ردیف	سؤال	بارم
۱	حاصل حد زیر را بدست آورید. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2\sqrt{4n^2-k^2}}$$	۲
۲	با استفاده از روشهای انتگرال‌گیری، مساحت رویه حاصل از دوران بیضی $x^2+4y^2=4$ ، حول محور x را بیابید.	۲
۳	حاصل انتگرال نامعین زیر را بدست آورید. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2a}+x^{a}+1}} \quad ; \quad x>0\ ;\ a>0$$	۲
۴	الف: تابع مشتق‌پذیر $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ بگونه‌ای است که $f(0)=0$ و در شرط زیر نیز صدق می‌نماید. تمام جوابهای ممکن تابع f را بیابید. $$\forall\ x\in(0,1)\ :\ 0\le f'(x)\le 2f(x)$$ (راهنمایی: از تابع $g(x)=e^{-2x}f(x)$ استفاده کنید)	۱
	ب: فرض کنید تابع f بر بازه $[1,2]$ پیوسته و بر بازه $(1,2)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(1)=1$ و $f(2)=2$ باشد ، نشان دهید که نقطه‌ای مانند $x_0\in(1,2)$ وجود دارد بطوریکه مماس بر نمودار تابع f در این نقطه، از مبدا مختصات عبور می‌کند. (راهنمایی: از تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ استفاده کنید).	۱

با آرزوی موفقیت

جواب سؤالات میان ترم ریاضی عمومی ۱

۱-

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2\sqrt{4n^2-k^2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\frac{k}{n})^2}{n\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\frac{k}{n})^2}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}}$$

$$x_k=\frac{k}{n}\longrightarrow f(x_k)=\frac{x_k^2}{\sqrt{4-x_k^2}}$$

$\Rightarrow$ جواب حد $=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad \begin{cases} x=2\sin\theta \\ dx=2\cos\theta\, d\theta \end{cases}$

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\cos\theta$$

$$x=0\to\theta=0 \quad \text{و} \quad x=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

جواب $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\sin^2\theta\times\cancel{2\cos\theta}\,d\theta}{\cancel{2\cos\theta}}$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta \, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

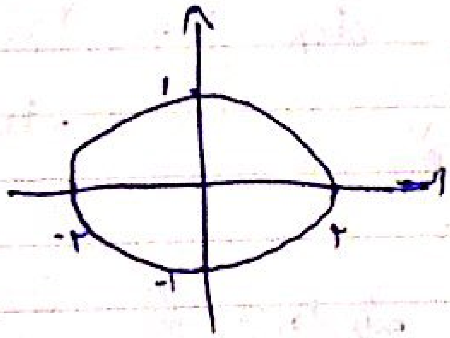
$$= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲-

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک بیضی افقی است و شکل آن به صورت زیر می‌باشد



با توجه به تقارن شکل نسبت به محورها، واضح است که کافی است مساحت حاصل از دوران نیمه‌ی بالایی بیضی نسبت به محور xها را حساب کنیم و بنابراین پاسخ را در ۲ ضرب کنیم.

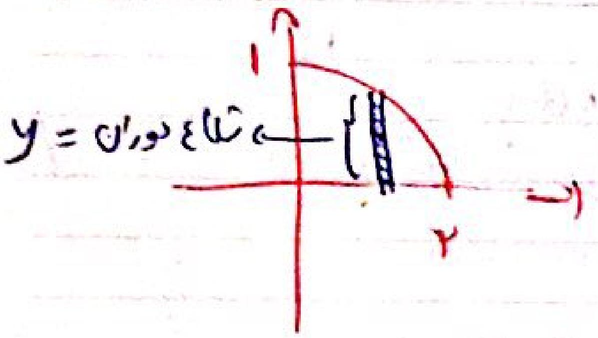
از طرفی با توجه به تقارن شکل نسبت به محور (y ها) کافی است مساحت حاصل

از دوران بیضی در ربع اول را حساب کرده و سپس جواب به دست آمده را

در ۲ ضرب کنیم. از طرفی می دانیم:

$$S = 2\pi \int (\text{شعاع دوران}) \times ds \quad , \quad \begin{cases} ds = \sqrt{1+f'^2_{(x)}}\,dx \\ ds = \sqrt{1+f'^2_{(y)}}\,dy \\ ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} \end{cases}$$

روش اول:



$$x^2+4y^2=4 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{1-y^2} \xrightarrow[x\ \text{مثبت}]{\text{ربع اول}} x = 2\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1+\frac{4y^2}{1-y^2}$$

$$= \frac{1-y^2+4y^2}{1-y^2} = \frac{1+3y^2}{1-y^2} \Rightarrow ds = \frac{\sqrt{1+3y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$\text{مساحت} = 2\times 2\pi \int_0^1 y\,ds = 4\pi \int_0^1 \frac{y\sqrt{1+3y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$u^2 = 1-y^2 \Rightarrow u\,du = -y\,dy \Rightarrow y\,dy = -u\,du$$

$$y=0 \to u=1 \quad , \quad y=1 \to u=0$$

$$y^2 = 1-u^2 \Rightarrow 1+3y^2 = 1+3-3u^2 = 4-3u^2$$

$$\text{جواب} = -4\pi \int_1^0 \frac{\sqrt{4-3u^2}\times u\,du}{u} = 4\pi\int_0^1 \sqrt{4-3u^2}\,du$$

$$\sqrt{3}\,u = 2\sin\theta \Rightarrow \sqrt{3}\,du = 2\cos\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{4-3u^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\cos\theta$$

$$u=0 \Rightarrow \theta=0 \quad , \quad u=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

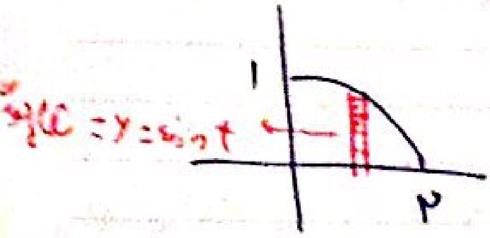
$$\text{جواب} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos\theta \times 2\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}} + 2$$

روش دوم: مساحت بیضی در ربع اول را با صورت پارامتری می‌نویسیم:



$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\text{مساحت} = 2 \times 2\pi \int (\text{شعاع دوران})\, ds = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, ds$$

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + 3\sin^2 t}$$

$$\text{مساحت} = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{1+3\sin^2 t}\, dt \xrightarrow{\sin^2 t = 1-\cos^2 t}$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{4-3\cos^2 t}\, dt$$

$$u = \cos t \to du = -\sin t\, dt \Rightarrow \sin t\, dt = -du$$

$$t=0 \to u=1 \quad , \quad t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$$

$$\text{جواب} = -4\pi \int_1^0 \sqrt{4-3u^2}\, du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{4-3u^2}\, du$$

که جواب این انتگرال مانند روش اول بدست می‌آید و جواب

کلی آن برابر است با $\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}} + 2$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2\alpha}+x^{\alpha}+1}} \times \frac{x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} = \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{x^{\alpha}\times x^{\alpha}\sqrt{1+\frac{1}{x^{\alpha}}+\frac{1}{x^{2\alpha}}}}$$

$$x^{\alpha} = \frac{1}{t} \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1}dx = -\frac{1}{t^2}dt$$

$$\Rightarrow x^{\alpha-1}dx = -\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{t^2}dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int \frac{\frac{1}{t^2}dt\times t^2}{\sqrt{1+t+t^2}} = -\frac{1}{\alpha}\int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}$$

$$x = \sinh^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Leftarrow \quad t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh x \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh x\,dx$$

جواب $= -\frac{1}{\alpha}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh x}{\sqrt{\frac{3}{4}\sinh^2 x+\frac{3}{4}}}dx = -\frac{1}{\alpha}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh x\,dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh x}$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int dx = -\frac{1}{\alpha}x + C = -\frac{1}{\alpha}\sinh^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\sinh^{-1}\left(\frac{2x^{-\alpha}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

۴_ الف)

$f:[0,1]\to \mathbb{R}$

$f(0)=0$

$\forall x\in(0,1)\quad 0\le f'(x)\le 2f(x)$

چون $0\le f'(x)$ پس f تابعی صعودی است پس:

① $x>0 \xRightarrow{f \text{ صعودی}} f(x)\ge f(0)=0 \Rightarrow f(x)\ge 0$

حال تابع $g(x)=e^{-2x}f(x)$ را در نظر می‌گیریم:

$$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)$$

$$=e^{-2x}\big(\underbrace{f'(x)-2f(x)}_{\le 0 \text{ طبق فرض}}\big)\le 0$$

پس $g(x)$ تابعی نزولی است. بنابراین:

$$x>0 \xRightarrow{g \text{ نزولی}} g(x)\le g(0)=e^{0}f(0)=0$$

$$\Rightarrow g(x)\le 0 \Rightarrow e^{-2x}f(x)\le 0$$

صفحه (۱۲)

$\Rightarrow f(x) \geq 0$ (۲)

از نامساوی های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$\boxed{f(x) = 0}$

۴- ب) f بر $[1,2]$ پیوسته و بر $(1,2)$ مشتق پذیر است.

و $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$.

حال تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ را در نظر می‌گیریم. چون $f(x)$ و x

هر دو در بازه ی $[1,2]$ پیوسته و در بازه ی $(1,2)$ مشتق پذیرند پس

تقسیم آن‌ها نیز بر $[1,2]$ پیوسته و بر $(1,2)$ مشتق پذیر است.

(چون مخرج x در این بازه صفر نمی‌شود). از طرفی

$g(1) = \frac{f(1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

پس هر ۳ شرط قضیه ی رل برای تابع g در بازه ی [۱,۲]
برقرار است. پس طبق قضیه ی رل

$\exists\, c \in (1,2) \Rightarrow g'(c) = 0$

(*)

$$g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0 \Rightarrow \boxed{cf'(c) = f(c)}$$

حال معادله ی خط مماس بر تابع f در نقطه ی $(c, f(c))$ را می نویسیم:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

واضح است که معادله ی خط مماس بر f در نقطه ی c از مبدا می گذرد
زیرا نقطه ی $(0,0)$ در این معادله صدق می کند.

طبق رابطه ی *

$$0 - f(c) = f'(c)(0 - c)$$

$$f(c) = cf'(c)$$