای هر عدد حقیقی x می‌توان نوشت ←

(برای هر) (وجود دارد)

$\forall_x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z} : \quad x = n + p \quad 0 \leq p < 1$

$x = ۳/۷ \quad n = ۳ \quad ۳/۷ = ۳ + ۰/۷ \quad ۰ < ۰/۷ < ۱$

n بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x را جزء صحیح x نامیده و آن را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهند * و داریم ←

اگر و فقط اگر

$[x] = n \Longleftrightarrow n \leq x < n + 1$

$[۳/۷] = ۳ \Longleftrightarrow ۳ \leq ۳/۷ < ۴$

Year. Month. Day. Note Book

- تابع حقیقی f از R به Z که به صورت $f(x)=[x]$ تعریف می‌شود را تابع جزء صحیح x می‌گویند

$$\begin{cases} x-1 < [x] \leqslant x \\ [x] \leqslant x < [x]+1 \end{cases}$$

$[۲/۱]=۲$ $[-۲/۱]=-۲-۱=-۳$

$[۲/۵]=۲$ $[-۲/۵]=-۳$

$[۲/۹]=۲$ $[-۲/۹]=-۳$

$[۰/۳]=۰$

$[-۰/۴]=-۱$

* تابع یک به یک = فرض کنید از $f: A \to B$ یک تابع باشد f یک به یک است هرگاه

$\forall x, y \in D_f$

* به ازای هر x و y متعلق به دامنه f اگر $f(x_1)=f(x_2)$ باشد آنگاه $x=y$

① $f(x)=۲x+۳ \longrightarrow f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow$

$۲x_1+\cancel{۳}=۲x_2+\cancel{۳} = x_1=x_2$ یک به یک ۱—۱

TOSEHE

$f(x)=x^2 \longrightarrow f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$

$1 \not\longrightarrow 1$ غیر یک به یک

$f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-1} \longrightarrow f(x_1)=f(x_2) \rightarrow \dfrac{(3x_1+2)}{(2x_1-1)}=\dfrac{(3x_2+2)}{(2x_2-1)} \rightarrow$

$(2x_1-1)(3x_2+2)=(3x_1+2)(2x_2-1) \longrightarrow$

$\cancel{6x_1x_2}+4x_1-3x_2-\cancel{2}=\cancel{6x_1x_2}-3x_1+4x_2-\cancel{2}$

$+4x_1+3x_1=+3x_2+4x_2 \Rightarrow \cancel{7}x_1=\cancel{7}x_2$

$x_1=x_2 \quad 1 \longrightarrow 1$ یک به یک

$f(x)=\dfrac{5x+7}{6x-4} \longrightarrow f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow$

$\dfrac{(5x_1+7)}{(6x_1-4)}=\dfrac{(5x_2+7)}{(6x_2-4)} \longrightarrow (5x_1+7)(6x_2-4)=(5x_2+7)(6x_1-4)$

$\cancel{30x_1x_2}-20x_1+42x_2-\cancel{28}=\cancel{30x_1x_2}-20x_2+42x_1-\cancel{28}$

$-20x_1-42x_1=-42x_2-20x_2 \Rightarrow -\cancel{62}x_1=-\cancel{62}x_2$

$x_1=x_2$ یک به یک

$$f(x)=\sqrt[3]{x-5} \to f(x_1)=f(x_2)\to$$

یک به یک

$$\sqrt[3]{x_1-5}=\sqrt[3]{x_2-5}\to x_1-\cancel{5}=x_2-\cancel{5}\to x_1=x_2$$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}\to f(x_1)=f(x_2)\to$$

$$\frac{(x_1^2-1)}{(x_1^2+1)}=\frac{(x_2^2-1)}{(x_2^2+1)}\to$$

$$(x_1^2-1)(x_2^2+1)=(x_1^2+1)(x_2^2-1)\to$$

$$\cancel{x_1^2x_2^2}+x_1^2-x_2^2\cancel{-1}=\cancel{x_1^2x_2^2}-x_1^2+x_2^2\cancel{-1}$$

$$x_1^2+x_1^2=x_2^2+x_2^2\to 2x_1^2=2x_2^2\to x_1=\pm x_2$$

7) $f(x)=\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}}\to f(x_1)=f(x_2)\to$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x_1}-1}{\sqrt{x_1}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{x_2}-1}{\sqrt{x_2}}}\to\frac{(\sqrt{x_1}-1)}{(\sqrt{x_1})}=\frac{(\sqrt{x_2}-1)}{(\sqrt{x_2})}$$

$$(\sqrt{x_1}-1)(\sqrt{x_2})=(\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}-1)\to$$

$$\cancel{\sqrt{x_1x_2}}-\sqrt{x_2}=\cancel{\sqrt{x_1x_2}}-\sqrt{x_1}\to$$

$$-\sqrt{x_2}=-\sqrt{x_1}\Rightarrow\sqrt{x_2}=\sqrt{x_1}\to x_1=x_2$$

1—1 یک به یک

تابع معکوس (وارون): اگر تابع f یک به یک باشد تابع معکوس f را با f^{-1} نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$$

مثال: $f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ آنگاه مطلوب است f^{-1} ←

$$f^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$$

قضیه: معکوس f تابع است اگر و تنها اگر f یک به یک باشد.

همیشه برای معکوس پذیری ابتدا باید یک به یکی را بررسی کرد اگر تابع یک به یک بود به دنبال تابع معکوس می‌رویم.

① $\underbrace{f(x)}_{y} = 2x+3 \longrightarrow y = 2x+3 \longrightarrow x = 2y+3 \longrightarrow$

$x-3 = 2y \longrightarrow y^{-1} = \frac{x-3}{2}$

② $f(x) = x^2 \longrightarrow$ چون یک به یک نیست پس اصلاً معکوس پذیر نیست

③ $\underline{f(x)} = \frac{3x+2}{2x-1} \longrightarrow y = \frac{3x+2}{2x-1} \longrightarrow$

$\frac{x}{1} = \frac{3y+2}{2y-1} \longrightarrow 3y+2 = 2yx - x \longrightarrow$

$3y - 2yx = -x - 2 \longrightarrow y(3 - 2x) = -x - 2 \rightarrow$

$$y = \frac{-x-2}{3-2x}$$

(4) $\underbrace{f(x)}_{y} = \frac{5x+7}{6x-4} \longrightarrow y = \frac{5x+7}{6x-4} \longrightarrow$

$\frac{x}{1} = \frac{5y+7}{6y-4} \longrightarrow 5y + 7 = 6yx - 4x \rightarrow$

$5y - 6yx = -7 - 4x \longrightarrow y(5 - 6x) = -7 - 4x \longrightarrow$

$$y^{-1} = \frac{-7-4x}{5-6x} = f^{-1}(x) = \frac{-7-4x}{5-6x}$$

(5) $\underbrace{f(x)}_{y} = \sqrt[3]{x-5} \longrightarrow y = \sqrt[3]{x-5} \longrightarrow x = \sqrt[3]{y-5} \rightarrow$

$x^3 = y - 5 \longrightarrow \boxed{y^{-1} = x^3 + 5}$

(6) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ چون یک به یک نیست پس اصلاً معکوس پذیر نیست

(7) $\underbrace{f(x)}_{y} = \sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}} \to y = \sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}} \to$

$x = \sqrt{\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}}} \to \frac{x^2}{1} = \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}} \to$

$\sqrt{y}-1 = x^2\sqrt{y} \to \sqrt{y} - x^2\sqrt{y} = +1 \to$

$\sqrt{y}(-x^2+1) = +1 \to \sqrt{y} = \frac{1}{-x^2+1} \to$

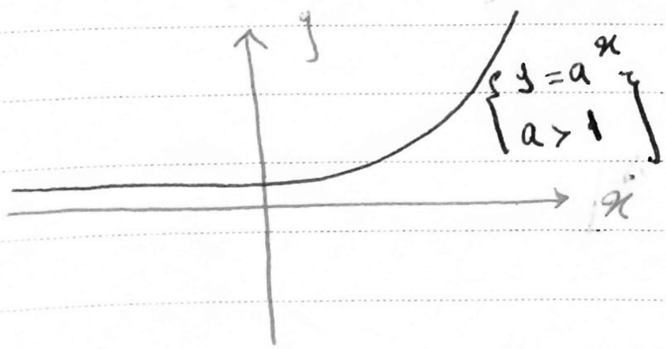
$y = \frac{1}{-x^4+1} = f^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^4}$

* تابع نمایی و لگاریتمی = اگر تابعی دارای پایه‌ای ثابت و نمای متغیر باشد آن‌را تابع نمایی می‌نامند * تابع نمایی به صورت $f(x)=a^x$ که

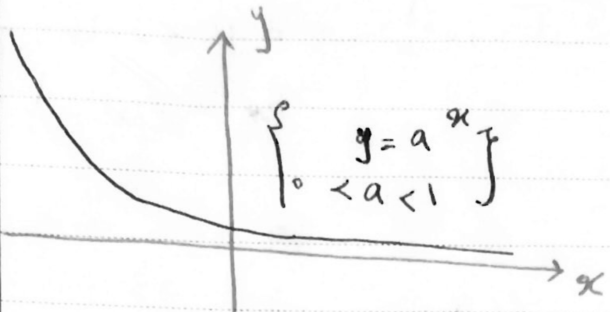
دامنه تعریف این تابع اعداد حقیقی و برد آن $(0,+\infty)$ است * $f(x)=a^x$

$\begin{cases} a \neq 1 \\ a > 0 \end{cases}$

نمودار تابع $f(x)=a^x$ اگر $a>1$ باشد به صورت زیر است



نمودار تابع $f(x)=a^x$ اگر $0<a<1$ باشد به صورت زیر است ←

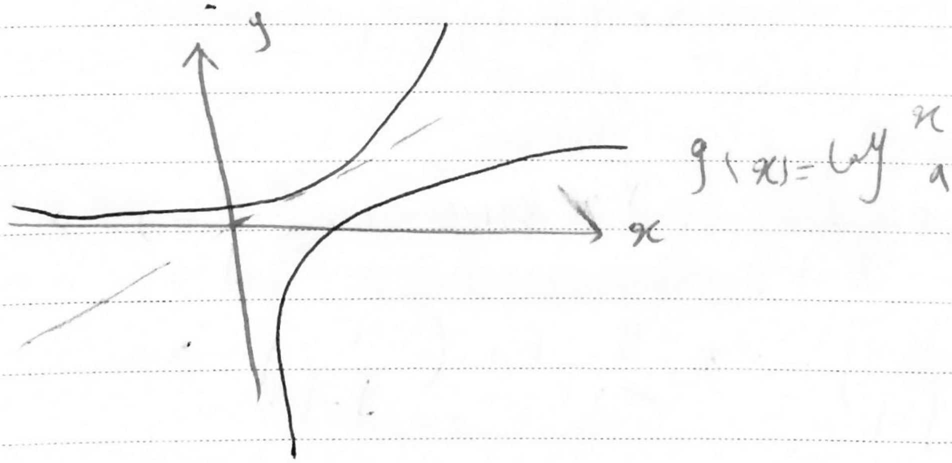


اگر در تابع نمایی $f(x)=a^x$ به جای a عدد e (اویلر یا نپر) که تقریباً ۲٫۷۱۸ است) را قرار دهیم تابع نمایی زیر حاصل می شود

* $f(x)=e^x$ *

تعریف تابع لگاریتمی = تابع نمایی $f(x)=a^x$ در دامنه تعریفش معکوس پذیر است و معکوس این تابع را با $g(x)=\log_a^x$ نمایش می دهند * که در آن $a\neq 1$ و $a>0$ است * دامنه تعریف این تابع $(0,+\infty)$ و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است *

نمودار آن را می توان هم از طریق نقطه یابی و هم تابع معکوس بدست آورد یعنی قرینه ی تابع $y=a^x$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم بدست می آوریم



از بین توابع لگاریتمی تابع لگاریتمی به مبنای آن عدد اصم اویلر (نپر) باشد را با $g(x)=\ln x$ نمایش داده و به آن تابع لگاریتمی طبیعی یا تابع لگاریتم در پایه نپر گویند *

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}} \longrightarrow f(x)=f(y) \longrightarrow$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}} \longrightarrow$$

$$e^{2y}(e^{2x}-1)=e^{2x}(e^{2y}-1) \longrightarrow$$

$$e^{2x+2y}-e^{2y}=e^{2x+2y}-e^{2x} \longrightarrow$$

$$\ln e^{2y}=\ln e^{2x} \longrightarrow y=x \longrightarrow 1-1$$ یک به یک

$$y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}} \longrightarrow y\cdot e^{2x}=e^{2x}-1 \longrightarrow$$

$$ye^{2x}-e^{2x}=-1 \longrightarrow e^{2x}(y-1)=-1 \longrightarrow$$

$$\ln e^{2x}=\ln\frac{-1}{y-1} \longrightarrow 2x\cdot\ln e=\ln\left(\frac{-1}{y-1}\right) \longrightarrow$$

$$2x=\ln\left(\frac{-1}{y-1}\right) \longrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{-1}{y-1}\right) \longrightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{-1}{x-1}\right)$$

* مجموعه تمام مؤلفه های اول زوج مرتب را دامنه تابع می نامیم و به عبارت دیگر مجموعه مقادیر x که به ازای آن ها $f(x)$ وجود داشته باشد

۱) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 3 \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$

۲) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4} \longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$

۳) $f(x) = \dfrac{x^5 + 8x^3 + 11x}{x^2 - 5x + 6} \longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

نکته = دامنه توابع کسری مجموعه تمام اعداد حقیقی به جز ریشه های مخرج کسر *

فرجه زوج

۴) $f(x) = \sqrt{3 - 2x} \longrightarrow 3 - 2x \geq 0 \longrightarrow -2x \geq -3 \longrightarrow$

$x \leq +\dfrac{3}{2} \longrightarrow D_f = \left(-\infty, +\dfrac{3}{2}\right]$

۵) $f(x) = \sqrt{4x + 6} \longrightarrow 4x + 6 \geq 0 \longrightarrow 4x \geq -6 \longrightarrow$

$x \geq -\dfrac{6}{4} \longrightarrow D_f \left[-\dfrac{6}{4}, +\infty\right)$

فرجه فرد

۶) $f(x) = \sqrt[5]{4x + 4} \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$

۷) $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}} \longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$

نکته: در مورد دامنه رادیکال ها اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد ولی اگر فرجه رادیکال فرد باشد تنها عبارت زیر رادیکال را بررسی می کنیم و به رادیکال کاری نداریم ★

(1) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}} \geq 0 \longrightarrow$

$P=\frac{x}{x+1} \geq 0 \longrightarrow x=0$

$x+1=0 \longrightarrow x=-1 \longrightarrow$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
P	$+$	ت	$-$	0	$+$
$P \geq 0$	ق				ق

$D_f=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

(2) $f(x)=\sqrt[4]{\frac{2x+1}{3x-4}} \geq 0 \longrightarrow P=\frac{2x+1}{3x-4} \geq 0 \longrightarrow$

$2x+1=0 \longrightarrow 2x=-1 \longrightarrow x=-\frac{1}{2}$

$3x-4=0 \longrightarrow 3x=+4 \longrightarrow x=\frac{4}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$	0	$+$
P	$+$	0	$-$	ت	$+$
$P \geq 0$	ق				ق

$D_f=(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup(\frac{4}{3},+\infty)$

Year. Month. Day. Note Book

۱۰) * $f(x)=\sqrt{\dfrac{۱۴x+۷}{x^۲-۴}} \longrightarrow ۱۴x+۷\geq ۰ \longrightarrow$

$۱۴x\geq -۷ \longrightarrow$

$x \geq \dfrac{-۷}{۱۴} \Rightarrow$

$x\geq -\dfrac{۱}{۲}$

$x^۲-۴=۰ \longrightarrow x^۲=+۴ \longrightarrow \boxed{x=۲}$

$[-\dfrac{۱}{۲}, +\infty)-\{\pm ۲\}=D_f$

۱۱) $f(x)=e^{x+۲}$

$D_f=\mathbb{R}$

۱۲) $f(x)=e^{\sqrt{۴-x}} \longrightarrow ۴-x\geq ۰ \rightarrow -x\geq -۴ \rightarrow x\leq ۴$

۱۳) $f(x)=e^{\sqrt[۳]{۴x-۵}} \longrightarrow D_f=\mathbb{R}$

۱۴) $f(x)=e^{\frac{۳x+۱}{۲x-۵}} \longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\dfrac{۵}{۲}\}$

* نکته = برای تعیین دامنهٔ تابع نمایی کافی است دامنهٔ توان e را بررسی کنیم

۱۵) $f(x)=\log_{۳}(x-۱) \longrightarrow x-۱>۰ \longrightarrow x>+۱$

$D_f=(۱, +\infty)$

۱۶ $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) > 0 \longrightarrow$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	$+$	$-$	$+$	
	ق		ق	

$D_f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

۱۷ $f(x) = \ln(x^2 - 1) \longrightarrow x^2 - 1 > 0 \longrightarrow x^2 > +1 \longrightarrow$

$x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
x^2-1	$+$	$-$	$+$	
P	ق		ق	

$D_f = (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$

۱۸ $f(x) = \log\left(\dfrac{3x-6}{4x+8}\right)$

$\dfrac{3x-6}{4x+8} > 0 \longrightarrow$ $3x - 6 = 0 \longrightarrow 3x = 6 \longrightarrow x = 2$

$4x + 8 = 0 \longrightarrow 4x = -8 \longrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	$-$	$+$	
$4x+8$	$-$	$+$	$+$	
P	$+$	$-$	$+$	
$P \geq 0$	ق		ق	

$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

نکته: درمورد دامنه لگاریتمی ها یا Ln باید عبارت جلوی لگاریتم بزرگتر از صفر باشد *

(۱۹) $f(x) = \dfrac{x^{2} - 1}{[x] - 7} \longrightarrow [x] - 7 = 0 \longrightarrow [x] = 7 \longrightarrow$

$-7 \leq x < -6 \longrightarrow D_f = \mathbb{R} - [-7, -6)$

(۲۰) $f(x) = \dfrac{4}{[x] - 5} \longrightarrow [x] - 5 = 0 \longrightarrow [x] = 5 \longrightarrow$

$5 \leq x < 6 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - [5, 6)$

اعمال جبری روی توابع جبری: فرض کنیم f و g دو تابع با دامنه تعریف های D_f و D_g باشد توابع زیر را می توان تعریف کرد *

۱* مجموع دو تابع =

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$

۲* تفاضل دو تابع =

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g$

۳ * حاصلضرب دو تابع =

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

۴ * خارج قسمت دو تابع =

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

* مثال =

$$y = \underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x-3}}_{f(x)} + \underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{g(x)}$$

دامنه صورت : $(x+2) > 0 \to x > -2 \to D = (-2, +\infty)$

" مخرج " : $x - 3 \neq 0 \to x = 3 \to D = \mathbb{R} - \{3\}$

$$D_f = (-2, +\infty) \cap \mathbb{R} - \{3\} = (-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$D_g \Rightarrow P = 4 - x^2 \geq 0 \to 4 - x^2 = 0 \to 4 = x^2 \to x = \pm 2$$

x	$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$
$4-x^2$	$-$	$+$	$-$	
$P \geq 0$		ق ق		

$$D_g = [-2, 2]$$

$\sqrt{x^2} \rightarrow D: x^2 \geq 0$

$D_f \cap D_g = (-۲, +\infty) \cup (۳, +\infty) \cap [-۲, +۲) \rightarrow$

$D_g = (-۲, +۲]$

$$y = \frac{\overbrace{\ln(۲x+1)}^{f}}{\underbrace{\sqrt{x(x+1)}}_{g}}$$

$D_f = ۲x+1 > 0 \rightarrow ۲x > -1 \rightarrow$

$x > -\frac{1}{۲} \rightarrow$

$D_f = (-\frac{1}{۲}, +\infty)$

$D_x \Rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_x = [0, +\infty)$

$D_{(x+1)} \Rightarrow x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \rightarrow [-1, +\infty)$

$D_x \cup D_{(x+1)} = [-1, +\infty) = D_g$

$D_f \cap D_g = [-1, +\infty) - \{0, -1\}$

$x(x+1) = 0 \rightarrow x = 0$

$(x+1) = 0 \rightarrow x = -1$

$P = x(x+1) > 0 \rightarrow x = 0$

$x+1 = 0 \rightarrow x = -1$

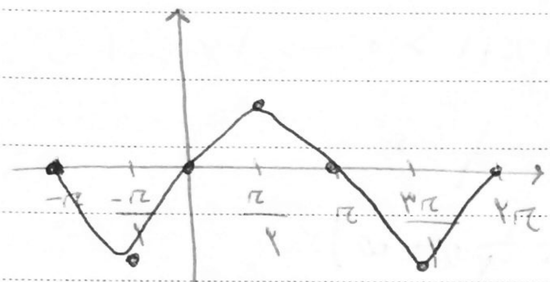
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
P	$+$			$+$

? ?

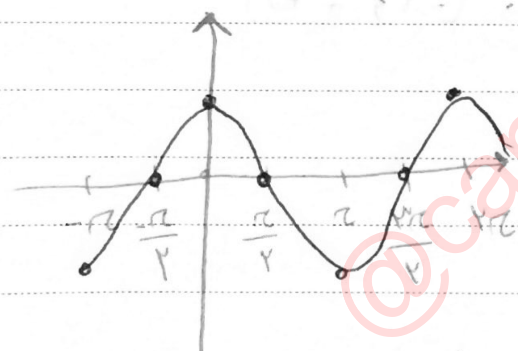
$\rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

$D_{f\circ g} = (-\frac{1}{2}, +\infty) \cap (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

توابع مثلثاتی = توابع $y=\sin x$ که دامنهٔ تعریف آن اعداد حقیقی و بُرد آن بازهٔ بستهٔ $[-1,1]$ است و تابع معکوس آن را با $y=\text{Arcsin}\,x$ نمایش می‌دهند و نمودار آن به صورت زیر است



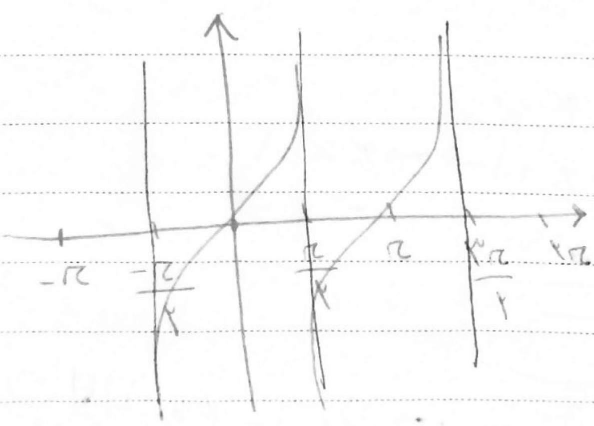
تابع $y=\cos x$ که دامنهٔ تعریف آن IR و بُرد آن $[-1,1]$ است
و تابع معکوس آن را با $R=\cos^{-1}x$ نمایش می‌دهند *



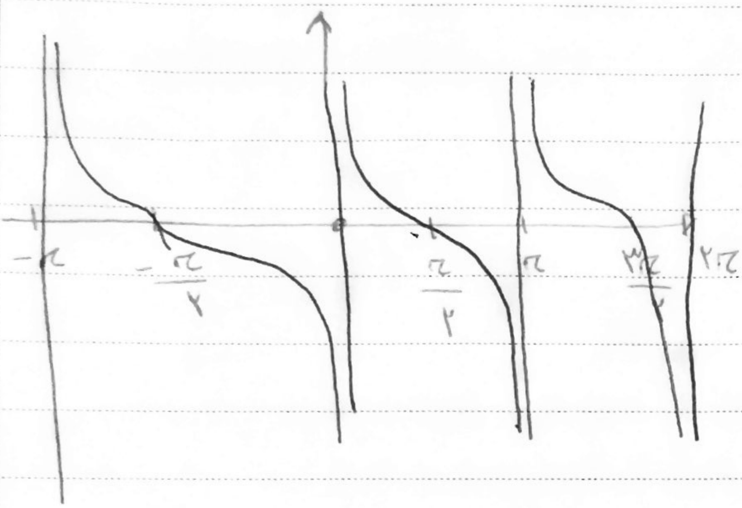
تابع $y=\tan x$ که دامنهٔ تعریف آن

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$$

است و بُرد آن IR است



تابع $y = \cot(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ، دامنهٔ تعریف آن $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi\}$



بسمه تعالی

Year. Month. Day. Note Book

مجموعه = یک مفهوم اولیه و تعریف نشده است و هر دسته از اشیاء مشخص و معین یک مجموعه را نشان می دهد و اگر A یک مجموعه باشد هر یک از اشیاء مجموعه A یک عضو یا یک عنصر مجموعه A نامیده می شود * می نویسیم $x \in A$ یعنی x یک عضو مجموعه A است و اعضای مجموعه را بین { } می نویسند مانند

$A=\{۸,۹,۴,۲\}$ = مجموعه‌ای اعداد [illegible] طبیعی

$\begin{cases} ۲ \in A \\ ۳ \notin A \end{cases}$

تساوی دو مجموعه A و B برابر نوشته می شوند $A = B$ هرگاه دقیقاً عضوهای یکسان داشته باشند و به عبارت دیگر A و B مساوی اند هرگاه هر عضو A در B و هر عضو B در A باشد *

مثال = دو مجموعه $A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $B=\{x \mid x$ فرد تک رقمی $\}$

عدم برابری دو مجموعه را با علامت $A \neq B$ نمایش می دهند *

زیر مجموعه یک مجموعه مانند A زیرمجموعه‌ی یک مجموعه مانند B است هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و می نویسیم $A \subseteq B$ و اگر بخواهیم تأکید کنیم که A زیر مجموعه B است ولی مساوی B نیست می نویسیم $A \subset B$ است و می خوانیم A زیر مجموعه محض B است *

مجموعه تهی = مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نامیده می شود و با علامت $\emptyset$ نشان می دهند *

$\emptyset=\{x \in \mathbb{R} \mid x^2<0\}$

Year. Month. Day. Note Book

مجموعه توان = مجموعه همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه که مجموعه توان نامیده می‌شود و با علامت $P(x)$ نشان داده می‌شوند *

$x=\{1,2,3\} \longrightarrow P(x)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{x\}\}$

نکته = هر مجموعه به تعداد 2^n زیرمجموعه دارد *

* $n=$ تعداد اعضای مجموعه

* برخی از مجموعه‌های مهم =

$W=\{1,2,3,\dots\}$ (طبیعی)

$Z=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ (صحیح)

$Q=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in Z, b\neq 0\}$ (گویا)

$\mathbb{R}=\{$ شامل تمام مجموعه‌های بالا (گنگ و گویا) $\}$ (حقیقی)

* مجموعه اعداد حقیقی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر می‌گیرند
(M و U)

اجتماع دو مجموعه: دو مجموعه A و B مفروض‌اند؛ مجموعه‌ای که عضوهایش متعلق به A و B باشد مجموعه اجتماع گویند و به صورت AUB نمایش می‌دهند.

$$A\cup B=\{x\mid(x\in A)\vee(x\in B)\}$$

مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3,4\}$ مطلوب است: $A\cup B$ ←

$$A\cup B=\{1,2,3,4\}$$

اشتراک دو مجموعه: اشتراک مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن هم متعلق به A باشند و هم متعلق به B. یعنی عضوهای مشترک A و B و با علامت $A\cap B$ نمایش می‌دهند و به عبارت دیگر ←

$$A\cap B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

$$A\cap B=\{3\}$$

نکته: اجتماع و اشتراک را می‌توان برای بیش از دو مجموعه نیز تعریف کرد.

$$A\cup B\cup C\cup D=\{x\mid(x\in A)\vee(x\in B)\vee(x\in C)\vee(x\in D)\}$$

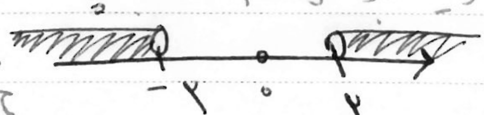
$$A\cap B\cap C\cap D=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\in C)\wedge(x\in D)\}$$

مجموعه‌های جدا از هم: دو مجموعه A و B را جدا از هم گویند هرگاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند یعنی $A\cap B=\{\varnothing\}$ باشد.

مثال: آیا دو مجموعه زیر جدا از هم‌اند؟ بله

$A=\{x\mid x>2\}$

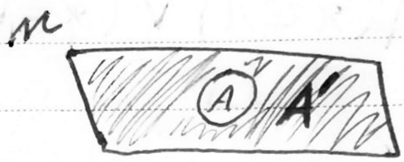
$B=\{x\mid x<-2\}$



$$A\cap B=\varnothing$$

* متمم مجموعهٔ A نسبت به مجموعهٔ مرجع M که با A' نشان داده می‌شوند
مجموعه‌ای است که عضوهای آن متعلق به مجموعه M است ولی متعلق
به A نیست *

$A' = \{x \in M \mid x \notin A\}$



مثال = $M = \{۰, ۱, \ldots, ۱۰\}$ ، $A = \{۱, ۲, ۴, ۶, ۷\}$ است $A' = ?$ *

$A = \{۳, ۵, ۸, ۹, ۱۰\}$

تفاضل دو مجموعه: عناصری از مجموعه A که در B نباشد

$A - B = A \cap B'$

$M = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$

$A = \{۱, ۲, ۵, ۶, ۷, ۸\}$

$B = \{۲, ۶, ۷\}$

$B' = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹\}$

$M - B \longrightarrow A - B = A \cap B' = \{۱, ۲, ۵, ۶, ۷, ۸\} \cap \{۱, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹\}$

$= \{۱, ۵, ۸\}$ *

Year. Month. Day. Note Book

تفاضل متقارن =

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

مثال ←

$M = \{١، ...، ١٠\}$

$A = \{١، ٢، ۴، ۶، ٨\}$

$B = \{٢، ۴، ٧، ٨، ٩\}$

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{١، ٢، ۴، ۶، ٧، ٨، ٩\} - \{٢، ۴، ٨\} =$

$\{١، ۶، ٧، ٩\}$ *

تذکر = فرض کنید A و B و C سه مجموعه باشند و M مجموعه مرجع باشد و آنگاه داریم

١) جابجایی $\begin{cases} ١) A \cup B = B \cup A \\ ٢) A \cap B = B \cap A \end{cases}$

٢) شرکت پذیری $\begin{cases} ٣) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ ۴) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

٣) خاصیت پخشی $\begin{cases} ۵) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ ۶) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

قوانین دمورگان ← $\begin{cases} 7)\ (A\cup B)' = A'\cap B' \\ 8)\ (A\cap B)' = A'\cup B' \end{cases}$

قوانین متمم‌گیری $\begin{cases} 9)\ A\cup A' = M \\ 10)\ A\cap A' = \varnothing \end{cases}$

$11)\ (A')' = A$

مثال = $(A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)\cap(A'\cup B') \longrightarrow$

$(A-B)\cup(B-A) \longrightarrow (A\cap B')\cup(B\cap A') \Longrightarrow$ پخشی

$\left((A\cap B')\cup B\right)\cap\left((A\cap B')\cup A'\right) =$

$\underbrace{\left((A\cup B)\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{M}\right)}_{A\cup B}\cap\underbrace{\left(\underbrace{(A\cup A')}_{M}\cap(B'\cup A')\right)}_{B'\cup A'} \Rightarrow$

$(A\cup B)\cap(B'\cup A') = (A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$(A' \cup B') \cap (A' \cup B) = A' \longrightarrow$

$A' \cup (B' \cap B) = A' \cup \phi \Rightarrow \boxed{A' = A'}$

(۴) $A' \cap (A \cup B) = B - A \longrightarrow$

$(A' \cap A) \cup (A' \cap B) = A' \cap (A \cup B)$

$\downarrow$

$B - A$

(۶) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C \longrightarrow$

$\downarrow$

$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$

$\downarrow$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

$\boxed{(A \cap B) - C = (A \cap B) - C}$

$\cap$

(۵) $A \cup (A \cap B) = A \longrightarrow$

$\downarrow$

$(A \cup A) \cap (A \cup B) = A$

$\downarrow \Rightarrow \boxed{A \subseteq A \cup B}$

$A = A$

(۷) $A \cup (B' - A') = A \longrightarrow (A \cup B') - \overbrace{(A \cup A')}^{M} = A$

$(A \cup B') \cap (M') \longrightarrow (A) \cup \underbrace{(B' \cap M')}_{\phi} \Rightarrow A$

7) $A-B = B'-A \longrightarrow A-B = A\cap B' \longrightarrow B'\cap A \longrightarrow$

8) $(A\cap B)\cup(A\cap B') = A \longrightarrow$

$(A-B')\cup(A-B) = A \longrightarrow A-\underbrace{(B'\cup B)}_{M} = A \longrightarrow A = A$

9) $(A-B')-C = (A\cup B\cup C)'$

10) $[A\cup(A\cap B)]-[B\cap(B\cup A)] = A\cap B' \longrightarrow$

$[\overset{A}{(A\cup A)}\cap(A\cup B)]-[\overset{\emptyset}{(B'\cap B)}\cup(B\cap A)] = A\cap B' \longrightarrow$

$A\cap(A\cup B)-(B\cap A) = A\cap B'$

حد و پیوستگی = ابتدا با یک مثال ساده رفتار تابع را در اطراف نقطه ای خاص مانند A بررسی می کنیم
و تابع $f(x)=x+1$ را در نظر بگیرید * دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی است فرض
کنیم x به سمت عددی مانند $a=2$ میل کند * نزدیک شود x به A از دو طرف
یعنی یک بار مقادیر x های بزرگتر از ۲ و بار دیگر مقادیر x های کوچکتر از ۲ را به
متغیر x داده و مقدار $f(x)$ را حساب می کنیم *

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۳/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 2} (x+1) = 2+1 = 3$$

همانطور که مشاهده می کنید هرچه x به ۲ نزدیک تر شود، $f(x)$ به ۳ نزدیکتر می شود پس در اینجا
گوییم حد تابع بالا وقتی که $x\to 2$ باشد ۳ است *

قضایای حد =

قضیهٔ ۱ = حد یک تابع در یک نقطه در صورت وجود منحصر به فرد است * یعنی اگر

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \\ \lim_{x\to a} f(x) = L_2\end{array}\right. \longrightarrow L_1 = L_2$$

قضیه ۲ =

$$\lim_{x\to a}(mx+b) = (m\cdot a)+b$$

$$\lim_{x\to 2} 3x+4 = (3\times 2)+4 = 10$$

قضیه ۳ = اگر

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = L \\ \lim_{x\to a} f(x) = M\end{array}\right. \Longrightarrow \lim \big(f(x)\pm g(x)\big) = \boxed{L\pm M}$$

$$\lim_{x\to 3}(2x-4)=2$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2+1)=10 \longrightarrow \lim(\overbrace{2x-4}^{2}+\overbrace{x^2+1}^{10})=12$$

قضیه ۴ = اگر

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = L \\ \lim_{x\to a} g(x) = M\end{array}\right. \Longrightarrow \lim \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \boxed{L\cdot M}$$

$$\lim_{x\to 3}(\overbrace{2x-4}^{2})(\overbrace{x^2+1}^{10}) = 10\times 2 = 20$$

قضیه ۵ =

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = M \quad \text{و}\ M \neq 0 \longrightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = L/M$$

قضیه ۶ =

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \longrightarrow \lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$$

$$\lim_{x \to 2} (\cancel{2x}+3)^{200} = 7^{200}$$

رفع ابهام = تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید عدد $a=2$ در دامنهٔ تعریف تابع وجود ندارد

اما می خواهیم حد تابع را وقتی که $x \to 2$ بدست آوریم

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۳٫۹	۳٫۹۹	۳٫۹۹۹	۴٫۰۰۱	۴٫۰۱	۴٫۱

$$\lim \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2)^2-4}{2-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

روش رفع ابهام کردن = ۱* به کمک اتحاد ها

* ۲ تقسیم چند جمله ای به عامل ابهام

* ۳ روش هوپیتال *

۱

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۴}{x-۲} = \lim \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}} = \lim(x+۲) = ۲+۲ = \boxed{۴}$$

۲

$$\lim \frac{x-۴}{x-۲} = \lim \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۱)\cdot۱} = ۲+۲ = \boxed{۴}$$

عامل ابهام $\longrightarrow x \longrightarrow ۲ \rightarrow (x-۲)$

۳

$$\lim \frac{x^۲-۴}{x-۲} \overset{}{\underset{H}{=}} \lim \frac{۲x}{۱} = ۲\times۲ = \boxed{۴}$$

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۳-۲x^۲+x-۱۲}{x^۲-۹} = \frac{(۳)^۳-۲(۳)^۲+۳-۱۲}{(۳)^۲-۹} = \frac{۲۷-۱۸+۳-۱۲}{۹-۹} = \frac{۰}{۰}$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳}-۲x+x-۱۲ & x-۳ \\ \hline -\cancel{x^۳}+۳x^۲ & x^۲+x+۴ \\ \hline +x^۲+x-۱۲ & \\ +x^۲+۳x & \\ \hline -۴x-۱۲ & \\ +۴x+۱۲ & \end{array}$$

$$\frac{x^۳}{x} = x^۲$$

$$\frac{x^۲}{x} = x$$

$$\frac{۴x}{x} = ۴$$

$$\frac{(x^2+x+4)(x-3)}{(x-3)(x+6)} = \frac{(x^2+x+4)}{x+4} \to \frac{9+3+4}{3+3} = \frac{16}{6}$$

۳) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \frac{(1)^2-2(1)+1}{(1)^3-1} = \frac{0}{0}$$

$x \to 1$ → عامل ابهام $\Rightarrow x-1$

$$\lim \frac{(x-1)(x-1)}{x(x^2-1)} = \lim \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{x\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1-1}{1(1+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

۴) $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = \frac{0}{0} \to \lim \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-5)} = \frac{3-2}{3-5} = -\frac{1}{2}$$

۵) $$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \frac{0}{0} = \frac{(x+2)(x^2+x)}{(x+2)(x-3)} = -\frac{2}{5}$$

$x \to -2$ $\xrightarrow{\text{عامل ابهام}}$ $x+2$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+3x^2+2x & x+2 \\ \hline -\cancel{x^3}-2x^2 & x^2+x \\ \hline x^2+2x & \\ -x^2-2x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2}-x-6 & x+2 \\ \hline -\cancel{x^2}-2x & x-1 \\ \hline 0-x-6 & \\ x+2 & \\ \hline 0-4 & \end{array}$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = \dfrac{0}{0} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}(5x+8)}{\cancel{x^2}(3x^2-16)} = \dfrac{8}{-16}$

(7) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3-1}{t-1} = \dfrac{0}{0} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{array}\right.$

$t^3-1^3 = (t-1)(t^2+t+1) \longrightarrow \lim \dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)} = \boxed{3}$

a^3-b^3

(8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim \dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)} = 2$

(9) $\lim\limits_{x\to} \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$

$$\lim \frac{\sqrt{x^{۲}+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+}+1} = \lim \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x}+1+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim \frac{(\sqrt{x+1})^{۲}-(1)}{ح\ ۳۰} = \lim \frac{(x+1)-1}{ح\ ۳۰} =$$

$$\lim \frac{x}{x\sqrt{x+1}+1} = \lim \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{1}{۲}}$$

$$\lim_{x \to ۵} \frac{\overset{a}{\sqrt{x-1}}-\overset{b}{۲}}{x-۵} \times \frac{\sqrt{x-1}+۲}{\sqrt{x-1}+۲} = \frac{(\sqrt{x-1}-۲)(\sqrt{x-1}+۲)}{(\sqrt{x-1}+۲)(x-۵)}$$

$$\frac{(\sqrt{x-1})^{۲}-(۲)^{۲}}{ح\ ۳۰} = \frac{x-1-۴}{ح\ ۳۰} = \lim_{x \to ۵} \frac{\cancel{(x-۵)}}{(\sqrt{x-1}+۲)\cancel{(x-۵)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{۵-1}+۲} = \frac{1}{۴} = \frac{1}{٤}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} \times \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)\right)}$$

$$\frac{\left(\sqrt{1-2x-x^2}\right)^2-(1+x)^2}{\text{مزدوج}} = \frac{\cancel{1}-\cancel{2x}-\cancel{x^2}-(\cancel{1}+\cancel{x^2}+\cancel{2x})}{\text{مزدوج}}$$

$$\frac{-4x-2x^2}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}\right)+(1+x)}$$

$$= \frac{-4}{+2} = -2$$

حدود یکطرفه = فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله (a, c) تعریف شده باشد * حد راست $f(x)$ هنگامی که x از سمت راست به a نزدیک شود برابر L است و می نویسیم که:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

تعریف حد راست = فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله (c, a) تعریف شده باشد حد راست $f(x)$ هنگامی که x از سمت راست به a نزدیک شود برابر L است ←

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2+Bx & x<-2 \\ x+3 & -2\le x\le 2 \\ 2x-B & x>2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}(2x-B)=4-B \\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x+3)=2+3=5 \end{array}\right\} \to 4-B=5 \to \boxed{B=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^+}(x+3)=-2+3=+1 \\ \lim Ax^2+Bx=A(-2)^2+B(-2)=4A-2B \end{array}\right\} \to$$

$$4A-2B=+1 \to 4A-\cancel{2(-1)}^{+2}=+1 \to A=-\frac{1}{4}$$

تمرین =

①
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 2 \\ ax+b & -2<x<2 \\ 2x-6 & x\ge 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+} 2x-6 = 2\times 2-6 = -2 \;\Big\}\to 2a+b=-2$$

$$\lim_{x\to 2^-} ax+b = 2a+b$$

$$\begin{cases} \cancel{2a}+b=-2 \\ -\cancel{2a}+b=4 \end{cases}$$

$$2b=2 \to \boxed{b=1} \quad \boxed{a=-\tfrac{3}{2}}$$

$$\lim_{x\to -2^+} ax+b = -2a+b$$

$$\lim_{x\to -2^-} x^2 = (-2)^2 = +4 \;\Big\}\to -2a+b=4$$

④ $f(x) = \begin{cases} 2x+A & x<-2 \\ x^2+B & -2\le x<2 \\ x+1 & x>2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+} x+1 = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} x^2+B = 4+B \;\Big\}\; 4+B=3 \to \boxed{B=3-4=-1}$$

$$\lim_{x\to -2^+} x^2+B = 4+B = 4-1 = 3$$

$$\lim_{x\to -2^-} 2x+A = -4+A \;\Big\}\to -4+A=3 \to \boxed{A=3+4=7}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} b-x = b-1 \\ \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1\end{array}\right] \to b-1=1 \to \boxed{b=1+1=2}$$

۳)

$$f(x)=\begin{cases} x+a & x<-1 \\ x^2 & -1\le x \le 1 \\ b-x & x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^+} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} x+a = -1+a\end{array}\right] -1+a=1 \to \boxed{a=1+1=2}$$

a و b را طوری تعیین کنید که در نقطه $x=2$ دارای حد چپ ۳ و حد راست ۵ باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2bx & x>2 \\ 2ax-3b & x\le 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} ax^2+2bx = 4a+4b=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} 2ax-3b = 4a-3b = 3\end{array}\right] \to \begin{cases} 4a+4b=5 \\ 4a-3b=3 \\ -4a+3b=-3 \end{cases}$$

$$b=\frac{2}{7}$$

$$a=\frac{27}{28}$$

اگر $f(x)=[x]$ مطلوب است ←

$$\lim_{x \to 4} f(x) \quad ① \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^+} [x] = [4.1] = 4 \\ \lim\limits_{x \to 4^-} [x] = [3.9] = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) \quad ② \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1.5^+} [x] = [1.6] = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1.5^-} [x] = [1.4] = 1 \end{cases}$$

نکته = در محاسبه حد جزء صحیح اگر x به سمت عدد صحیح میل کند حد نخواهیم داشت ولی اگر x به سمت عدد اعشاری میل کند حد داریم چون حد چپ و راست آن با هم برابر است.

$$\lim \frac{x}{[x]} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{[2.1]} = \frac{2}{2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{[1.9]} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

$1 \neq 2$ حد ندارد

$$\lim \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1 \end{cases}$$

$1 \neq -1$ حد ندارد

Year. Month. Day. Note Book

$$\lim \frac{x^2-9}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{|x-3|} = \lim \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{(\cancel{x-3})} = 6$$

① $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$

② $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty \end{cases}$$

③ $\lim_{x\to 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(2-2)^2} = \frac{-3}{0} = \infty$

OSEHE

$$\lim_{x \to 2} \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ = گاهی اوقات برای محاسبه‌ی حد نسبت بزرگترین توان صورت به بزرگترین توان مخرج را تقسیم می کنند.

۱) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + x^2 - x}{4x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^5}{4x^3} = \lim \frac{x^2}{4} = \frac{(-\infty)^2}{4} = +\infty$$

۲) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + x}{x^4 - x + 5} = \lim_{x \to -5} \frac{2x^4}{x^4} = 2$$

۳) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{4x^2 + x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{4x^2} = \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

نکته: → $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ $\quad \frac{0}{\text{عدد}} = 0$

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ $\quad \frac{\text{عدد}}{0} = \infty$

هم ارزی های مهم = اگر $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$ باشد آنگاه داریم

① $\sin h(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ هم ارزی

② $\tan h(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

③ $\sin^{-1} h(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

④ $\tan^{-1} h(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

⑤ $\sin^{n} h(x) \underset{x\to a}{\sim} (h(x))^{n}$

$\tan^{n} h(x) \underset{x\to a}{\sim} (h(x))^{n}$

⑦ $1 - \cos h(x) \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{2}(h(x))^{2}$

⑧ $e^{h(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = 3/5$$

$$\lim \frac{\sin 7x}{\tan 4x} = \lim \frac{7x}{4x} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)}{x-2} = \quad = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x - x\tan(2x)}{\tan^{-1} 3x} = \lim \frac{4x - \overset{2x^2}{\cancel{x.2x}}}{3x} \rightarrow$$

$$x\left(\frac{4-2x}{3x}\right) = \frac{4-0}{3} = 4/3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x} = \lim \frac{1/2\,(2x)^2}{x} = \lim \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 2x \Rightarrow \underline{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3$$

* پیوستگی = تابع $f(x)$ را در $x=a$ پیوسته گوییم اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار باشد *

۱. $f(a)$ وجود داشته باشد *

۲. $\lim f(x)$ موجود باشد $\left(\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)\right)$ *

۳. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ *

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال = پیوستگی تابع را در نقطه ۳ بررسی کنید *

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \geq 3 \\ 2x - 1 & x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^+} x^2 - 4 = (3)^2 - 4 = \cancel{8}\,5$$

$$\lim_{x \to 3^-} 2x - 1 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$f(3) = f(x^2 - 4) = 9 - 4 = 5$$

پیوسته است *

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 2 \\ x^2 - 3 & x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^+} x^2 - 3 = (2)^2 - 3 = 1$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to 2^-} x + 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\neq$$

$$f(2) = x + 1 = 2 + 1 = 3$$

پس در نقطه ۲ پیوسته نیست

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 4 \\ x^2 - 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 4^+} x^2 - 1 = (4)^2 - 1 = 15$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 4^-} x + 1 = (4) + 1 = 5$$

$$\neq$$

$$f(4) = x^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

در نقطه ٤ پیوسته نیست

پیوستگی راست = اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ و $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

گوییم تابع در $x=a$ پیوستگی راست است (از راست پیوسته است) دارد.

مثال: k را طوری تعیین کنید که پیوستگی داشته باشد (در نقطه ۳)

$$f(x) = \begin{cases} x+k & x<3 \\ kx-2 & x\geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^+} kx-2 = k3-2 = 3k-2$$

$$\lim_{x\to 3^-} x+k = 3+k$$

$$3k-2 = 3+k \longrightarrow 3k-k = 3+2 \longrightarrow 2k=5 \longrightarrow k=\frac{5}{2}$$

مثال: A و B را طوری تعیین کنید که در ۲ دارای پیوستگی باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+A & x<-2 \\ x^2+B & -2\leq x\leq 2 \\ x+1 & x>2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+} x+1 = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} x^2+B = 4+B$$

$$\to 4+B = 3 \to B = -1$$

$$f(2) = 4+B$$

$$\lim_{x\to -2^-} (x^2+B) = (-2)^2 + B = 4+B$$

$$\lim_{x\to -2^+} 2x+A = (2\times -2)+A = -4+A$$

$$4+B = -4+A$$

$$A = 7$$

$$f(-2) = (-2)^2+B = 4+B$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+2bx & x>2 \\ 2ax-3b & x\le 2 \end{cases}$$

حد چپ $= 3$

حد راست $= 5$

$$\lim_{x \to 2^+} ax^2 + 2bx = 4a + 4b = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} (2ax - 3b) = 4a - 3b = 4$$

$$f(2) = 4a - 3b$$

$$\begin{cases} 4a + 4b = 5 \\ 4a - 3b = 4 \\ \hline 7b = 1 \longrightarrow b = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$a = \frac{27}{28}$$

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x+1} + x & x \leq -1 \\ 2x - 3x^4 & -1 < x \leq 0 \\ 2^{x+2} - b & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{x+2} - b = 2^{0+2} - b = 4 - b$$

$$\lim_{x \to 0^-} 2x - 3x^3 = 2(0) - 3(0) = 0$$

$$\longrightarrow 4 - b = 0 \longrightarrow$$

$$-b = 4 \longrightarrow$$

$$b = -4$$

$$\lim_{x \to -۱^+} ۲x - ۳x^۲ = (۲)\cancel{(-۱)}^{-۲} - ۳\cancel{(-۱)^۲}^{+۳} = ۱$$

$$\lim_{x \to -۱^-} a \circ e^{x+۱} + x = a \circ e^{(-۱ + ۱)} + (-۱) \Rightarrow a - ۱$$

$$a - ۱ = ۱ \longrightarrow \boxed{a = ۲}$$

(۲) $f(x) = \begin{cases} x[x] + a & x > ۲ \\ |x - ۲| + b & x < ۲ \\ ۳ & x = ۲ \end{cases}$

$$\lim_{x \to ۲^+} x[x] + a = ۲[۲] + a = ۴ + a$$

$$\lim_{x \to ۲^-} |x - ۲| + b = |۲ - ۲| + b = b$$

$b = ۴ + a \rightarrow$

$$f(۲) = ۳ \longrightarrow \begin{cases} ۴ + a = ۳ \longrightarrow a = ۳ - ۴ = \boxed{-۱} \\ \boxed{۳ = b} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{۳\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x>۰ \\ ۲+a & x=۰ \\ [x]+b & x<۰ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۳\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} = \lim \frac{۳\sqrt{۲}x}{\sqrt{۱/۲(۲x)^۲}} = \lim \frac{۳\sqrt{۲}x}{\sqrt{۱/۲\,۴x^۲}} = ۳$$

$$\lim_{x\to ۰^-} [x]+b = [-۰/۱]+b = b-۱ \longrightarrow b=۴$$

$a=۱$

$f(۲)=۲+a$

$$① \quad f(x)=\begin{cases} x[x]+a & x>۱ \\ ۲ & x=۱ \\ |x-۱| & x<۱ \end{cases}$$

$(۱,۱)$

$$\lim_{x\to ۱^+} x[x]+a = ۱\times ۱+a = ۱a \longrightarrow a=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^-} |x-۱| = -(x-۱) = -x+۱ = ۴$$

$$\boxed{f(۱)=۲}$$

۴) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{۶b-\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{x^۳-۸} & x>۲ \\ ۲[x]+a & x<۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

۴) $$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۶b\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{x^۳-۸} = \frac{۶b\sqrt{۴-۸+۴}}{۸-۸} = ۶b-\frac{۰}{۰} = ۶b$$

$$\lim_{x\to ۲^-} ۲[x]+a = ۲[۱٫۹]+a = ۲a$$

$$f(۲)=۳$$

$$\longrightarrow ۳=۲a \longrightarrow \boxed{a=۳/۲}$$

$$۶b=۳ \longrightarrow b=\frac{۳}{۶}=\boxed{\frac{۱}{۲}}$$

$f(x)=\sin u \longrightarrow f'(x)=u'\cdot\cos x$

$f(x)=\sin(5x+3) \longrightarrow f'(x)=5\cos(5x+3)$

$f(x)=\sin(6x^2-7x) \longrightarrow f'(x)=12x-7\cdot\cos(6x^2-7x)$

$f(x)=\cos u \longrightarrow f'(x)=-u'\sin u$

$f(x)=\cos(3x^3-2x) \longrightarrow f'(x)=-(9x^2-2)\sin(3x^3-2x)$

$f(x)=\cos(7x+4) \longrightarrow f'(x)=-7\sin(7x+4)$

$f(x)=\cos x \longrightarrow f'(x)=-1\cdot\sin x$

$f(x)=tg\,u \longrightarrow f'(x)=u'\cdot(1+tg^2 u)$

$f(x)=tg(4x-2) \longrightarrow f'(x)=4(1+tg^2(4x-2))$

$f(x)=tg(3x^2-x) \longrightarrow f'(x)=6x-1(1+tg^2(3x^2-x))$

$f(x)=\cot u \longrightarrow f'(x)=-u'(1+cotg^2 u)$

$f(x)=\cot g(5x^2-9x) \longrightarrow f'(x)=-10x-9(1+\cot^2(5x^2-9x))$

$f(x)=\sec u \longrightarrow f'(x)=u'\cdot\sec u\, tg\, u$

$f(x)=\sec(2x^2-5x) \longrightarrow f'(x)=(4x-5)\sec(2x^2-5)\, tg(2x^2-$

$f(x)=\csc u \longrightarrow f'(x)=-u'\cdot\csc u\cdot cotg\, u$

$f(x)=\csc(2x^5+3x) \longrightarrow f'(x)=-(10x^4+3)\cdot\csc(2x^5+3x)\, cotg(2$

$f(x)=\sin^{-1}u \longrightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f(x)=\sin^{-1}(5x^2+3) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{10x}{\sqrt{1-(5x^2+3)^2}}$

$f(x)=Arc\cos u=\cos^{-1}u \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$f(x)=\cos^{-1}(4x^3+x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-(12x+1)}{\sqrt{1-(4x^3+x)^2}}$

$f(x)=tg^{-1}u \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{1+u^2}$

$f(x)=Arc\,tg\, x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$f(x) = \cot^{-1} u \longrightarrow f'(x) = \frac{-u'}{1+u^۲}$$

$$f(x) = \cot^{-1}(۴x^۲ - ۸x) \longrightarrow f'(x) = \frac{-(۸x - ۸)}{۱ + (۴x^۲ - ۸x)^۲}$$

$$f(x) = e^{u} \longrightarrow f'(x) = u' \cdot e^{u}$$

$$f(x) = e^{(۵x - ۲x)} \longrightarrow f'(x) = \cancel{۵ - ۲} = ۳ \cdot e^{(۵x - ۲x)}$$

$$f(x) = a^{u} \longrightarrow f'(x) = u' \cdot a^{u} \cdot \ln a$$

$$f(x) = ۳^{(۷x^۳ - ۹x^۲)} = (۲۱x^۲ - ۱۸x) \cdot ۳^{(۷x^۳ - ۹x^۲)} \cdot \ln ۳$$

$$f(x) = \ln u \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$f(x) = \ln(۸x^۳ - ۴x) = \frac{۲۴x^۲ - ۴}{۸x^۳ - ۴x}$$

$$f(x) = \ln(۵x + ۲) = \frac{۵}{۵x + ۲}$$

$$f(x) = \log_{a}^{u} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

$$f(x) = \log_{۴}(۵x^۲ - ۶x) = \frac{۱۰x - ۶}{(۵x^۲ - ۶x) \cdot \ln ۴}$$

$$f(x)=|u| \longrightarrow f'(x)=\frac{u'.u}{|u|}$$

$$f(x)=|۴x^۳+۶x| \longrightarrow f'(x)=\frac{(۱۲x^۲+۶)(۴x^۳+۶x)}{|۴x^۳+۶x|}$$

$$f(x)=\sqrt[m]{u^n} \longrightarrow f'(x)=\frac{n.u'}{m.\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$f(x)=\sqrt[۵]{(۴x^۳+۲x)^۳} \longrightarrow f'(x)=\frac{۳(۱۲x^۲+۲)}{۵\sqrt[۵]{(۴x+۲x)^۲}}$$

$$f(x)=u^{n/m} \longrightarrow f'(x)=\frac{n}{m}.u^{\frac{n}{m}-۱}.u'$$

$$f(x)=(۴x^۳+۲x)^{۳/۵} \longrightarrow f'(x)=۳/۵\,(۴x^۳+۲x)^{\frac{۳}{۵}-۱}(۱۲x^۲+۲)$$

$$f(x)=\sqrt[۴]{(۳x^۳+۶x^۲)^۱} \longrightarrow f'(x)=\frac{۱.(۹x^۲+۱۲x)}{۴\sqrt[۴]{(۳x^۳+۶x^۲)^۳}}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow f'(x)=\boxed{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}\ *$$

$$f(x)=\frac{۱}{x} \longrightarrow f'(x)=\frac{(۰\times x)-(۱\times۱)}{x^۲}=\boxed{\frac{-۱}{x^۲}}\ *$$

$$f(x) = \underbrace{\left(5x^3 - 4x^{-2} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)}_{u}\underbrace{\left(\sin x + tg\,x\right)}_{v} \longrightarrow$$

$$f'(x) = \left(15x^2 + 8x^{-3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)\left(\sin x + tg\,x\right) + \left(\cos x + 1 + tg^2 x\right)\left(5x^3 - 4x^{-2} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)$$

$f'(x) = u'v + uv'$ *

مشتق توابع پارامتری = فرض کنید x و y توابعی از یک پارامتر باشند یعنی $x=f(t)$ و $y=g(t)$ آنگاه مشتق تابع پارامتری به صورت زیر است ⇐

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \longrightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

مثال ⇐

① $$\begin{cases} y = 3t^2 + \sin t \\ x = e^{(t^2+t)} \end{cases} \longrightarrow y'_x = \frac{6t + \cos t}{(2t+1)e^{t^2+t}}$$

② $$\begin{cases} x = \cos t + \sec t \\ y = \sqrt{t} + \frac{1}{t} \end{cases} \longrightarrow y'_x = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}}{-\sin t + \sec t\, tg\, t}$$

مشتق توابع ضمنی = فرض کنید y را تابع ضمنی از x باشد یعنی تابع با معادله ای مشخص شود که متغیر x و y به هم ربط دارند ولی معادله نسبت به y قابل حل نیست یعنی نتوانیم یک طرف تساوی y و طرف دوم آن تابعی بر حسب x به دست آورد مانند ←

$$y^3 - 4x^2y = 5xy^2 - 6x + 2$$

فرض کنید $F(x,y)=0$ یک تابع ضمنی باشد در این صورت

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

① $y^3 - 4x^2y - 5xy^2 + 6x - 2 = 0 \longrightarrow$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{0-(8xy)-(5y^2\times 1)+6-0}{3y^2-(4x^2\times 1)-(5x\times 2y)+0-0}$$

② $8xy - 5x^6y^3 - 4x^4 + 2y^2 - 6x - 5y + 3 = 0$

$$y' = \frac{F_x}{F_y} = \frac{(8y\cdot 1)-(5y^3\cdot 6x^5)-16x^3+0-6-0+0}{(8x\cdot 1)-(5x^6\cdot 3y^2)-0+4y-0-5+0}$$

③ $3x^5y^6 - 7x^2y + 9x^2 - 4y - 5 = 0$

$$y' = -\frac{(3y^6+5x^4)-(7y\times 2x)+18x-0-0}{(3x^5\cdot 6y^5)-(7x^2\times 1)+0-4-0}$$

$$y - \sin(2x+y^2) = 5 \longrightarrow y - \sin(2x+y^2) - 5 = 0$$

$$y' = \frac{0 - \cancel{(2x+y^2)'_x}^{\,2+0} \cos(2x+y^2) - 0}{1 - \cancel{(2x+y^2)'_y}^{\,0+2y} \cos(2x+y^2) - 0}$$

$$\cos(x^2y) - x^3y^5 + 8 = 0$$

$$y' = -\frac{-\cancel{(x^2y)'_x}^{\,2xy} - 3x^2 - 0 + 0 \times \sin(x^2y)}{-\cancel{(x^2y)'_y}^{\,x^2\times 1} \sin(x^2y) - 0 - 5y^4 + 0}$$

6) $x^3y^2 - y^5 + x^3 - 6 = \cos(2x + 3y) \longrightarrow$

$$x^3y^2 - y^5 + x^3 - 6 - \cos(2x+3y) \longrightarrow$$

$$y' = -\frac{3x^2y^2 - 0 + 3x^2 - 0 - \cancel{(2x+3y)'_x}^{\,2+0} \sin(2x+3y)}{x^2 2y - 5y^4 + 0 - 0 - \cancel{(2x+3y)'_y}^{\,0+3} \sin(2x+3y)}$$

$$4x^2y^3 - 2x^5 + 5y - 3 - \ln(x^2+y^3) = 0$$

$$y' = -\frac{8xy^3 - 10x^4 + 0 - 0 - \frac{\cancel{(x^2+y^3)'_x}^{\,2x+y^3}}{(x^2+y^3)}}{4x^2 3y^2 - 0 + 5 - 0 - \frac{\cancel{(x^2+y^3)'_y}^{\,x^2+3y^2}}{(x^2+y^3)}}$$

مشتق توابع هیپربولیک (هذلولی)

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{۲}$	$\cosh x$
$\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{۲}$	$\sinh x$
$tgh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$	$۱ - tg^{۲} h x$
$\coth x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{+x} - e^{-x}}$	$1 - \cot^{۲} h x$

$\sinh u \Rightarrow u' \cosh u$

$\cosh u \Rightarrow u' \sinh u$

$tgh u \Rightarrow u'(1 - tg^{۲} h u)$

$\cot g^{h} u \Rightarrow u'(1 - \cot g^{۲} h u)$

مثال →

$y = \sinh(۵x + ۳) \longrightarrow y' = ۵ \times \cosh(۵x + ۳)$

$y = \cosh(۴x) \longrightarrow y' = ۴ \times \sinh(۴x)$

$y = \coth(۴x^{۲} - ۶x) \rightarrow y' = (۸x - ۶)(1 - \coth^{۲}(۴x^{۲} - ۶x$

مثال: نشان دهید $y=\sin 2x$ در معادله $y'''+4y'=0$ صدق می‌کند.

$$y=\sin 2x \longrightarrow y'=2\cos 2x$$

$$y''=2(-2\sin 2x)=-4\sin 2x$$

$$y'''=-4(2\cos 2x)=-8\cos 2x$$

$$y'''+4y'=0$$

$$(-8\cos 2x)+4(2\cos 2x)=0 \longrightarrow -8\cos 2x+8\cos 2x=0$$

$$0=0$$

نشان دهید تابع $y=e^{3x}$ در معادله $y''-2y'-3y=0$ صدق می‌کند.

$$y'=3\cdot e^{3x}$$

$$y''=9e^{3x}$$

$$9e^{3x}-2(3e^{3x})-3(e^{3x})=0 \longrightarrow 9e^{3x}-6e^{3x}-3e^{3x}=0$$

$$0=0$$

* A و B را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در نقطه ۲ مشتق‌پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ Ax+B & x\geq 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۲^+} ۲A+B \\ \lim\limits_{x \to ۲^-} x^۲ = ۴ \\ f(۲) = ۲A+B \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{۲A+B=۴}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & x < ۲ \\ A+0 & x > ۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۲^+} A+0 \\ \lim\limits_{x \to ۲^-} ۲x = ۴ \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} A+0=۴ \longrightarrow \boxed{A=۴} \\ ۲(۴)+B=۴ \longrightarrow \boxed{B=-۴} \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \le ۱ \\ ax^۲+bx+c & x > ۱ \end{cases} \longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۱^+} ax+bx+c \\ \lim\limits_{x \to ۱^-} x^۳ = ۱ \\ f(۱) = x^۳ = ۱ \end{array}\right. \longrightarrow ax+bx+c=۱ \longrightarrow$$

$$a+b+c=۱$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲ & x<۱ \\ ۲ax+b+۰ & x>۱ \end{cases} \quad \begin{aligned} &\lim_{x\to ۱^+} ۲ax+b+۰=۲a+b \\ &\lim_{x\to ۱^-} ۳x^۲=۳ \end{aligned} \rightarrow$$

$$۲a+b=۳$$

$$f''(x)=\begin{cases} ۶x & x<۱ \\ ۲a+۰+۰ & x>۱ \end{cases} \quad \begin{aligned} &\lim_{x\to ۱^+} ۲a \\ &\lim_{x\to ۱^-} ۶x=۶ \end{aligned} \Rightarrow ۲a=۶ \rightarrow \frac{۶}{۲}=a \rightarrow \boxed{a=۳}$$

$$۲a+b=۳ \rightarrow ۶+b=۳ \rightarrow \boxed{b=۳-۶=-۳}$$

$$a+b+c=۱ \rightarrow \cancel{۳-۳}_{۰}+c=۱ \rightarrow \boxed{c=۱}$$

۳) $y=\begin{cases} Ax-B & x\le ۳ \\ ۲x^۲+۱ & x>۳ \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &\lim_{x\to ۳^+} ۲x^۲+۱=(۲)(۳)^۲+۱=۱۹ \\ &\lim_{x\to ۳^-} Ax-B=۳A-B \\ &f(۳)=Ax-B=۳A-B \end{aligned}$

$$\begin{cases} A & x\le ۳ \\ ۴x & x>۳ \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &\lim_{x\to ۳^+} ۴x=۱۲ \\ &\lim_{x\to ۳^-} A \end{aligned}$$

$$\boxed{A=۱۲}$$

$$۳A-B=۱۹$$

$$۳(۱۲)-B=۱۹ \Rightarrow \boxed{B=+۱۷}$$

۳۶

۲ دی میان ترم

Year. Month. Day. Note Book

کاربرد مشتق = تعریف max و min = برای پیدا کردن max و min یک تابع باید ابتدا از تابع مشتق گرفته و سپس مساوی صفر قرار دهیم و ریشه های آن را بدست آوریم * سپس جدول تغییرات را رسم کرده و اگر در جدول تغییرات در دو طرف ریشه مورد نظر جهت علامت عوض شده بود آنگاه مقدار تابع در max مقدار تابع است و یا گوییم تابع در این نقطه دارای max یا min است *

اگر تابع $f(x)$ در c دارای max یا min باشد گوییم تابع در c دارای اکسترموم است *

مثال = اکسترموم های توابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید *

$y = f(x) = x^2 - 6x + 7 \to y' = 2x - 6 \to$

$2x - 6 = 0 \to 2x = 6 \to x = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2 (min)	$\nearrow$	$+\infty$

$x^2 - 6x + 7 = 9 - 6(3) + 7 = -2$

(۲) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \longrightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \to$

۸ ۰ ۱۲ ۱۲

$y' = x(3x - 6) = 0 \longrightarrow x = 0$

$3x - 6 = 0 \longrightarrow 3x = 6 \to x = \frac{6}{3} = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		$+2$ (max)		-2 (min)		$+\infty$

x		$x=-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

x		x_1	
ax^2+bx+c	موافق علامت	0	موافق علامت

x	
ax^2+bx+c	همواره موافق علامت a

$f(x)=x^3-x^2-x \longrightarrow y'=f'(x)=3x^2-2x-1 \longrightarrow$

$3x^2-2x-1=0 \longrightarrow \Delta=b^2-4ac \longrightarrow 4-4(3)(-1)=16 \longrightarrow$ $\cancel{+12}$

$\Delta>0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه دارد}} x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+2\pm4}{6}= \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				-1		$+\infty$

max min

* نقطه بحرانی = هرگاه عدد c درون دامنه تعریف تابع $f(x)$ باشد و $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد آنگاه c را نقطه بحرانی تابع $f(x)$ گویند *

مثال = نقطه بحرانی تابع زیر را بدست آورید *

$y=f(x)=x^3-12x \longrightarrow y'=f'(x)=3x^2-12 \longrightarrow$

$3x^2-12=0 \longrightarrow 3x^2=12 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow \boxed{x=\pm 2}$ نقاط بحرانی

* قضیه ی هوپیتال = هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ بر بازه بسته ی $[a,b]$ پیوسته باشد و در فاصله ی باز (a,b) مشتق پذیر باشد و هم چنین $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

و اگر $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه ←

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \text{یا}\\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\ \text{یا}\\ x\to\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

① مثال → $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-1}=\dfrac{(-1)^3+3(-1)^2+2(-1)}{(-1)^2-1}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow[H]{\text{رفع ابهام}}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+6x+2}{2x}=\frac{3(-1)^2+6(-1)+2}{2(-1)}=\frac{-1}{-2}=+1/2$$

② $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2-3}{2x-1} = \dfrac{3(1)^2-3}{2(1)-1} = \dfrac{0}{1} = 0$

$3-3$, $2-1$

③ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-2x-1}{5x^2+3x} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-2}{10x+3} = \dfrac{3(-\infty)^2-2}{10(-\infty)+3}$

$= \dfrac{3(+\infty)-2}{10(-\infty)+3} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x-0}{10+0} = \dfrac{6x}{10} = \dfrac{6(-\infty)}{10} =$

$\boxed{-\infty}$

④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{tg\, 2x} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{H} y' = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\cos 3x}{2(1+tg^2 2x)} \longrightarrow$

$\dfrac{3\cos 3(0)}{2(1+tg^2 2(0))} \longrightarrow \dfrac{3\overset{(1)}{\cos 0}}{2(\underbrace{1+\cancel{tg^2 0}}_{(1+0)})} = \dfrac{3}{2}$ *

مثال ـ اکسترمم تابع $y=f(x)=x^a e^{-x}$ را بدست آورید .

الف) $a=3$

ب) $a=2$

الف) $y=f(x)=x^3\cdot e^{-x} \longrightarrow$ $\quad e^x=y\to \log_e^x$

$y'=f'(x)=3x^2e^{-x}+x^3\cdot e^{-x}\cdot 1 \longrightarrow$

$x^2e^{-x}(3-x)=0 \longrightarrow x^2=0 \longrightarrow x=0$

$\qquad\qquad \longrightarrow e^{-x}=0 \longrightarrow \frac{1}{e^x}\neq 0$

$\qquad\qquad \longrightarrow 3-x=0 \longrightarrow x=3$

x		0		3	
x^2	+	0	+		+
e^{-x}	+		+		+
$3-x$	+		+	0	−
y'	+		+		−

max

ب) $y=f(x)=x^2\cdot e^{-x} \longrightarrow y'=f'(x)=2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot(-1)\cdot e^{-x} \longrightarrow$

$f'(x)=2x\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x} \longrightarrow$

$xe^{-x}(2-x) \longrightarrow \boxed{x=0}$

$\qquad \longrightarrow e^{-x}=0 \longrightarrow \frac{1}{e^x}\neq 0$

$\qquad \longrightarrow 2-x=0 \longrightarrow -x=-2 \longrightarrow \underline{x=+2}$

x	$-\infty$	0		$+2$		$+\infty$
x	−	0	+		+	
e^{-x}	+		+		+	
$2-x$	+		+	0	−	
y'	−		+		−	
	↘ ① ↗			↗ ② ↘		

① = min
② = max