مثال صفحه ۴: ثابت کنید عضو صفر از $\mathbb{R}$ منحصر به فرد است.

پاسخ: فرض کنیم O_1 و O_2 عضو صفر یعنی عضو خنثی عمل جمع باشد. در این صورت:

$$\begin{aligned} O_1 &= O_1 + O_2 && (\text{همانی بودن } O_2) \\ &= O_2 + O_1 && \text{جابه‌جایی} \\ &= O_2 && (\text{همانی بودن } O_1) \end{aligned}$$

مثال صفحه ۴: ثابت کنید عضو قرینه هر عدد حقیقی منحصر به فرد است.

پاسخ: فرض کنیم x عددی دلخواه و y_1 و y_2 قرینه‌ی آن باشد. در این صورت:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_2 + 0 && (\text{خاصیت عضو همانی}) \\ &= y_2 + (x + y_1) && (\text{خاصیت عضو قرینه}) \\ &= (y_2 + x) + y_1 && (\text{خاصیت شرکت‌پذیری}) \\ &= 0 + y_1 && (\text{خاصیت عضو قرینه}) \\ &= y_1 && (\text{خاصیت عضو همانی}) \end{aligned}$$

تمرین در کلاس صفحه ۵:

۱- ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x، $-(-x) = x$

پاسخ: بنا به تعریف عضو قرینه برای $(-x)$، $(-x) + [-(-x)] = [-(-x)] + (-x) = 0$. همچنین $x + (-x) = (-x) + x = 0$. حال با توجه به منحصر به فرد بودن عضو قرینه (مثال بالا) نتیجه می‌شود $-(-x) = x$.

۲- برای هر سه عدد حقیقی x و y و z اگر $x + z = y + z$ آن‌گاه $x = y$ (قانون حذف).

پاسخ:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 && \text{عضو خنثی} \\ &= x + (y - y) && \text{عضو قرینه} \\ &= (x + y) + (-y) && \text{شرکت‌پذیری} \\ &= (y + z) + (-y) && \text{طبق فرض} \\ &= (z + y) + (-y) && \text{جابه‌جایی} \\ &= z + (y - y) && \text{شرکت‌پذیری} \\ &= z + 0 && \text{عضو قرینه} \\ &= z && \text{عضو خنثی} \end{aligned}$$

مثال صفحه ۶: وارون هر عدد حقیقی (غیرصفر) منحصر به فرد است.

پاسخ: فرض کنیم y_1 و y_2 هر دو وارون x باشند، بنابراین: $xy_1 = 1$ و $xy_2 = 1$.

$$y_1 = y_1 \times 1 = y_1(xy_2) = (y_1x)y_2 = (xy_1)y_2 = 1 \times y_2 = y_2$$

مثال صفحه ۶: وارون وارون x برابر x است، به زبان نِمادی $x = (x^{-1})^{-1}$.

پاسخ: فرض کنیم y وارون x^{-1} باشد. پس $y = (x^{-1})^{-1}$ و $(x^{-1})y = 1$. از طرفی $(x^{-1})x = 1$. پس بنا به منحصر به فرد بودن عضو وارون (مثال قبلی) $x = y = (x^{-1})^{-1}$ می‌باشد.

تمرین در کلاس صفحه ۷:

۱- ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی x و y و z، $x(y - z) = xy - xz$

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم $x(y - z) + xz = xy$.

$$x(y-z)+xz=x[(y-z)+z]=x[(y+(-z))+z]=x[y+((-z)+z)]=x[y+0]=xy \Rightarrow x(y-z)+xz+(-xz)=xy+(-xz)$$
$$\Rightarrow x(y-z)=xy-xz$$

۲- ثابت کنید هرگاه $xy=0$ آن‌گاه $x=0$ یا $y=0$ و عکس این حکم برقرار است.

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم اگر $x=0$ یا $y=0$، آن‌گاه $xy=0$:

$$x=0 \Rightarrow xy=0\times y=(0+0)y=0\times y+0\times y \xrightarrow{\text{با توجه به تعریف عضو خنثی}} 0\times y=0 \Rightarrow xy=0$$
$$y=0 \Rightarrow xy=x\times 0=x(0+0)=x\times 0+x\times 0 \Rightarrow x\times 0=0 \Rightarrow xy=0$$

برعکس، نشان می‌دهیم اگر $xy=0$، آن‌گاه $x=0$ یا $y=0$. اگر $x=0$ باشد طبق مطالب بالا، حکم ثابت است، پس فرض می‌کنیم $x\neq 0$. بنابراین x^{-1} موجود است و داریم:

$$xy=0 \Rightarrow x^{-1}(xy)=x^{-1}\times 0 \Rightarrow (x^{-1}x)y=0 \Rightarrow y=0$$

۳- برای هر دو عدد حقیقی x و y :

الف) $x(-y)=(-x)y=-(xy)$

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} x(-y)+xy=x(-y+y)=x\times 0=0 \Rightarrow x(-y)=-(xy) \\ (-x)y+xy=y(-x)+yx=y(-x+x)=y\times 0=0 \Rightarrow (-x)y=-(xy)\end{array}\right\} \Rightarrow x(-y)=(-x)y=-(xy)$$

ب) $(-x)(-y)=xy$

پاسخ:

$$(-x)(-y)\xlongequal{\text{بنا به قسمت الف}}-[x(-y)]\xlongequal{\text{قسمت الف}}-[-(xy)]=xy$$

قضیه (اَعمال با قدرمطلق): هرگاه a و b اعداد حقیقی بوده و n عدد صحیح مثبتی باشد، آن‌گاه خواص زیر برقرار می‌باشند:

۱) $|a.b|=|a||b|$ ۲) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, b\neq 0$ ۳) $|a^n|=|a|^n$

پاسخ: با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف علامت a و b، روابط ۱ و ۲ ثابت می‌شود. در این‌جا مورد (۱) را ثابت می‌کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} a\geq 0, b\geq 0 \Rightarrow ab\geq 0 \Rightarrow |ab|=ab=|a|.|b| \\ a\geq 0, b\leq 0 \Rightarrow ab\leq 0 \Rightarrow |ab|=-ab=a(-b)=|a||b| \\ a\leq 0, b\geq 0 \Rightarrow ab\leq 0 \Rightarrow |ab|=-ab=(-a)b=|a||b| \\ a\leq 0, b\leq 0 \Rightarrow ab\geq 0 \Rightarrow |ab|=ab=(-a)(-b)=|a|.|b| \end{array}\right. \xrightarrow{\text{در همه حالات}} |a.b|=|a|.|b|$$

مورد (۲) نیز به طور مشابه اثبات می‌شود. برای اثبات مورد (۳) از استقرا استفاده می‌کنیم:

$n=1 : |a^1|=|a|^1$ ✓

فرض : $n=k : |a^k|=|a|^k$ ✓

حکم : $n=k+1 : |a^{k+1}|=|a|^k$

$$|a^{k+1}|=|a^k.a^1|\xlongequal{\text{طبق (۱)}}|a^k|.|a|\xlongequal{\text{طبق فرض استقرا}}|a|^k.|a|=|a|^{k+1} \checkmark$$

قضیه (نامساوی‌ها و قدرمطلق): هرگاه a و b اعداد حقیقی بوده و k مثبت باشد، خواص زیر برقرار می‌باشند:

۱) $-|a|\leq a\leq |a|$ ۲) $|a|\leq k$ اگر و فقط اگر $-k\leq a\leq k$

۳) $|a|\geq k$ اگر و فقط اگر $a\geq k$ یا $a\leq -k$ ۴) نامساوی مثلثی: $|a+b|\leq |a|+|b|$

خواص ۲ و ۳ در صورت تعویض ≤ با < نیز درست‌اند. این احکام را برحسب < بنویسید.

پاسخ:

اثبات (۱):

$$\left\{\begin{array}{l} a\geq 0 \Rightarrow |a|=a \Rightarrow a\leq |a| \xrightarrow[a\geq 0]{-|a|<0} -|a|\leq a\leq |a| \\ a<0 \Rightarrow |a|=-a \Rightarrow -|a|=a \Rightarrow -|a|\leq a \xrightarrow[a<0]{|a|>0} -|a|\leq a\leq |a| \end{array}\right. \xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} -|a|\leq a\leq |a|$$

اثبات (۲):

اگر $|a| \le k \;\Rightarrow\; -k \le -|a| \le a \le |a| \le k \;\;\Rightarrow\; -k < a < k$

برعکس : اگر $-k \le a \le k \;\Rightarrow\; \begin{cases} a > 0 \;\Rightarrow\; |a| = a \;\Rightarrow\; -k \le |a| \le k \\ a < 0 \;\Rightarrow\; |a| = -a \;\xrightarrow[k \ge -a]{-k \le a}\; k \ge |a| \end{cases} \xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} |a| \le k$

اثبات (۳): ابتدا فرض می‌کنیم $|a| \ge k$ در این صورت:

اگر $a \ge 0 \;\Rightarrow\; |a| = a \;\Rightarrow\; a \ge k$

اگر $a < 0 \;\Rightarrow\; |a| = -a \;\Rightarrow\; -a \ge k \;\Rightarrow\; a \le -k$

$\Rightarrow\; a \ge k$ یا $a \le -k$

برعکس: اگر $a \le -k$ یا $a \ge k$ در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l} a \ge k \xrightarrow{k>0} a > 0 \;,\; |a| = a \;\Rightarrow\; |a| \ge k \\ a \le -k \xrightarrow{k>0} a < 0 \;,\; |a| = -a \;\Rightarrow\; -a \ge k \;\Rightarrow\; |a| \ge k \end{array}\right. \xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} |a| \ge k$$

اثبات (۴): با استفاده از (۱) داریم:

$$\begin{cases} -|a| \le a \le |a| \\ -|b| \le b \le |b| \end{cases} \Rightarrow -(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b| \xrightarrow{\text{بنا بر (۲)}} |a+b| \le \big||a| + |b|\big| \xrightarrow{|a|+|b| \ge 0} |a+b| \le |a| + |b|$$

بیان احکام را برحسب >:

$|a| < k$ اگر و فقط اگر $-k < a < k$

$|a| > k$ اگر و فقط اگر $a > k$ یا $a < -k$

مثال صفحه ۱۶: نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b ، $|a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|$

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} \text{بنا بر نامساوی مثلثی : } |a| = |a - b + b| \le |a - b| + |b| \;\Rightarrow\; |a| - |b| \le |a - b| \\ \text{از طرف دیگر : } |a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |-b| = |a| + |b| \end{array}\right\} \Rightarrow |a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|$$

تمرین در کلاس صفحه ۱۶: نامساوی مثلثی را برای سه عدد a_1، a_2 و a_3 بیان و اثبات کنید. آیا صورت کلی‌تری (برای n عدد) از این نامساوی می‌توانید بیان کنید؟

پاسخ: نامساوی مثلثی برای سه عدد a_1 و a_2 و a_3:

$$|a_1 + a_2 + a_3| \le |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

اثبات: با توجه به نامساوی مثلثی برای دو عدد داریم:

$$|a_1 + a_2 + a_3| = |(a_1 + a_2) + a_3| \le |a_1 + a_2| + |a_3| \le |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

در حالت کلی برای n عدد $a_1, a_2, \dots, a_n$ داریم:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

مسائل صفحه ۱۶:

۱- نامعادله $-\frac{2}{x} < \frac{5}{x-1}$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را روی خط حقیقی نشان دهید.

پاسخ:

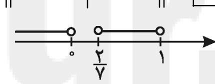
$$\frac{5}{x-1} < -\frac{2}{x} \;\Rightarrow\; \frac{5}{x-1} + \frac{2}{x} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{5x + 2(x-1)}{x(x-1)} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{7x-2}{x(x-1)} < 0$$

$$\begin{cases} 7x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{7} \\ x(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, x = 1 \\ \text{علامت جمله‌ی پرتوان : } \frac{+7x}{+x^2} = \frac{\boxed{+}7}{x} \quad x \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{7}$		1	
$\frac{7x-2}{x(x-1)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$\boxed{+}$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{7}, 1)$

مجموعه جواب:



۲- جواب نامعادله‌های زیر را به صورت بازه و یا اجتماعی از بازه‌ها پیدا کنید.

پاسخ:

الف) $\mathbf{3x+5\le 8} \Rightarrow 3x\le 3 \Rightarrow x\le 1 \Rightarrow x\in(-\infty,1]$

ب) $\mathbf{5x-3\le 7-3x} \Rightarrow 5x+3x\le 7+3 \Rightarrow 8x\le 10 \Rightarrow x\le\frac{5}{4} \Rightarrow x\in(-\infty,\frac{5}{4}]$

ج) $\mathbf{x^2<9} \Rightarrow |x|<3 \Rightarrow -3<x<3 \Rightarrow x\in(-3,3)$

د) $\mathbf{\frac{1}{2-x}<3} \Rightarrow \frac{1}{2-x}-3<0 \Rightarrow \frac{1-3(2-x)}{2-x}<0 \Rightarrow \frac{1-6+3x}{2-x}<0 \Rightarrow \frac{3x-5}{2-x}<0 \Rightarrow x<\frac{5}{3}$ یا $x>2$

$\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{5}{3})\cup(2,+\infty)$

۳- هر یک از نامساوی‌های زیر یک بازه را مشخص می‌سازد. این بازه را بنویسید.

الف) $\mathbf{|x-2|\le 2}$

پاسخ: $\Rightarrow -2\le x-2\le 2 \Rightarrow 0\le x\le 4 \Rightarrow x\in[0,4]$

ب) $\mathbf{|2x+5|<1}$

پاسخ: $\Rightarrow -1<2x+5<1 \Rightarrow -6<2x<-4 \Rightarrow -3<x<-2 \Rightarrow x\in(-3,-2)$

پ) $\mathbf{\left|2-\frac{x}{2}\right|<\frac{1}{2}}$

پاسخ: $\Rightarrow -\frac{1}{2}<2-\frac{x}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2}<-\frac{x}{2}<-\frac{3}{2} \Rightarrow 3<x<5 \Rightarrow x\in(3,5)$

ت) $\mathbf{|3x-7|<2}$

پاسخ: $\Rightarrow -2<3x-7<2 \Rightarrow 5<3x<9 \Rightarrow \frac{5}{3}<x<3 \Rightarrow x\in(\frac{5}{3},3)$

ث) $\mathbf{|2x+5|<1}$

پاسخ: $\Rightarrow -1<2x+5<1 \Rightarrow -6<2x<-4 \Rightarrow -3<x<-2 \Rightarrow x\in(-3,-2)$

۴- جواب‌هایی از نابرابری $\mathbf{|x^2-4|<1}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $\mathbf{(2-\frac{1}{10},2+\frac{1}{10})}$ قرار داشته باشند.

پاسخ:

$|x^2-4|<1 \Rightarrow -1<x^2-4<1 \Rightarrow 3<x^2<5 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ یا $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$

حال از آن‌جا که می‌خواهیم جواب‌ها در بازه‌ی $(1/9,2/1)$ باشد، پس $-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ قابل قبول نیست.

$\sqrt{3}<x<\sqrt{5} \xrightarrow[1/9<x<2/1]{\text{اشتراک با شرط}} 1/9<x<2/1$

۵- جواب‌هایی از نابرابری $\mathbf{|9-x^2|<\frac{1}{1000}}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $\mathbf{(2,4)}$ قرار داشته باشند.

پاسخ:

$|x^2-9|<\frac{1}{1000} \Rightarrow -\frac{1}{1000}<x^2-9<\frac{1}{1000} \Rightarrow 8/999<x^2<9/001 \Rightarrow -\sqrt{9/001}<x<-\sqrt{8/999}$ یا $\sqrt{8/999}<x<\sqrt{9/001}$

حال با توجه به این که $2<x<4$ است، پس $-\sqrt{9/001}<x<-\sqrt{8/999}$ قابل قبول نیست. هم‌چنین اشتراک دو شرط $2<x<4$ و $\sqrt{8/999}<x<\sqrt{9/001}$ برابر $\sqrt{8/999}<x<\sqrt{9/001}$ می‌باشد.

۶- جواب‌هایی از نابرابری $\mathbf{\frac{1}{x^2}<\frac{1}{10^4}}$ را به دست آورید که در بازه $\mathbf{(3,+\infty)}$ قرار دارند.

پاسخ: $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{10^4} \Rightarrow x^2>10^4 \Rightarrow |x|>10^2 \Rightarrow x>100$ یا $x<-100$

از طرفی $x\in(۳,+\infty)$ پس باید $x>۳$ باشد، پس $x<-۱۰۰$ غیرقابل قبول است و اشتراک بین شرطهای $x>۳$ و $x>۱۰۰$، $x>۱۰۰$ می‌شود.

۷- جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^{۲}-۹}<\frac{۱}{۱۰۰}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(۳-\frac{۱}{۱۰},۳+\frac{۱}{۱۰})$ قرار دارند.

پاسخ:

$$\sqrt{x^{۲}-۹}<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۰\le x^{۲}-۹<\frac{۱}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow ۹\le x^{۲}<۹/۰۰۰۱ \Rightarrow -\sqrt{۹/۰۰۰۱}<x\le -۳ \text{ یا } ۳\le x<\sqrt{۹/۰۰۰۱}$$

از طرفی $x\in(۳-\frac{۱}{۱۰},۳+\frac{۱}{۱۰})$ یعنی $۲/۹<x<۳/۱$ ، پس اشتراک جواب‌ها برابر است با:

$$۳\le x<\sqrt{۹/۰۰۰۱}$$

۸- فرض کنیم $a<x<b$، ثابت کنید $|x|<\mathrm{Max}\{|a|,|b|\}$ (منظور از Max، ماکسیمم مقدار مجموعه است.) آیا عکس این حکم درست است؟

پاسخ: ابتدا قرار می‌دهیم $k=\mathrm{Max}\{|a|,|b|\}$ در این صورت:

$$\begin{cases} |a|\le k \Rightarrow -k\le a\le k \xrightarrow{a<x} -k<x \\ |b|\le k \Rightarrow -k\le b\le k \xrightarrow{x<b} x<k \end{cases} \Rightarrow -k<x<k \Rightarrow |x|<k$$

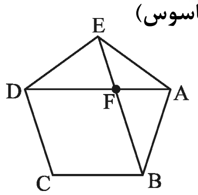
عکس این حکم برقرار نیست. مثال: $x=-۲\,,\, b=۴\,,\, a=۳$.

۹- فرض کنیم برای هر عدد مثبت h، $۰\le a<h$ ثابت کنید $a=۰$.

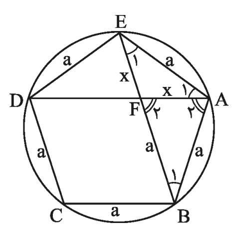
پاسخ: برهان خلف: فرض کنیم $a\ne ۰$. بنابراین $\frac{a}{۲}>۰$. همچنین طبق فرض برای عدد مثبت $h=\frac{a}{۲}$ داریم $۰\le a<\frac{a}{۲}$ که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و $a=۰$ می‌باشد.

۱۰- ثابت کنید در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a، نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است. (قضیه هیپاسوس)

راهنمایی: ابتدا نشان دهید دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.



پاسخ: این پنج ضلعی منتظم است، پس می‌توان دایره‌ای محیطی از رئوس آن، مانند مقابل گذراند که در این حالت اندازه‌ی زاویه‌ی هر کمان ۷۲° خواهد شد $\left(\frac{۳۶۰^\circ}{۵}=۷۲^\circ\right)$.



حال بر اساس آن‌چه در هندسه پایه فرا گرفتید، معلوم می‌گردد که اندازه هرکدام از **زاویه‌های محاطی $E_۱$ ، $A_۱$ و $B_۱$ مساوی نصف کمان مقابل آن‌ها،** یعنی ۳۶° خواهدبود $(\hat{B}_۱=\hat{A}_۱=\hat{E}_۱=۳۶^\circ)$. پس مثلث FEA متساوی‌الساقین بوده و $FA=FE$. از طرفی زاویه $A_۲$ **زاویه‌ای محاطی و مقابل به دو کمان است،** پس $\hat{A}_۲=۲\times ۳۶^\circ=۷۲^\circ$. حال واضح می‌گردد که زاویه $F_۲$ نیز در مثلث BFA مساوی $۱۸۰-(۷۲+۳۶)=۷۲^\circ$ خواهد بود و از آن‌جا مثلث BFA متساوی‌الساقین بوده و $BA=BF$. حال با فرض $FA=FE=x$ و $FB=BA=a$ ادامه می‌دهیم. دو مثلث AEB و FEA به دلیل برابری دو زاویه با یکدیگر متشابه هستند و در نتیجه:

$$\overset{\Delta}{FEA}\sim\overset{\Delta}{AEB} \Rightarrow \frac{AB}{AF}=\frac{EB}{EA} \Rightarrow \frac{a}{x}=\frac{a+x}{a} \Rightarrow x^{۲}+ax-a^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{-a\pm\sqrt{a^{۲}+۴a^{۲}}}{۲}=\frac{-a\pm\sqrt{۵a^{۲}}}{۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}a\ \xrightarrow[\text{پس } x>۰ \text{ است.}]{\text{مسئله هندسی است،}}\ \boxed{x=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}a}$$

اکنون نسبت طول قطر به طول پنج ضلعی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{EB}{EA}=\frac{x+a}{a}=\frac{x}{a}+۱=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}+۱=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

که عددی گنگ می‌باشد. (به $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ نسبت طلایی یا عدد φ می‌گویند که کاربرد فراوانی در طبیعت، بدن انسان و ... دارد.)

۱۱- ثابت کنید $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

پاسخ: برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt{۳}$ گنگ نباشد، پس گویاست و اعداد صحیح a و $b\neq ۰$ وجود دارند به طوری که $\sqrt{۳}=\frac{a}{b}$ و $(a,b)=۱$ باشد. (یعنی $\frac{a}{b}$ تحویل‌ناپذیر و ساده‌نشدنی باشد). در این صورت:

$$\sqrt{۳}=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ ۳=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\ \Rightarrow\ a^{۲}=۳b^{۲}$$

چون $۳b^{۲}$ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس $a^{۲}$ نیز بر ۳ بخش‌پذیر است و بنا بر قضیه‌ای که در جبر و احتمال داشتیم، a نیز بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود.

(قضیه: اگر $a^{۲}$ بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد، a نیز بر p بخش‌پذیر است.) پس $a=۳k$ که $k\in\mathbb{Z}$ بنابراین:

$$a^{۲}=۳b^{۲}\ \Rightarrow\ (۳k)^{۲}=۳b^{۲}\ \Rightarrow\ ۹k^{۲}=۳b^{۲}\ \Rightarrow\ ۳k^{۲}=b^{۲}$$

به طور مشابه $b^{۲}$ نیز بر ۳ بخش‌پذیر و بنابراین b نیز بر ۳ بخش‌پذیر است که این مطلب با $(a,b)=۱$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و $\sqrt{۳}$ گنگ می‌باشد.

۱۲- ثابت کنید $\log ۳$ گویا نیست.

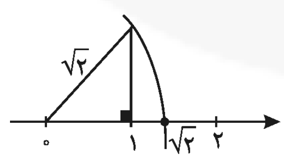
پاسخ: برهان خلف: فرض کنیم $\log ۳$ گویا باشد. در این صورت اعداد صحیح a و $b\neq ۰$ وجود دارند که $\log ۳=\frac{a}{b}$:

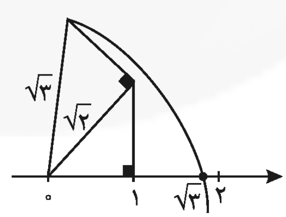
$$\log ۳=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ ۱۰^{\frac{a}{b}}=۳\ \Rightarrow\ ۱۰^{a}=۳^{b}$$

از طرفی ۳^{b} بر ۳ بخش‌پذیر و عددی فرد است، در صورتی که ۱۰^{a} بر ۲ و ۵ بخش‌پذیر است وعددی زوج است که بر ۳ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

۱۳- اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد نشان دهید. (به کمک رسم مثلث قائم‌الزاویه)

پاسخ:





فصل دوم

تمرین در کلاس ۲۵:

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $1,2,4,8,16,32,64,\dots,n^2,\dots$

ب) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243},\dots,\frac{1}{3^n},\dots$

ج) $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\dots,\frac{n+1}{n},\dots$

د) $2,(\frac{3}{2})^2,(\frac{4}{3})^3,(\frac{5}{4})^4,(\frac{6}{5})^5,\dots,(\frac{n+1}{n})^n,\dots$

اکنون مشخص کنید کدام دنباله صعودی و کدامیک نزولی است.

الف) $1,2,4,8,16,32,64,\dots,n^2,\dots$ **پاسخ:** صعودی

ب) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243},\dots,\frac{1}{3^n},\dots$ **پاسخ:** نزولی

ج) $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\dots,\frac{n+1}{n},\dots$ **پاسخ:** نزولی

د) $2,(\frac{3}{2})^2,(\frac{4}{3})^3,(\frac{5}{4})^4,(\frac{6}{5})^5,\dots,(\frac{n+1}{n})^n,\dots$ **پاسخ:** صعودی

مسائل صفحه ۲۵:

۱- چهار دنباله زیر را در نظر بگیرید:

الف) $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ ب) $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ ج) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ د) $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

ابتدا تعدادی از جملات هر دنباله را بنویسید. این که چه تعداد از جمله‌های نخست را انتخاب می‌کنید، به خودتان بستگی دارد. سپس مشخص کنید که کدام یک صعودی و کدام یک نزولی‌اند. هم‌چنین تجمع احتمالی جملات هر دنباله را حول یک عدد معین بررسی کنید.

پاسخ:

الف) $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}: \ a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=5$

نشان می‌دهیم این دنباله صعودی می‌باشد:

$a_{n+1}-a_n=(n+1)+1-(n+1)=1>0 \Rightarrow a_{n+1}>a_n$ دنباله اکیداً صعودی

ب) $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}: \ a_1=1, a_2=-1, a_3=1, a_4=-1,\dots$ دنباله غیریکنوا و جملات حول ۱ و ۱- تجمع می‌یابند

ج) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}: a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{2}{3}, a_3=\frac{3}{4}, a_4=\frac{4}{5},\dots$

نشان می‌دهیم دنباله صعودی و جملات حول عدد ۱ تجمع می‌یابند (دنباله به عدد ۱ همگراست).

در دنباله‌ی $a_n=\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$، با افزایش n، $\frac{1}{n+1}$ کوچک‌تر شده، پس $1-\frac{1}{n+1}$ بزرگ‌تر می‌شود. پس دنباله صعودی است. هم‌چنین با افزایش n، مقدار $\frac{1}{n+1}$ به صفر میل می‌کند، پس $a_n=1-\frac{1}{n+1}$ به ۱ میل می‌کند.

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 > n(n+2) \Leftrightarrow n^2+2n+1 > n+2n \Leftrightarrow 1>0 \checkmark$$

بنابراین $\{a_n\}$ صعودی می‌باشد.

د) $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$: $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{5}{4}, a_3=\frac{7}{8}, \dots$ غیریکنوا

جملات در اطراف نقطه‌ی ۱ تجمع می‌یابند.

۲- یک دنباله بسازید که کراندار باشد اما صعودی نباشد.

پاسخ: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

۳- یک دنباله بسازید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

پاسخ: $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

۴- نشان دهید که هیچ‌کدام از دو جمله از دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ برابر نیستند.

پاسخ: برهان خلف: فرض کنیم a_m و a_n دو جمله‌ی دلخواه از دنباله باشند به طوری که $n \neq m$ و $a_n = a_m$ باشد در این صورت:

$$a_n = a_m \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \Rightarrow n = m$$

که تناقض است پس فرض خلف باطل و هیچ دو جمله‌ی متمایزی با هم برابر نیستند.

۵- ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

پاسخ:

$$\begin{aligned}\frac{1}{11}&=\frac{1\times 11}{11\times 11}=\frac{11}{121}\\ \frac{1}{10}&=\frac{1\times 11}{10\times 11}=\frac{11}{110}\end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{11}<\frac{11}{120}<\frac{11}{119}<\frac{11}{118}<\frac{11}{117}<\frac{11}{116}<\frac{11}{115}<\frac{11}{114}<\frac{11}{113}<\frac{11}{112}<\frac{11}{111}<\frac{11}{110}$$

۶- دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

پاسخ: ادعا می‌کنیم جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{n+1}{10n+11}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ قرار دارد:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10}=\frac{n+1}{10(n+1)}=\frac{n+1}{10n+10}>\frac{n+1}{10n+11} \quad (1)\\ &\frac{1}{11}=\frac{n+1}{11n+11}<\frac{n+1}{10n+11} \quad (2)\end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{11}<\frac{n+1}{10n+11}<\frac{1}{10}$$

۷- با بررسی جملات (اولیه) دنباله‌های زیر رفتار آن‌ها را حدس زده و حدس خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

پاسخ: $\Rightarrow a_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ ,\ a_2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\ ,\ a_3=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}\ ,\ \dots \to 1$

جملات دنباله همگی مثبت‌اند، پس از پایین کراندارند. از طرفی جملات دنباله نزولی است. زیرا با افزایش n، $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ کاهش می‌یابد. بنابراین بر اساس قضیه همگراست. هم‌چنین با افزایش n، $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین جملات دنباله به ۱ نزدیک می‌شود.

ب) $\left\{\frac{n^۲}{۲n}\right\}$

پاسخ: $\Rightarrow\ a_۱=\frac{۱}{۲}\ ,\ a_۲=۱\ ,\ a_۳=\frac{۳}{۲}\ ,\ a_۴=۲,\ldots$

$a_n=\frac{n^۲}{۲n}=\frac{n}{۲}$، بنابراین دنباله صعودی است و با بزرگ‌تر شدن n، جملات دنباله بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود.

ج) $\{۱+(-۱)^n\}$

پاسخ: $\Rightarrow\ a_۱=\circ\ ,\ a_۲=۲\ ,\ a_۳=\circ\ ,\ a_۴=۲,\ldots$

دنباله غیریکنواست و جملات حول ۰ و ۲ جمع می‌شوند.

د) $\left\{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n\right\}$

پاسخ: $\Rightarrow\ a_۱=۲\ ,\ a_۲=\frac{۹}{۴}\ ,\ a_۳=\frac{۶۴}{۲۷}\ ,\ \ldots$

دنباله صعودی است در قضایای ۳ و ۴ صفحه‌ی ۴۸ صعودی و کراندار بودن دنباله را ثابت می‌کنیم.

هـ) $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{۲n}\right)\right\}$

پاسخ: $\Rightarrow\ a_۱=\circ\ ,\ a_۲=\circ\ ,\ a_۳=\circ\ ,\ a_۴=\circ,\ldots$

دنباله ثابت صفر است پس هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

ز) $\left\{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}\right\}$

پاسخ: $\Rightarrow\ a_۱=۴\ ,\ a_۲=\frac{۲۷}{۸}\ ,\ a_۳=\frac{۱۲۸}{۸۱}\ ,\ldots$

دنباله نزولی می‌باشد که در مثال صفحه ۴۹ این مطلب را اثبات می‌کنیم.

۸- دنباله $a_n=\frac{n}{n+۱}$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\ldots,\frac{n}{n+۱},\ldots$ اکنون ۵ جمله نخست آن را تعویض می‌کنیم و دنباله جدید را $\{b_n\}$ می‌نامیم؛ بنابراین، برای مثال، $b_۱=۱, b_۲=۵, b_۳=۱۰, b_۴=۱۰, b_۵=-۱۵$ و برای $n\ge ۶$ قرار می‌دهیم $b_n=a_n$. رفتار دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را مقایسه کنید. چه نتیجه کلی از این بررسی عایدتان می‌شود؟ آن را بیان کنید.

پاسخ: دنباله $\{a_n\}$ صعودی و دنباله $\{b_n\}$ غیر یکنواست ولی هر دو دنباله همگرا به ۱ می‌شوند. پس اگر تعداد متناهی جمله از دنباله حذف کنیم یا اضافه یا تعویض کنیم، هیچ تأثیری در همگرایی یا واگرایی دنباله ندارد ولی ممکن است یکنوایی و غیریکنوایی را تغییر دهد.

۹- دنباله $c_n:۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,\ldots$ را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را پیدا کنید. $\{c_n\}$ یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله‌های فیبوناتچی معروف‌اند.

پاسخ: $a_۱=۱, a_۲=۱, a_۳=۲, a_۴=۳,\ldots\ \Rightarrow\ a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}$

یعنی هر جمله مجموع دو جمله قبلی است.

۱۰- ثابت کنید هرگاه دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد، عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که برای هر n، $|a_n|\le M$ و بالعکس.

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ کراندار باشد. در این صورت اعداد حقیقی k و k' موجودند به طوری که برای هر n، $k\le a_n\le k'$ باشد. حال قرار می‌دهیم $M=\max\{|k|,|k'|\}$. در این صورت:

$$-M\le -|k|\le k\le a_n\le k'\le |k'|\le M\ \Rightarrow\ |a_n|\le M$$

بالعکس واضح است که اگر عدد مثبت M ای باشد که برای هر n، $|a_n|\le M$، در این صورت برای هر n، $-M\le a_n\le M$ می‌شود و در نتیجه $\{a_n\}$ کراندار است.

۱۱- برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تا ۲ حساب کنید. n از چه عددی باید بزرگ‌تر باشد تا نابرابری $\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<0/0001$ برقرار باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_1=\frac{2}{2}=1\ ,\ |a_1-2|=|1-2|=1 \\ a_2=\frac{4}{3}\ ,\ |a_2-2|=\left|\frac{4}{3}-2\right|=\frac{2}{3} \\ a_3=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\ ,\ |a_3-2|=\left|\frac{3}{2}-2\right|=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<0/0001 \Rightarrow \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right|<\frac{1}{10000} \Rightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right|<\frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{2}{n+1}<\frac{1}{10000} \Rightarrow n>19999$$

۱۲- یک دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار باشد، دو دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار نباشند.

پاسخ: دنباله‌ی نوسانی کراندار: $\{(-1)^n\}$ ، دو دنباله‌ی نوسانی بی‌کران: $\{(-n)^n\}$ و $\{(-1)^n n\}$

پرسش‌های مفهومی صفحه ۲۷ :

۱- پرسش‌های زیر را بررسی کنید، اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آن‌ها را توضیح دهید و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، مثالی ارائه دهید.

الف) هرگاه n جمله نخست یک دنباله را تغییر دهیم، در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.

پاسخ: ممکن است یکنوایی را تغییر دهد ولی همگرایی یا واگرایی یک دنباله تحت تأثیر جملات آخر دنباله است و جملات ابتدایی هیچ‌گونه نقشی در همگرایی یا واگرایی یک دنباله ندارند.

ب) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و C عدد ثابتی باشد، دنباله $\{Ca_n\}$ نیز صعودی است.

پاسخ: نادرست است. $\{a_n\}=\{n\}$:صعودی ، $C=-1 \Rightarrow \{Ca_n\}=\{-n\}$ دنباله‌ای نزولی است.

ج) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و C عدد ثابتی باشد، دنباله $\{Ca_n\}$ نیز صعودی است.

پاسخ: نادرست است. $\{a_n\}=\{-n\}$:نزولی ، $C=2 \Rightarrow \{Ca_n\}=\{-2n\}$ دنباله‌ای نزولی است.

د) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و C عدد ثابتی باشد، دنباله $\{Ca_n\}$ نیز یکنوا است.

پاسخ: درست است. اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی (نزولی) باشد و $C>0$، $\{Ca_n\}$ صعودی (نزولی) است. اگر $C<0$ باشد، $\{Ca_n\}$ نزولی (صعودی) است و اگر $C=0$ باشد، $\{Ca_n\}$ نیز دنباله‌ی ثابت صفر است که هم صعودی و هم نزولی است. پس در هر صورت $\{Ca_n\}$ یکنوا می‌باشد.

یکی از حالتها را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $\{a_n\}$ صعودی باشد و $C<0$. در این صورت :

$$\forall n: a_{n+1}\ge a_n \xrightarrow{C<0} Ca_{n+1}\le Ca_n \Rightarrow \{Ca_n\}\ \text{نزولی است}$$

تمرین در کلاس صفحه ۳۴:

۱- توضیح دهید که چرا دنباله $a_n=2n+1$ همگرا نمی‌باشد.

پاسخ: برهان خلف: فرض کنیم $\{2n+1\}$ همگرا به L باشد و $\varepsilon_0>0$ دلخواه باشد. در این صورت عدد طبیعی M وجود دارد که برای $n\ge M$، $|2n+1-L|<\varepsilon_0$ باشد. در این صورت:

$$n\ge M: |2n+1-L|<\varepsilon_0 \Rightarrow -\varepsilon_0<2n+1-L<\varepsilon_0 \Rightarrow -\varepsilon_0+L-1<2n<\varepsilon_0+L-1 \Rightarrow n<\frac{\varepsilon_0+L-1}{2}$$

که یک تناقض است. چون اعداد طبیعی از بالا کراندار نیستند.

۲- دنباله $1,-\frac{1}{2},2,-\frac{2}{3},3,-\frac{3}{4},4,-\frac{4}{5},5,-\frac{5}{6},\dots$ را در نظر بگیرید. ابتدا ضابطه این دنباله را معلوم کنید، سپس از این دنباله دو دنباله استخراج کنید که یکی همگرا و دیگری واگرا باشد.

پاسخ:

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{n}{n+۲} & n\ \text{زوج}\\ \dfrac{n+۱}{۲} & n\ \text{فرد}\end{cases}$$

دنباله‌ی واگرا $\{n\}$ و دنباله‌ای همگرا $\left\{\dfrac{-n}{n+۱}\right\}$ است که همگرا به ۱- می‌باشد.

مثال صفحه ۳۵: همگرایی دنباله $\left\{۳-\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^n\right\}_{n=۱}$ را بررسی کنید.

پاسخ: با توجه به این که با افزایش n، $\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^n$ به صفر نزدیک می‌شود، حدس می‌زنیم $\left\{۳-\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^n\right\}$ به ۳ همگرا باشد. درستی حدس خود را نشان می‌دهیم. فرض کنیم $\varepsilon>۰$ عدد دلخواهی باشد، به دنبال عدد طبیعی M هستیم، به طوری که برای هر $n\geq M$، رابطه‌ی $\left|۳-\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^n-۳\right|<\varepsilon$ برقرار باشد. از طرفی $\left|۳-\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^n-۳\right|=\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^n$، پس کافی است $\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^n<\varepsilon$ و در نتیجه $۲^n>\dfrac{۱}{\varepsilon}$ و $n>\log_۲^{\frac{۱}{\varepsilon}}$. چون می‌خواهیم M عدد طبیعی باشد، کافی است M را به صورت $M=[\log_۲^{\frac{۱}{\varepsilon}}]+۱$ معرفی کنیم تا همه‌ی روابط موردنظر برقرار باشد.

مثال صفحه ۳۶: آیا دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{۲}$ همگراست؟

پاسخ: خیر، با نوشتن جملات این دنباله خواهیم دید که جملاتش در اطراف یک عدد تجمع نمی‌کنند. $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{۲}\right\}=۱,۰,-۱,۰,\ldots$

با برهان خلف این مطلب را ثابت می‌کنیم. برهان خلف: فرض کنیم دنباله‌ی $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{۲}\right\}$ همگرا به L باشد. در این صورت طبق تعریف همگرایی داریم:

$$\forall\varepsilon>۰,\exists M\in\mathbb{N},\ n\geq M\ \Rightarrow\left|\sin\frac{n\pi}{۲}-L\right|<\varepsilon$$

با فرض $\varepsilon=\dfrac{۱}{۲}$، $M_۱$ای موجود است که برای $n\geq M_۱$، $\left|\sin\dfrac{n\pi}{۲}-L\right|<\dfrac{۱}{۲}$. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}n\geq M_۱\ ,\ n=۲k\ (k\in\mathbb{N}):\sin\dfrac{n\pi}{۲}=۰\ \Rightarrow\ |۰-L|<\dfrac{۱}{۲}\\ n\geq M_۱\ ,\ n=۴k+۱\ (k\in\mathbb{N}):\sin\dfrac{n\pi}{۲}=۱\ \Rightarrow\ |۱-L|<\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow ۱=|۱-L+L|\leq|۱-L|+|L|<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

که یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{۲}\right\}$ همگرا نمی‌باشد.

مسائل صفحه ۳۸:

۱- ابتدا حد دنباله $\left\{\dfrac{n-۱}{n}\right\}_{n=۱}$ را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

پاسخ: $\dfrac{n-۱}{n}=۱-\dfrac{۱}{n}$ با افزایش n، $\dfrac{۱}{n}$ به صفر نزدیک می‌شود، در نتیجه حدس می‌زنیم $۱-\dfrac{۱}{n}$ به ۱ نزدیک شود. باید نشان دهیم:

$$\forall\varepsilon>۰,\exists M\in\mathbb{N}:n\geq M\ \Rightarrow\left|\frac{n-۱}{n}-۱\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{-۱}{n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{۱}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{۱}{\varepsilon}$$

پس کافی است $M=\left[\dfrac{۱}{\varepsilon}\right]+۱$ باشد تا روابط فوق برقرار باشد.

۲- فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}$ یک دنباله همگرا باشد. هم‌چنین فرض کنیم k عدد صحیح و ثابت است به قسمی که $n+k \geq 1$، دنباله $\{b_n\}_{n=1}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $b_n = a_{n+k}$ برای مثال هرگاه $k=2$ و $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ دنباله $\{a_n\}$ باشد، دنباله $\{b_n\}$ چنین است:
$b_1 = a_3\ ,\ b_2 = a_4\ ,\ b_3 = a_5\ ,\ldots,\ b_n = a_{n+2}\ ,\ldots$

یعنی:
$a_3\ ,\ a_4\ ,\ a_5\ ,\ldots,\ a_{n+2}\ ,\ldots$

همان دنباله $\{b_n\}_{n=1}$ است. ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

پاسخ: در واقع جملات دنباله‌ی b_n به صورت $a_{n+k}\ ,\ a_{n+k+1}\ ,\ldots$ می‌باشد. برای نشان دادن این که $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ ،باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی M وجود دارد به طوری که برای $n \geq M$ ، $|b_n - L| < \varepsilon$ باشد. فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ بنابراین:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists M_1 \in \mathbb{N} : n \geq M_1\ \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

بنابراین :

$$n \geq M_1 - k \Rightarrow n+k \geq M_1 \Rightarrow |a_{n+k} - L| < \varepsilon \xrightarrow{b_n = a_{n+k}} |b_n - L| < \varepsilon$$

پس کافیست $M = M_1 - k$ را در نظر بگیریم.

۳- فرض کنیم $\{P_n\}_{n=1}$ یک دنباله همگرا و $P_{n+1} = \dfrac{bP_n}{a+P_n}$ که در آن a و b اعدادی ثابت‌اند. با استفاده از مسأله ۷ حد دنباله $\{P_n\}_{n=1}$ را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = L$ در این صورت طبق مسئله قبلی $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n+1} = L$ و :

$$\lim_{n\to\infty} P_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{bP_n}{a+P_n}\ \Rightarrow L = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(bP_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a+P_n)}\ \Rightarrow L = \frac{b(\lim\limits_{n\to\infty} P_n)}{a+\lim\limits_{n\to\infty} P_n}\ \Rightarrow L = \frac{bL}{a+L}\ \Rightarrow aL + L^2 = bL$$

$$\Rightarrow\ L^2 + (a-b)L = 0\ \Rightarrow L(L+(a-b)) = 0\ \Rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = b-a \end{cases}$$

۴- کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟ آن‌هایی را که فکر می‌کنید همگرا نیستند، واگرایی دنباله را توضیح دهید.

الف) $\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}_{n=1}$

پاسخ: دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $-1 < q < 1$ پس به صفر همگرا است.

ب) $\{3^n\}_{n=1}$

پاسخ: دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q > 1$، واگراست.

$$\forall k > 0\ ,\ \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M\ \Rightarrow\ 3^n > k\ \Rightarrow\ n\log_3^3 > \log_3 k\ \Rightarrow\ n > \log_3^k\ \Rightarrow\ M = [\log_3^k] + 1$$

ج) $\{\log n\}_{n=1}$

پاسخ: واگراست.

$$\forall k > 0\ ,\ \exists M \in \mathbb{N}:\ n \geq M\ \Rightarrow\ \log n > k\ \Rightarrow\ n > 10^k\ \Rightarrow\ M = [10^k] + 1$$

د) $\left\{\log \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}$

پاسخ: واگراست.

$$\forall k < 0\ \ \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M\ \Rightarrow \log\frac{1}{n} < k\ \Rightarrow\ \frac{1}{n} < 10^k\ \Rightarrow\ n > \frac{1}{10^k}\ \Rightarrow\ M = \left[\frac{1}{10^k}\right] + 1$$

تمرین در کلاس صفحه ۴۰:

ابتدا با حدسیه‌سازی مشخص کنید که کدام یک از دنباله‌ها واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ است و سپس حدس خود را ثابت کنید.

۱) $\{n^{۲}\}_{n=۱}^{\infty}$

پاسخ: با بزرگ‌تر شدن n، $n^{۲}$ نیز بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و حدس می‌زنیم $\lim_{n\to\infty} n^{۲} = +\infty$

$$\forall k > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N}, n \geq M \Rightarrow a_n > k \Rightarrow n^{۲} > k \Rightarrow n > \sqrt{k}$$

پس کافی است $M = [\sqrt{k}] + ۱$ باشد تا روابط فوق صحیح شود.

۲) $\{۱۰۰۰ - n^{۲}\}_{n=۱}^{\infty}$

پاسخ: با بزرگ‌تر شدن n، $n^{۲}$ بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و $-n^{۲}$ کوچک و کوچک‌تر می‌شود. پس حدس می‌زنیم $\lim_{n\to\infty} ۱۰۰۰ - n^{۲} = -\infty$:

$$\forall k < ۰ \ , \ \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow a_n < k \Rightarrow ۱۰۰۰ - n^{۲} < k \Rightarrow n^{۲} > ۱۰۰۰ - k \Rightarrow n > \sqrt{۱۰۰۰ - k}$$

پس کافی است $M = [\sqrt{۱۰۰۰ - k}] + ۱$ باشد.

۳) $\left\{\frac{۱}{۱۰^{۶}}(n+۱)\right\}_{n=۱}^{\infty}$

پاسخ: وقتی n بزرگ می‌شود، $n+۱$ نیز بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود. پس حدس می‌زنیم $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۱۰^{۶}}(n+۱) = +\infty$

$$\forall k > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow a_n > k \Rightarrow \frac{n+۱}{۱۰^{۶}} > k \Rightarrow n > ۱۰^{۶} k - ۱$$

پس کافی است $M = [۱۰^{۶} k - ۱] + ۱$ که همان $[۱۰^{۶} k]$ است، انتخاب شود.

مسائل صفحه ۴۱:

۱- ثابت کنید:

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{۲}+۱}{n} = \infty$.

پاسخ: $\forall k > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow a_n > k$

اگر $n > k$ باشد، در اینصورت $n + \frac{۱}{n} > n > k$ است، پس کافی است $M = [k] + ۱$ باشد.

ب) $\lim_{n\to\infty} (-۱)^{n} \frac{n^{۲}+۱}{n}$ **موجود نیست.**

پاسخ: چون جملات با اندیس فرد به $-\infty$ و با اندیس زوج به $+\infty$ میل می‌کنند، پس حد دنباله وجود ندارد.

۲- ثابت کنید هرگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{a_n} = ۰$.

پاسخ: کافی است نشان دهیم:

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \quad \left|\frac{۱}{a_n} - ۰\right| < \varepsilon$$

طبق فرض $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ بنابراین برای $k = \frac{۱}{\varepsilon}$، عدد طبیعی M هست که برای $n \geq M$، $a_n > k$. پس برای همین M داریم: $|a_n| \geq a_n > \frac{۱}{\varepsilon}$

و در نتیجه $\left|\frac{۱}{a_n}\right| < \varepsilon$ پس $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{a_n} = ۰$.

۳- فرض کنیم همواره $a_n > ۰$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{a_n} = ۰$. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

پاسخ: کافی است نشان دهیم $\forall k > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow a_n > k$

فرض کنیم $k>۰$ باشد. چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$ پس برای $\varepsilon=\frac{۱}{k}$ عدد طبیعی M موجود است که $\forall n\ge M\Rightarrow\left|\frac{۱}{a_n}-۰\right|<\frac{۱}{k}$ باشد. پس برای همین M داریم:

$$\frac{۱}{a_n}=\left|\frac{۱}{a_n}\right|<\frac{۱}{k}\xrightarrow{a_n>۰}a_n>k$$

۴- فرض کنیم همواره $a_n<۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

پاسخ: باید نشان دهیم $\forall k<۰\ ,\ \exists M\in\mathbb{N}:n\ge M\Rightarrow a_n<k$. می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$. بنابراین به ازای $\varepsilon=-\frac{۱}{k}>۰$، $M\in\mathbb{N}$ موجود است، به طوری که برای $n\ge M$ داشته باشیم:

$$\left|\frac{۱}{a_n}-۰\right|<-\frac{۱}{k}\xrightarrow{a_n<۰}-\frac{۱}{a_n}<-\frac{۱}{k}\Rightarrow\frac{۱}{a_n}>\frac{۱}{k}\xrightarrow{a_n<۰}a_n<k$$

پس برای همین M روابط برقرار است.

۵- فرض کنیم $a_n=\frac{۵n^۲-۳n+۱۱}{۲n+۱}$ ، $b_n=\frac{n^۲-۱}{۶n۳+۱}$ ، $c_n=\frac{۳n^۲+۱}{۲n^۲+۷}$ دنباله‌هایی از اعداد باشند. ثابت کنید:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

پاسخ: کافی است نشان دهیم $\forall k>۰\ \exists M\in\mathbb{N}:n\ge M\Rightarrow a_n>k$.

$$\frac{۵n^۲-۳n+۱۱}{۲n+۱}>k\Rightarrow\frac{(\frac{۵}{۲}n-\frac{۱۱}{۴})(۲n+۱)+\frac{۳۳}{۴}}{۲n+۱}>k\Rightarrow\frac{۵}{۲}n-\frac{۱۱}{۴}+\frac{۳۳}{۴(n+۱)}>k$$

کافیست $\frac{۵}{۲}n-\frac{۱۱}{۴}>k$ باشد زیرا در اینصورت $\frac{۵}{۲}n-\frac{۱۱}{۴}+\frac{۳۳}{۴(n+۱)}>\frac{۵}{۲}n-\frac{۱۱}{۴}>k$ می‌شود. بنابراین $\frac{۵}{۲}n>k+\frac{۱۱}{۴}$ و در نتیجه $n>\frac{۲k}{۵}+\frac{۱۱}{۱۰}$

پس با قرار دادن $M=[\frac{۲k}{۵}+\frac{۱۱}{۱۰}]+۱$ همه روابط برقرار می‌شود.

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=۰$

پاسخ: کافی است نشان دهیم $\forall\varepsilon>۰\ \exists M\in\mathbb{N}:n\ge M\Rightarrow|b_n-۰|<\varepsilon$.

$$|b_n-۰|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{n^۲-۱}{۶n^۳+۱}\right|<\varepsilon$$

کافیست $\varepsilon>\left|\frac{n^۲}{۶n^۳}\right|$ باشد. زیرا $\left|\frac{n^۲-۱}{۶n^۳+۱}\right|<\left|\frac{n^۲}{۶n^۳+۱}\right|<\left|\frac{n^۲}{۶n^۳}\right|=\left|\frac{۱}{۶n}\right|$ پس $\frac{۱}{\varepsilon}<۶n$ و در نتیجه $\frac{۱}{۶\varepsilon}<n$ می‌شود. کافی است $M=[\frac{۱}{۶\varepsilon}]+۱$ باشد.

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{۳}{۲}$

پاسخ: کافی است نشان دهیم $\forall\varepsilon>۰\ \exists M\in\mathbb{N}:n\ge M\Rightarrow\left|c_n-\frac{۳}{۲}\right|<\varepsilon$.

$$\left|c_n-\frac{۳}{۲}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{۳n^۲+۱}{۲n^۲+۷}-\frac{۳}{۲}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{۶n^۲+۲-۶n^۲-۲۱}{۲(۲n^۲+۷)}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{۱۹}{۲(۲n^۲+۷)}\right|<\varepsilon\Rightarrow۲n^۲+۷>\frac{۲\varepsilon}{۱۹}\Rightarrow n>\sqrt{\frac{۱}{۲}(\frac{۱۹}{۲\varepsilon}-۷)}$$

پس با قرار دادن $M=[\sqrt{\frac{۱}{۲}(\frac{۱۹}{۲\varepsilon}-۷)}]+۱$ همه روابط برقرار می‌شود.

تمرین در کلاس ۴۳:

الف) در مورد احکام زیر فکر کنید، می‌توانید با مثال‌ها کار کنید. اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آن‌ها را توضیح دهید. و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، نیز توضیح دهید.

۱- هر مجموعه از بالا کراندار دارای کوچک‌ترین کران بالا است.

پاسخ: اگر مجموعه‌ی مرجع به عنوان مثال $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{Z}$ باشد، این جمله درست می‌باشد. ولی اگر مثلاً $\mathbb{Q}$ باشد، برقرار نیست. مثال: $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{۲}\}$ از بالا کراندار است، ولی کوچک‌ترین کران بالا در $\mathbb{Q}$ ندارد.

۲- هر مجموعه از پایین کراندار دارای بزرگ‌ترین کران پایین است.

پاسخ: شبیه مورد ۱ اگر مجموعه‌ی مرجع مثلاً $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{N}$ باشد، این جمله درست است ولی اگر $\mathbb{Q}$ باشد این جمله برقرار نیست. مثال: $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{۲}\}$ در $\mathbb{Q}$ کران پایین است، ولی بزرگ‌ترین کران پایین در $\mathbb{Q}$ ندارد.

۳- هرگاه A یک مجموعه کراندار و ناتهی باشد، هم کوچک‌ترین کران بالا و هم بزرگ‌ترین کران پایین دارد.

پاسخ: همواره درست نیست، مثلاً $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^۲ < ۲\}$ در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین دارد، ولی در $\mathbb{Q}$ ندارد.

۴- هرگاه $\phi \neq A \subseteq B$ و $U \in B$ یک کران بالای B باشد، U یک کران بالای A نیز می‌باشد.

پاسخ: باید نشان دهیم $\forall x \in A : x \leq U$. می‌دانیم U یک کران بالای B است. بنابراین:

$$\forall x \in A \xrightarrow{A \subset B} x \in B \xrightarrow{\text{کران بالا برای } B \text{ } U} x \leq U$$

(البته مسئله نیازی به شرط $U \in B$ ندارد.)

۵- حکمی نظیر ۴ در باب کران‌های پایین بیان کنید.

پاسخ: هرگاه $\phi \neq A \subseteq B$ و U یک کران پایین B باشد، U یک کران پایین A نیز است.

قضیه ۱ صفحه ۴۴: فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد، در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد. به عبارت دیگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

پاسخ: اثبات: S را مجموعه مقادیر برد دنباله یعنی $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ قرار می‌دهیم. واضح است که $S \neq \phi$ و چون $\{a_n\}$ از بالا کراندار است، پس S کران بالایی مانند K دارد. بنا بر اصل موضوع تمامیت S دارای کوچک‌ترین کران بالاست که آن را L می‌نامیم. نشان می‌دهیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. برای این منظور باید نشان دهیم $\forall \varepsilon > ۰ \;,\; \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M : |a_n - L| < \varepsilon$. می‌دانیم به ازای هر n، $a_n \leq L$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ عدد دلخواهی باشد. چون L کوچک‌ترین کران بالای S است، پس $L - \varepsilon$ یک کران بالای S نیست، زیرا $L - \varepsilon < L$. پس حداقل عضوی مانند a_N است که $L - \varepsilon < a_N$. چون دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی است، پس برای هر $n \geq N$، $a_n \geq a_N > L - \varepsilon$ از طرف دیگر برای هر n داشتیم $a_n < L$ پس برای هر n که $n \geq N$ داریم:

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon$$

یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

مثال صفحه ۴۴: ثابت کنید دنباله $\left\{\sin\dfrac{\pi}{۲n}\right\}_{n=۱}$ همگراست.

پاسخ: چون $n \geq ۱$ است، پس $۰ < \dfrac{\pi}{۲n} \leq \dfrac{\pi}{۲}$. از طرفی تابع $\sin x$ در ناحیه اول صعودی و $\dfrac{\pi}{۲n}$ دنباله‌ای نزولی است. پس $\sin\dfrac{\pi}{۲n}$ دنباله‌ای نزولی می‌شود که جملات آن همگی مثبت است، پس صفر یک کران پایین آن می‌باشد. بنابراین دنباله‌ای نزولی و از پایین کراندار است پس همگراست.

تمرین در کلاس صفحه ۴۵:

۱- ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند.

الف) $\left\{۱ + \dfrac{۱}{n^۲ + ۱}\right\}$ **ب)** $\left\{۱ - \dfrac{۱}{n}\right\}$

سپس حد آن‌ها را حساب کنید.

پاسخ:

الف) $\left\{1+\frac{1}{n^2+1}\right\}: a_1=\frac{3}{2}, a_2=\frac{6}{5}, a_3=\frac{11}{10}, \ldots$

دنباله کراندار است، زیرا: $\forall n\in\mathbb{N}: n^2\geq 0 \Rightarrow n^2+1\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2+1}\leq 1 \Rightarrow 1+\frac{1}{n^2+1}\leq 2 \Rightarrow a_n\leq 2 \xrightarrow{a_n>0} |a_n|\leq 2$

از طرفی دنباله نزولی است، زیرا:

$a_{n+1}\leq a_n \Leftrightarrow 1+\frac{1}{(n+1)^2+1}\leq 1+\frac{1}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+2n+2}\leq\frac{1}{n^2+1} \Leftrightarrow n^2+2n+2\geq n^2+1 \Leftrightarrow 2n\geq -1$ ✓ (همواره برقرار است.)

پس بنا بر قضیه ۱، دنباله همگراست. نشان می‌دهیم حد آن برابر ۱ است.

ادعا: $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2+1}=1$

$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}: n\geq M \Rightarrow \left|1+\frac{1}{n^2+1}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow n^2+1>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n^2>\frac{1}{\varepsilon}-1 \Rightarrow n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$

پس کافی است قرار دهیم $M=\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right]+1$. (دقت کنید که اگر $\frac{1}{\varepsilon}-1$ عددی منفی باشد، M می‌تواند ۱ در نظر گرفته شود.)

ب) $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}: a_1=0, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{2}{3}, \ldots$

دنباله کراندار است، زیرا: $\frac{1}{n}\geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{n}\leq 0 \Rightarrow 1-\frac{1}{n}\leq 1 \Rightarrow |a_n|\leq 1$

از طرفی دنباله صعودی است، زیرا:

$a_n\leq a_{n+1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{n}\leq 1-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n\leq n+1 \Leftrightarrow 0\leq 1$ ✓ (همواره برقرار است.)

پس بنا بر قضیه‌ی ۱، این دنباله همگراست. نشان می‌دهیم حد آن ۱ می‌باشد:

ادعا: $\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}=1$

$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}: n\geq M \Rightarrow |a_n-1|<\varepsilon \Rightarrow \left|1-\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

کافی است $M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ باشد.

۲- دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است: $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{7+a_n}\quad (n=1,2,3,\ldots)$

الف) ثابت کنید که این دنباله همگراست.

پاسخ: نشان می‌دهیم دنباله صعودی و کران‌دار است. با کمک استقرا نشان می‌دهیم ۴ کران بالایی برای a_n است.

$n=1: a_1=1<4$ ✓

فرض استقراء: $n=k: a_k\leq 4$

حکم: $n=k+1: a_{k+1}<4$

اثبات: $a_{k+1}=\sqrt{7+a_k}\leq\sqrt{7+4}<\sqrt{16} \Rightarrow a_{k+1}\leq 4$

از طرفی $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{7+a_n}}{a_n}=\sqrt{\frac{7}{a_n}+1}>1$ پس $\{a_n\}$ صعودی است. پس در کل همگراست.

ب) حد این دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{7+a_n}=\sqrt{7+\lim_{n\to\infty}a_n} \Rightarrow L=\sqrt{7+L} \Rightarrow L^2-L-7=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L=\dfrac{۱+\sqrt{۲۹}}{۲} \\ L=\dfrac{۱-\sqrt{۲۹}}{۲} \quad \text{غ.ق.ق چون جملات } \{a_n\} \text{ همگی مثبت‌اند} \end{cases}$$

قضیه صفحه ۴۵: هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

پاسخ: اثبات: فرض کنیم u عدد حقیقی دلخواهی باشد. دو حالت را در نظر می‌گیریم: ۱- u عددی گویا باشد. ۲- u عددی گنگ باشد. حالت اول: u عددی گویاست. برای هر n قرار می‌دهیم $u_n=u$. پس $\{u_n\}$ دنباله‌ای ثابت و متشکل از اعداد گویای u بوده و واضح است که $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=u$.

حالت دوم: u عددی گنگ است. بسط اعشاری u را در نظر می‌گیریم: $u=u_۰/u_۱u_۲u_۳\dots u_n\dots$

که در آن $u_۰$ جزء صحیح u است و عددی صحیح می‌باشد و چون u گنگ است، پس بسط اعشاری u نامتناهی و البته نامنظم (متناوب نیست) می‌باشد. قرار می‌دهیم:

$$r_۱=u_۰/u_۱$$
$$r_۲=u_۰/u_۱u_۲$$
$$\vdots$$
$$r_n=u_۰/u_۱u_۲\dots u_n$$

در واقع $\{r_n\}$ دنباله‌ی تقریبات اعشاری عدد u می‌باشد. هر r_n عددی گویاست، زیرا بسط اعشاری مختوم دارد.

از طرفی $۰<u-r_n=۰/\underbrace{۰۰\cdots۰}_{n\ \text{تا}}u_{n+۱}u_{n+۱}\cdots$ در نتیجه:

$$۱۰^n\,|u-r_n|=۰/u_{n+۱}u_{n+۲}\cdots<۱ \Rightarrow ۰<|u-r_n|<\frac{۱}{۱۰^n}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{۱۰^n}=۰$، به ازای هر عدد دلخواه $\varepsilon>۰$، Nای هست که برای هر $n\ge N$، $\frac{۱}{۱۰^n}<\varepsilon$. در نتیجه برای هر n که $n\ge N$ باشد، $|u-r_n|<\frac{۱}{۱۰^n}<\varepsilon$ یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=u$.

قضیه ۲ صفحه ۴۷: دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^n$ صعودی است.

پاسخ: اثبات: نشان می‌دهیم برای هر n، $\frac{b_{n+۱}}{b_n}>۱$.

$$\frac{b_{n+۱}}{b_n}=\frac{\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}}{\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^{n}}=\frac{\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}}{\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}}\times\left(۱-\frac{۱}{n}\right)=\left(\frac{\frac{n}{n+۱}}{\frac{n-۱}{n}}\right)^{n+۱}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)=\left(\frac{n^۲}{n^۲-۱}\right)^{n+۱}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)=\left(۱+\frac{۱}{n^۲-۱}\right)^{n+۱}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)$$

از طرفی طبق نامساوی برنولی داریم: $\left(۱+\frac{۱}{n^۲-۱}\right)^{n+۱}>۱+(n+۱)\left(\frac{۱}{n^۲-۱}\right)$ بنابراین:

$$\frac{b_{n+۱}}{b_n}=\left(۱+\frac{۱}{n^۲-۱}\right)^{n+۱}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)>\left(۱+\frac{n+۱}{n^۲-۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\Rightarrow\frac{b_{n+۱}}{b_n}>\left(۱+\frac{۱}{n-۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{n}\right)=۱$$

قضیه ۳ صفحه ۴۸: دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $a_n=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$ صعودی است.

پاسخ: کافی است ثابت کنیم برای هر n، $\frac{a_{n+۱}}{a_n}>۱$. داریم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

بنا بر نامساوی برنولی $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)$ بنابراین:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

قضیه ۴ صفحه ۴۸: دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ از بالا کراندار است.

پاسخ: بنا بر قضیه ۲ داریم دنباله‌ی $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ صعودی می‌باشد. از طرفی چون $b_2=\frac{1}{4}$ پس برای هر n، $b_n>\frac{1}{\varepsilon}$. پس برای هر n ، $a_nb_n>a_n\times\frac{1}{\varepsilon}$ از طرفی: $a_nb_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n<1$

بنابراین $\frac{1}{\varepsilon}a_n<a_nb_n<1$ پس $a_n<\varepsilon$ و $\{a_n\}$ از بالا کراندار است.

مثال صفحه ۴۹: ثابت کنید که دنباله $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ نزولی است.

پاسخ: کافی است ثابت کنیم که $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$، داریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$$

و اما طبق نامساوی برنولی داریم: $\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\geq 1+\frac{n+1}{n(n+2)}>1+\frac{n+1}{(n+1)^2}=1+\frac{1}{n+1}$

بنابراین: $\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\times\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=1$

و یا: $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$

تمرین در کلاس صفحه ۴۹:

۱- حد دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

$$c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\qquad b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\qquad a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

راهنمایی: از قاعده توان‌های مکرر استفاده کنید: $[(a)^{\alpha}]^{\beta}=(a)^{\alpha\beta}$

پاسخ:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=e^{2}$$

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}=e^{3}$$

$$c_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

۲- از ماشین حساب و یا رایانه خود استفاده کرده و عدد e را تا ۱۰ رقم اعشار به دست آورید.

پاسخ:

$e=2/7182818284$

۳- حاصل $(1+0/01)^{100}$ را به دست آورید و با عدد e مقایسه کنید.

پاسخ:

$(1+0/01)^{100}=2/7048138$

قضیه ۶ (قضیه فشردگی) صفحه ۵۰: فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله و $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=L$ ، هم‌چنین فرض کنیم $\{c_n\}$ دنباله‌ای باشد به قسمی که برای هر n ، $a_n\le c_n\le b_n$. در این صورت $\{c_n\}$ نیز همگراست و $\lim_{n\to\infty}c_n=L$.

پاسخ: اثبات: فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد حقیقی دلخواهی باشد. چون $\lim_{n\to\infty}b_n=L$ بنابراین عدد $M_1\in\mathbb{N}$ وجود دارد، به طوری که برای هر $n\ge M_2$ داشته باشیم $|a_n-L|<\varepsilon$. حال فرض می‌کنیم $M=\mathrm{Max}\{M_1,M_2\}$ باشد و $n\ge M$. چون $M\ge M_1$ و $M\ge M_2$ بنابراین $n\ge M_1$ و $n\ge M_2$ و داریم $|b_n-L|<\varepsilon$ و $|a_n-L|<\varepsilon$. بنابراین $L-\varepsilon<b_n<L+\varepsilon$ و $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$. از طرفی برای هر n، $a_n\le c_n\le b_n$ پس برای هر $n\ge M$، $L-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<L+\varepsilon$ یعنی $|c_n-L|<\varepsilon$ و بنابراین $\lim_{n\to\infty}c_n=L$

مثال صفحه ۵۱: می‌دانیم $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$ که در آن k عددی طبیعی است در همگرایی دنباله‌های زیر بحث کنید.

الف) $\left\{\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}\right\}$

پاسخ: داریم:

$$\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}=\frac{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}$$

اما:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=2-0=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=5+0-0=5$$

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}=\frac{2}{5}$$

ب) $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$

پاسخ: می‌دانیم همواره $-1 \le \cos x \le 1$ در نتیجه برای هر عدد طبیعی n، $\frac{-1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$. از طرفی چون $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

مسائل صفحه ۵۲:

در هر یک از تمرین‌های زیر مشخص کنید که آیا دنباله موردنظر:

الف) (از بالا یا پایین) کراندار است.

ب) جملات دنباله مثبت یا منفی‌اند.

ج) صعودی یا نزولی و یا نوسانی‌اند.

د) همگرا یا واگراست؛ و اگر واگراست به $+\infty$ و یا واگرا به $-\infty$ و یا هیچ یک.

۱- $\left\{\frac{5n^2}{n^2+1}\right\}$

پاسخ: $a_n = \frac{5n^2}{n^2+1} = \frac{5n^2+5-5}{n^2+1} = \frac{5(n^2+1)-5}{n^2+1} = 5 - \frac{5}{n^2+1} \Rightarrow |a_n| \le 5 \Rightarrow$ a_n کراندار است

از طرفی جملات دنباله همگی مثبت‌اند و همچنین واضح است که در $a_n = 5 - \frac{5}{n^2+1}$، با افزایش n، n^2+1 افزایش پس $\frac{5}{n^2+1}$ کاهش می‌یابد.

پس $a_n = 5 - \frac{5}{n^2+1}$ افزایش می‌یابد. پس a_n صعودی است و $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = 5$.

۲- $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$

پاسخ: جملات دنباله مثبت‌اند، از طرفی $\frac{2}{n+\frac{1}{n}} = \frac{2n}{n(n+\frac{1}{n})} = \frac{2n}{n^2+1}$ و می‌دانیم که جمع هر عدد مثبت و معکوس آن بزرگتر یا مساوی ۲ است پس

$\frac{2}{n+\frac{1}{n}} \le 1 \Leftarrow n+\frac{1}{n} \ge 2$ بنابراین $0 < a_n \le 1$ است و دنباله‌ای کراندار است، همچنین با افزایش n مخرج بزرگ و بزرگتر می‌شود پس حس می‌زنیم دنباله نزولی و همگرا به صفر است.

$$a_n \le a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{2}{n+\frac{1}{n}} \le \frac{2}{n+1+\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow n+\frac{1}{n} \ge n+1+\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} < 1 \Leftrightarrow n(n+1) > 1 \checkmark$$ (همواره برقرار است.)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+\frac{1}{n}} = 0$$

۳- $\left\{4+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

پاسخ: جملات دنباله مثبت، و چون $-1 \le \frac{(-1)^n}{n} \le 1$ پس $3 \le 4+\frac{(-1)^n}{n} \le 5$ و دنباله کراندار است، همچنین دنباله غیریکنوا و همگرا به ۴ است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 4+\frac{(-1)^n}{n} = 4+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 4$$

۴- $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$

پاسخ: جملات دنباله مثبت و دنباله کراندار است زیرا $1 > \sin\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 1 \le \frac{1}{n} < 0$، همچنین با افزایش n و کاهش $\frac{1}{n}$، مقدار $\sin\frac{1}{n}$ در ناحیه اول کاهش می‌یابد و دنباله نزولی می‌باشد. دنباله همگرا به صفر است زیرا : $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = \sin(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}) = \sin(0) = 0$.

۵- $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$

پاسخ: در این دنباله $a_n \ge 0$ است. پس جملات نامنفی و دنباله از پایین کراندار است. از طرفی $\frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}$ و $\{n\}$ و $\{-\frac{1}{n}\}$ هر دو صعودی‌اند. پس دنباله $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ صعودی است. از روش مشتق نیز می‌توان صعودی بودن دنباله را نشان داد. همچنین $n - \frac{1}{n} < n$ پس دنباله از بالا کراندار نیست و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(n-\frac{1}{n}) = \infty$.

۶- $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

پاسخ: $-1 \le -\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n} \le 1$ بنابراین دنباله کراندار است و چون با افزایش n کمان n در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، جملات آن مثبت و منفی می‌شود. پس دنباله غیریکنوا است و چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n} = 0$ ، طبق قضیه فشردگی $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$ و دنباله همگراست.

۷- $\left\{n\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$

پاسخ: با نوشتن چند جمله از این دنباله داریم $0, -2, 0, 4, 0, -6, 0, \ldots$ پس دنباله بی‌کران، با جملات مثبت و منفی (غیریکنوا) و واگراست.

۸- $\left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$

پاسخ: باز هم چند جمله اول آن را می‌نویسیم: $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$ پس دنباله بی‌کران، با جملات مثبت و منفی (غیریکنوا) و واگراست.

۹- $\left\{n\cos\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

پاسخ: می‌دانیم $\left\{n\cos\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{n\cos\frac{1}{n}\right\}$ زیرا $\cos(-x) = \cos x$ **و چون** $\cos\frac{1}{n} > 0$ **پس** $n\cos\frac{1}{n} > 0$ **و** جملات مثبت و دنباله از پایین کراندار می‌شود و چون $\{n\}$ و $\left\{\cos\frac{1}{n}\right\}$ هر دو صعودی‌اند($\left\{\cos\frac{1}{n}\right\}$ ترکیب دو تابع نزولی $\cos x, \left\{\frac{1}{x}\right\}$ است. پس صعودی می‌باشد.)، پس حاصل‌ضرب آن‌ها نیز صعودی است.. در ادامه نشان می‌دهیم دنباله از بالا کراندار نیست. چون در ناحیه اول $\sin x \le x$ **بنابراین** $\sin(\frac{1}{2n}) \le \frac{1}{2n}$ و

$$\mathbf{a_n = n\cos\frac{1}{n} = n(1-2\sin^2(\frac{1}{2n})) \xrightarrow[\sin(\frac{1}{2n})\le\frac{1}{2n}]{\sin x\le x} n(1-2\sin^2(\frac{1}{2n})) \ge n(1-2(\frac{1}{2n})^2) \Rightarrow a_n \ge n - \frac{1}{2n}}$$

از طرفی چون $\lim\limits_{n\to\infty} n - \frac{1}{2n} = +\infty$ پس $\{a_n\}$ از بالا کراندار نیست.

۱۰- ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1} = +\infty$ ؟

پاسخ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty \;\Rightarrow\; \forall k > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \ge M \;\Rightarrow\; \sqrt{n} > k \xrightarrow{\sqrt{n+1}>\sqrt{n}} \sqrt{n+1} \ge k$$

$$\Rightarrow\; \forall k > 0\;\; \exists M \in \mathbb{N} : n \ge M \;\Rightarrow\; \sqrt{n+1} > k \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} = +\infty$$

۱۱- همگرایی، واگرایی و واگرایی به $+\infty$ یا $-\infty$ دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\left\{\frac{n^{2}-1}{n}\right\}$

پاسخ:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}}{n}=+\infty$$

ب) $\left\{(-1)^{n}\frac{n+1}{n}\right\}$

پاسخ: دنباله واگرا. زیردنباله‌ی جملات زوج به $+\infty$ و زیردنباله جملات فرد به $-\infty$ واگراست.

ج) $\left\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

پاسخ:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}}=+\infty$$

۱۲- فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله همگرا و برای هر n داشته باشیم $100a_n=452+a_n$. حد این دنباله را پیدا کنید.

پاسخ:
$$100a_n=452+a_n \Rightarrow 99a_n=452 \Rightarrow a_n=\frac{452}{99}$$

بنابراین $\{a_n\}$ دنباله ثابت می‌باشد و $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{452}{99}$.

۱۳- فرض کنیم دنباله $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند، به قسمی که $p_{n+1}=\frac{bp_n}{a+p_n}$، حد دنباله $\{p_n\}$ را حساب کنید.

پاسخ: **(قبلا حل شده است.)** فرض کنیم $\{p_n\}$ به L همگرا باشد. در این صورت $\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}p_{n+1}=L$. بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}p_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bp_n}{a+p_n}\Rightarrow L=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(bp_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a+p_n)}\Rightarrow L=\frac{b(\lim\limits_{n\to\infty}p_n)}{a+\lim\limits_{n\to\infty}p_n}\Rightarrow L=\frac{bL}{a+L}\Rightarrow aL+L^{2}=bL$$

$$\Rightarrow L^{2}+(a-b)L=0 \Rightarrow L(L+(a-b))=0 \Rightarrow \begin{cases}L=0\\ L=b-a\end{cases}$$

۱۴- حد دنباله‌های روبه‌رو را به دست آورید. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$ و $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}$

راهنمایی: از این قضیه که هرگاه $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (دنباله $\{a_n\}$ با مقادیر مثبت همگرا به عدد مثبت α باشد) و $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ یعنی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند، دنباله $\{a_n^{b_n}\}$ نیز همگراست و $\lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n})=(\lim_{n\to\infty}a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\alpha^{\beta}$ استفاده کنید. ($\alpha>0$ و β دو عدد حقیقی‌اند.)

پاسخ:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2}=e^{2}$$

فصل سوم

تمرین در کلاس صفحه ۵۷:

تابع $f(x)=\frac{x^{۳}-۱}{x-۱}$ را در نظر می‌گیریم.

۱- پنج جمله‌ی اول هر کدام از دنباله‌های $\{۱-(۰/۱)^{n-۱}\}$ و $\{۱+(۰/۱)^{n-۱}\}$ را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟

پاسخ:

$\{۱-(۰/۱)^{n-۱}\}: a_۱=۱\,, a_۲=۰/۹\,, a_۳=۰/۹۹\,, a_۴=۰/۹۹۹\,, a_۵=۰/۹۹۹۹$

$\{۱+(۰/۱)^{n-۱}\}: b_۱=۱\,, b_۲=۱/۱\,, b_۳=۱/۰۱, b_۴=۱/۰۰۱\,, b_۵=۱/۰۰۰۱$

هر دو دنباله به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

۲- جدول زیر را تکمیل کنید.

x از راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود **x از چپ به عدد ۱ نزدیک می‌شود**

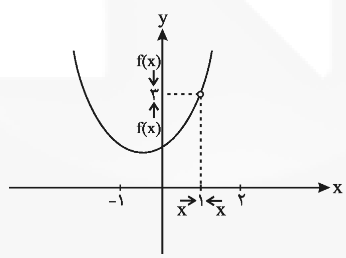
x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱
f(x)	۱	۲/۹۷۱	۲/۹۷۰۱	۲/۹۹۷۰۰۱	۲/۹۹۹۷۰۰۰۱	؟	۳/۰۰۰۳۰۰۰۱	۳/۰۰۳۰۰۱	۳/۰۳۰۱	۳/۳۱	۳

f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود **f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود**

۳- نمودار تابع f را در صفحه‌ی مختصات رسم کنید و سپس به کمک نمودار تابع حدس بزنید که اگر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود و هم‌چنین x را با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، f(x) به چه عددی نزدیک خواهدشد؟

پاسخ: ۳

برای رسم تابع ابتدا آن را ساده‌تر می‌نویسیم:



$$f(x)=\frac{x^{۳}-۱}{x-۱}=x^{۲}+x+۱ \qquad x\neq ۰$$

$$x_{min}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۲}, f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}$$

تمرین در کلاس صفحه ۶۰:

ویژگی‌ها و وضعیت مقادیر تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$ به ازای چهار جمله‌ی اول دنباله‌های $\{(۰/۱)^n\}$ و $\{-(۰/۱)^n\}$ را در نزدیکی $x=۰$ با تنظیم جدول و رسم نمودار تابع توصیف کنید و سپس $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را تخمین بزنید.

پاسخ:

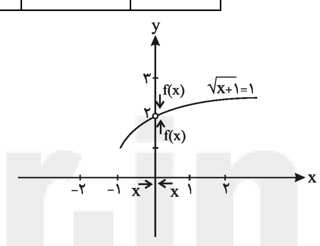
$\{(۰/۱)^n\}: a_۱=۰/۱\,, a_۲=۰/۰۱\,, a_۳=۰/۰۰۱\,, a_۴=۰/۰۰۰۱$

$\{-(۰/۱)^n\}: b_۱=-۰/۱\,, b_۲=-۰/۰۱\,, b_۳=-۰/۰۰۱\,, b_۴=-۰/۰۰۰۱$

x	۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)	۱/۹۴۹	۱/۹۹۴	۱/۹۹۹۴	۱/۹۹۹۹۴	؟	۲/۰۰۰۰۴	۲/۰۰۰۴	۲/۰۰۴	۲/۰۴۸

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}\overset{x\neq ۰}{=\!=}\frac{x(\sqrt{x+۱}+۱)}{(\sqrt{x+۱}-۱)(\sqrt{x+۱}+۱)}=\frac{x(\sqrt{x+۱}+۱)}{x}=\sqrt{x+۱}+۱$$

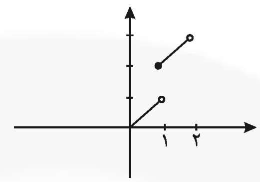
$$\lim_{x\to ۰} f(x)=۲$$



تمرین در کلاس صفحه ۶۱:

ابتدا نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ را در بازه $[۰,۲)$ رسم کنید و سپس مقادیر $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ را تخمین بزنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ وجود دارد؟

پاسخ:



$$f(x)=x+[x] \qquad D=[۰,۲)$$

$$۰\le x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow f(x)=x$$

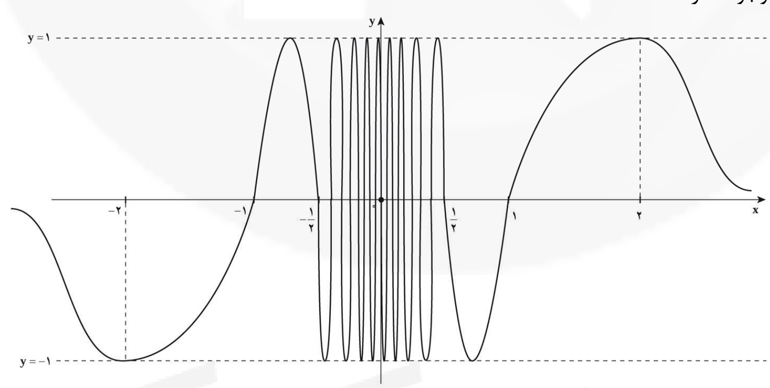
$$۱\le x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow f(x)=x+۱$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۲\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)$$ وجود ندارد.

طرح یک مسأله صفحه ۶۰:

وجود حدهای $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sin\frac{\pi}{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sin\frac{\pi}{x}$ را بررسی کنید. (اصطلاحاً گوییم رفتار تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ را در مجاورت $x=۰$ بررسی کنید.)

پاسخ: برای بررسی $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sin\frac{\pi}{x}$، دنباله‌هایی را در نظر می‌گیریم که با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر میل کند. دو دنباله‌ی $a_n=\frac{۱}{n}$ و $b_n=\frac{۲}{۴n+۱}$ را در نظر می‌گیریم. $\{a_n\}$ همگرا به صفر است و جملات دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگی برابر صفر هستند. پس این دنباله همگرا به صفر است. از طرفی $\{b_n\}$ نیز همگرا به صفر است، در صورتی که جملات دنباله‌ی $\{f(b_n)\}$ همگی برابر ۱ می‌باشد. پس این دنباله به ۱ همگراست. بنابراین $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو با مقادیر مثبت همگرا به صفر هستند، در صورتی که دنباله‌های به دست آمده برای مقادیر تابع به یک عدد ثابت و مشخص همگرا نیستند. پس $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.



به طور مشابه با در نظر گرفتن $a_n=-\frac{۱}{n}$ و $b_n=-\frac{۲}{۴n+۱}$، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شوند، در صورتی که $\{f(a_n)\}$ به ۰ و $\{f(b_n)\}$ به ۱- همگراست. پس $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sin\frac{\pi}{x}$ نیز وجود ندارد.

تمرین در کلاس صفحه ۶۶:

نشان دهید که $\lim\limits_{x\to ۰}\left(-\frac{۱}{x^۲}\right)=-\infty$

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه با مقادیر غیرصفر باشد، به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۰$. در این صورت: $f(x)=-\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f(a_n)=\frac{-۱}{a_n^۲}$

از طرفی طبق مسائل صفحه ۴۱، سؤال ۴، $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{a_n^2}=-\infty$. بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$. (دقت کنید که همواره $-\frac{1}{a_n^2}<0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{a_n^2}}=-\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=0$. پس می‌توان از سؤال ۴ استفاده کرد.)

تمرین در کلاس صفحه ۶۷:

نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه با مقادیر مخالف یک باشد، به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. در این صورت:

$$f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\ \Rightarrow\ f(a_n)=\frac{-1}{(a_n-1)^2}$$

و با توجه به سؤال ۴ مسائل صفحه ۴۱، $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(a_n-1)^2}=-\infty$. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$.

تمرین در کلاس صفحه ۶۸:

دبیر: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}$ **را حدس بزنید.**

پاسخ: محسن این‌گونه مسأله را بررسی کرده است: در رابطه با حدسیه‌سازی $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}$ با مقادیر بزرگ و بزرگ‌تر x سروکار داریم، پس عدد ۱ و یا هر عدد ثابت دیگری در مقابل x ناچیز است. پس اگر $x+1$ مخرج کسر را با x تقریب کنیم، مقادیر تابع با $\frac{x}{x}=1$ تقریب می‌گردند. بنابراین مقادیر این تابع برای xهای بزرگ، عددهای نزدیک ۱ هستند. در نتیجه حدس می‌زنیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$. آیا استدلال و تفکر شهودی محسن درست است؟ بله می‌توانید دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه‌های $a_n=n$ و $b_n=n^2+1$ را که هر دو به $+\infty$ واگرا هستند، محک بزنید. در مورد مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}$ چگونه فکر می‌کنید؟

در بی‌نهایت $n+1$ را با n تقریب می‌کنیم:

$$a_n=n\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=1$$

$$b_n=n^2+1\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{b_n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2}\ \xlongequal[\text{و } n^2+2 \text{ را با } n^2 \text{ تقریب می‌کنیم } n^2+1]{n\to+\infty\ \Rightarrow\ n^2\to+\infty}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$$

تمرین در کلاس صفحه ۶۹:

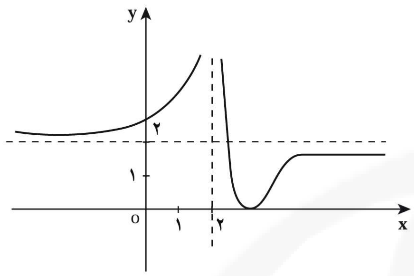
۱- مقدارهای $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **را در صورت وجود، حدس بزنید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

۲- نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است. حدهای زیر را حدس بزنید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

پاسخ: $+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

پاسخ: $+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

پاسخ: ۲

ت) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

پاسخ: ۲

۳- تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x}$ و دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=-۱۰^n$ را در نظر بگیرید.

الف) وقتی x مقادیر این دنباله را طبق جدول زیر اختیار کند، f(x) را محاسبه کنید.

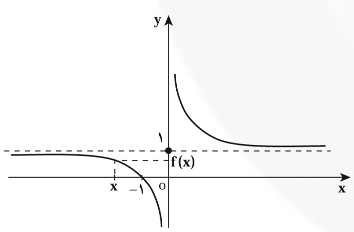
پاسخ:

a_n	-۱۰	-۱۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰۰۰
$f(a_n)$	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹

ب) آیا $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ وجود دارد؟

پاسخ: بله، $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=۱$

جواب خود را با توجه به نمودار $f(x)=\frac{x+۱}{x}$ که در شکل روبه‌رو آمده نیز توجیه کنید. $\left(f(x)=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}\right)$

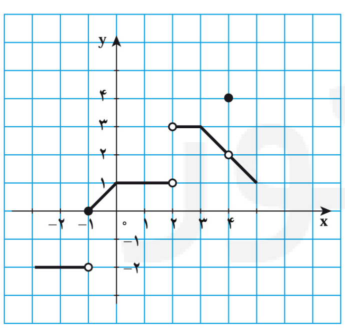


پاسخ:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+۱}{x}=\lim_{x\to -\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)\xlongequal{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=۰}۱$$

مسائل صفحه ۷۰:

۱- با استفاده از نمودار f که در زیر داده شده است، مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید. اگر این مقدار وجود ندارد، توضیح دهید که چرا وجود ندارد.



الف) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$

پاسخ: ۰

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

پاسخ: ۱

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

پاسخ: وجود ندارد، زیرا $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱$ یعنی حد چپ و راست با هم برابر نیستند. پس تابع در ۲ حد ندارد.

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$

پاسخ: ۴

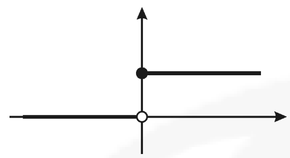
۲- تابع هِوی‌ساید (Heaviside) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(t)=\begin{cases}1 & , \quad t\geq 0\\ 0 & , \quad t<0\end{cases}$$

از این تابع در مدارهای الکتریکی برای نشان دادن هجوم ناگهانی جریان الکتریکی، یا ولتاژ، در لحظه زدن کلید استفاده می‌شود.

الف) نمودار تابع هوی‌ساید را رسم کنید.

پاسخ:



ب) مقدار عبارت‌های $\lim\limits_{t\to 0^-} H(t)$ **و** $\lim\limits_{t\to 0^+} H(t)$ **را مشخص کنید.**

پاسخ:

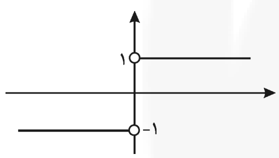
$$\lim_{t\to 0^-} H(t)=0 \quad , \quad \lim_{t\to 0^+} H(t)=1$$

۳- تابع علامت (یا تابع signum) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{sgn}(s)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & , \quad x>0\\ -1 & , \quad x<0\\ & , \quad x=0\end{cases}$$

الف) نمودار تابع علامت را رسم کنید.

پاسخ:



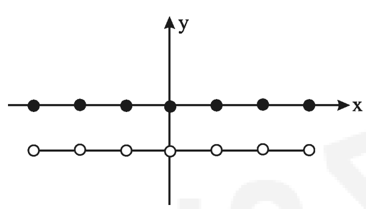
ب) مقدار عبارت‌های $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ **را مشخص کنید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)=1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)=-1$$

۴- نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ **را رسم نموده و حدهای زیر را مشخص کنید.**

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



الف) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

پاسخ: ۱-

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

پاسخ: ۱-

پ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

پاسخ: ۱-

آیا می‌توان نوشت: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-1$ (به ازای هر **a** عضو **R** ؟

پاسخ: بله

۵- با رسم نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]}$ **در بازه** $[-1,1]$**، مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید.**

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{[x]}$ **ب)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{[x]}$ **([ ] علامت جزء صحیح است.)**

پاسخ:

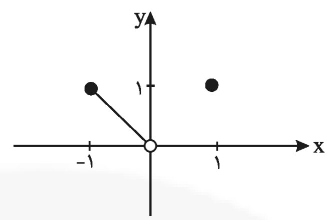
$$f(x)=\frac{x}{[x]} \qquad D:[-۱,۱]$$

$$-۱\le x<۰ \;\Rightarrow\; [x]=-۱ \;\Rightarrow\; f(x)=-x$$

$$۰\le x<۱ \;\Rightarrow\; [x]=۰ \;\Rightarrow\; f(x):\text{تعریف نشده}$$

$$x=۱ \;\Rightarrow\; [x]=۱ \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{۱}{۱}=۱$$

$\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{[x]}=۰ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{[x]}$ وجود ندارد.



۶- مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ **را پیدا کنید.**

پاسخ: می‌دانیم وقتی $x>۰$، آن‌گاه $۰<\sin x<x$ و در نتیجه $۱>\frac{\sin x}{x}>۰$ بنابراین $\left[\frac{\sin x}{x}\right]=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=۰$. از طرفی وقتی $x<۰$، در این صورت $-x>۰$ و $۰<\sin(-x)<-x$، بنابراین $۱>\frac{\sin(-x)}{-x}>۰$ و :

$$۰<\frac{\sin(-x)}{-x}<۱ \;\Rightarrow\; ۰<\frac{-\sin x}{-x}<۱ \;\Rightarrow\; ۰<\frac{\sin x}{x}<۱$$

پس در این حالت نیز $\left[\frac{\sin x}{x}\right]=۰$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۰^-}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=۰$. با توجه به مطالب گفته شده $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=۰$ می‌باشد.

مثال صفحه ۷۴: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲$

پاسخ: تابع $f(x)=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}$ به ازای $x=۱$ تعریف نشده است و برای هر $x\ne ۱$ داریم $f(x)=x+۱$. از طرفی برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $a_n\ne ۱$ و همگرا به ۱ باشد، داریم:

$$\lim_{n\to +\infty} f(a_n)=\lim_{n\to +\infty}(a_n+۱)=۱+۱=۲$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$$

تمرین در کلاس صفحه ۷۵:

به کمک تعریف ثابت کنید:

۱- c عدد ثابت، $\lim\limits_{x\to a} c=c$ **و** $\lim\limits_{x\to a} x=a$.

پاسخ: الف) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد که $a_n\ne a$ و همگرا به a باشد. در این صورت:

$$\lim_{n\to +\infty} f(a_n)=\lim_{n\to +\infty} c=c \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} c=c$$

پس: $\lim\limits_{n\to a} c=c$.

ب) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به a باشد، به طوری که $a_n\ne a$. در این صورت:

$$\lim_{n\to +\infty} f(a_n)=\lim_{n\to +\infty} a_n=a \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} x=a$$

۲- $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin\frac{\pi}{x}=۰$

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه با مقادیر مخالف صفر و همگرا به صفر باشد. در این صورت:

$$\lim_{n\to +\infty} f(a_n)=\lim_{n\to +\infty} a_n.\sin\frac{\pi}{a_n}=۰\times\text{کراندار}=۰ \;\Rightarrow\; \lim_{x\to ۰} x\sin\frac{\pi}{x}=۰$$

۳- $\lim\limits_{x\to a} x^۲=a^۲$

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و با مقادیر مخالف a باشد که همگرا به a می‌باشد. در این صورت:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(a_n)^۲=a^۲ \Rightarrow \lim_{x\to a} x^۲=a^۲$$

۴- $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ ، n عددی است طبیعی (اگر n زوج باشد، $a\ge ۰$).

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه با مقادیر مخالف a و همگرا به a باشد. در این صورت:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_{n_۵}}=\sqrt[n]{a} \Rightarrow \lim_{n\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

مسأله صفحه ۷۵: به کمک تعریف ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه $x=۰$ حد ندارد.

پاسخ: دنباله‌های $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n=\frac{۱}{n}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی $b_n=\frac{۱}{۲n+\frac{۱}{۲}}$ هر دو مخالف صفر ولی به صفر همگرا هستند. از طرفی:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin n\pi=\lim_{n\to+\infty} ۰=۰$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin\left(۲n\pi+\frac{\pi}{۲}\right)=\lim_{n\to+\infty} ۱=۱$$

چون حد دنباله در صورت وجود یکتاست و در این‌جا $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\ne\lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ ، پس بنا به تعریف $\lim_{x\to ۰}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

تمرین در کلاس صفحه ۷۵: ثابت کنید:

۱- $\lim_{x\to ۰}\cos\frac{۱}{x}$ وجود ندارد.

پاسخ: فرض کنیم $f(x)=\cos\frac{۱}{x}$ باشد. در این صورت دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n=\frac{۱}{۲n\pi}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی $b_n=\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}$ را در نظر می‌گیریم. هر دو دنباله مخالف صفر و همگرا به صفر هستند. از طرفی:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\cos ۲n\pi=۱$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim_{n\to+\infty}\cos\left(۲n\pi+\frac{\pi}{۲}\right)=۰$$

چون $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\ne\lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ ، پس طبق تعریف حد، $\lim_{x\to ۰}\cos\frac{۱}{x}$ وجود ندارد.

۲- تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^۲ & , x<۰\\ x-۱ & , x>۰\end{cases}$ در نقطه صفر دارای حد نیست.

پاسخ: دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n=-\frac{۱}{n}$، از مقادیر کم‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود.

هم‌چنین دنباله‌ی $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی $b_n=\frac{۱}{n}$، با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود. از طرفی:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{۱}{n}\right)^۲=۰$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n}-۱\right)=-۱$$

چون $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\ne\lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ ، پس بنا به تعریف حد، $\lim_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد.

قضیه ۱ صفحه ۷۶: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و $f,g: D\to\mathbb{R}$ تابع‌هایی باشند که $\lim_{x\to a} g(x)=L_۲$ و $\lim_{x\to a} f(x)=L_۱$.

در این صورت:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=L_1+L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=L_1-L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x)=cL_1$ که c عددی ثابت است.

ت) $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=L_1L_2$

ث) اگر $L_2\neq 0$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$.

پاسخ: اثبات قضیه ۱:

دنباله دلخواه $\{a_n\}$، همگرا به a را که $a_n\neq a$ است، در نظر می‌گیریم. چون $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=L_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}g(a_n)=L_2$، پس:

$$\lim_{n\to+\infty}(f(a_n)\pm g(a_n))=\lim_{n\to+\infty}f(a_n)\pm\lim_{n\to+\infty}g(a_n)=L_1\pm L_2$$

در نتیجه:
$$\lim_{x\to a}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$$

$$\lim_{n\to+\infty}cf(a_n)=c\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=cL_1$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)g(a_n)=\lim_{n\to+\infty}f(a_n)\lim_{n\to+\infty}g(a_n)=L_1L_2$$

در نتیجه:
$$\lim_{x\to a}cf(x)=cL_1\quad,\quad\lim_{x\to a}(f.g)(x)=L_1L_2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}g(a_n)}=\frac{L_1}{L_2}\quad,\ L_2\neq 0$$

در نتیجه:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\quad,\ L_2\neq 0$$

مثال صفحه ۷۶: نشان دهید:

الف) $\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$

پ) اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای دلخواه باشند و $Q(a)\neq 0$، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$

پاسخ: الف)
$$\lim_{x\to a}x^n=(\lim_{x\to a}x)\cdots(\lim_{x\to a}x)=(\lim_{x\to a}x)^n=a^n$$

ب) اگر $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ آن‌گاه طبق قسمت الف و قسمت پ قضیه (۱) داریم:

$$\lim_{x\to a}P(x)=a_n\lim_{x\to a}x^n+a_{n-1}\lim_{x\to a}x^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to a}a_0=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_0.=P(a)$$

پ) طبق قسمت (ث) قضیه (۱) و قسمت (ب) داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}P(x)}{\lim\limits_{x\to a}Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

تمرین در کلاس صفحه ۷۷:

۱- به کمک قضیه (۱) ثابت کنید:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ **اگر و تنها اگر** $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$.

پاسخ: ابتدا ثابت می‌کنیم اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-L=۰$$

برعکس: فرض کنیم $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$. در این صورت:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L+۱)=۰ \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-L+\lim_{x\to a}L=۰+L=L$$

۲- به کمک قضیه (۱) ثابت کنید:

الف) $\lim_{x\to ۲}۹x^۲=۳۶$

ب) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲}{x+۱}=\frac{۴}{۳}$

پ) $\lim_{x\to ۱}(x^۲+۱)(x^۲+x)=۴$

پاسخ:

الف) $\lim_{x\to ۲}۹x^۲=(\lim_{x\to ۲}۹)(\lim_{x\to ۲}x)^۲=۹\times ۲^۲=۳۶$

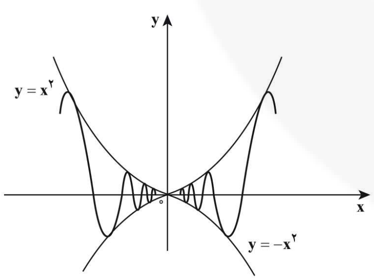
ب) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲}{x+۱}=\frac{\lim_{x\to ۲}x^۲}{\lim_{x\to ۲}(x+۱)}=\frac{(\lim_{x\to ۲}x)^۲}{\lim_{x\to ۲}(x)+\lim_{x\to ۲}۱}=\frac{۲^۲}{۲+۱}=\frac{۴}{۳}$

پ) $\lim_{x\to ۱}(x^۲+۱)(x^۲+x)=\lim_{x\to ۱}(x^۲+۱).\lim_{x\to ۱}(x^۲+x)=(\lim_{x\to ۱}x^۲+\lim_{x\to ۱}۱)(\lim_{x\to ۱}x^۲+\lim_{x\to ۱}x)=((\lim_{x\to ۱}x)^۲+۱)((\lim_{x\to ۱}x)^۲+۱)$

$=(۱+۱)(۱+۱)=۴$

مثال صفحه ۷۸: نشان دهید: $\lim_{x\to ۰}x^۲\sin\frac{۱}{x}=۰$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که چون $\lim_{x\to ۰}\sin\frac{۱}{x}$ موجود نیست، نمی‌توان گفت:

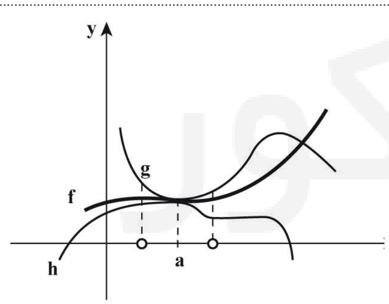


$$\lim_{x\to ۰}x^۲\sin\frac{۱}{x}=\lim_{x\to ۰}x^۲\times\lim_{x\to ۰}x^۲\times\lim_{x\to ۰}\sin\frac{۱}{x}$$

ولی به علت این که $-۱\le\sin\frac{۱}{x}\le ۱$ ، پس همان‌طور که در شکل روبه‌رو هم مشاهده می‌شود، $-x^۲\le x^۲\sin\frac{۱}{x}\le x^۲$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم $\lim_{x\to ۰}x^۲=\lim_{x\to ۰}(-x)^۲=۰$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۰}x^۲\sin\frac{۱}{x}=۰$$

قضیه ۲ صفحه ۷۸: هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a ، (به جز احتمالاً در خود a) $h(x)\le f(x)\le g(x)$ و نیز $\lim_{x\to a}h(x)=L=\lim_{x\to a}g(x)$ آن‌گاه: $\lim_{x\to a}f(x)=L$.



پاسخ: اثبات قضیه فشردگی: باید نشان دهیم که برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و $a_n\neq a$ ، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگراست.

می‌دانیم برای هر دنباله $\{a_n\}$ که به a همگراست، به ازای nهای به اندازه کافی بزرگ، a_n در یک همسایگی محذوف a قرار می‌گیرد. بنابراین:

$$\lim_{n\to +\infty}h(a_n)=\lim_{n\to +\infty}g(a_n)=L\ ,\ h(a_n)\le f(a_n)\le g(a_n)$$

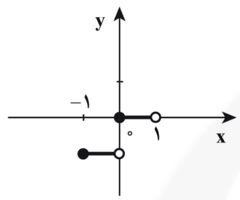
پس طبق قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$ ، بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

مثال صفحه ۷۹: مثال‌هایی از توابع کراندار:

الف) تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش کراندار است، زیرا به ازای هر $x\in D_f$ ، $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$

ب) تابع $f(x)=[x]$ بر مجموعه $A=\{x\in\mathbb{R}, -1<x<1\}$ کراندار است، زیرا به ازای هر $x\in A$ ، $f(x)$ یا صفر است و یا ۱- ، پس $|f(x)|\le 1$.

پاسخ:



تمرین در کلاس صفحه ۷۹:نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ در دامنه‌اش کراندار است.

پاسخ: ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم: $1-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1$

بنابراین $D_f=[-1,1]$، از طرفی:

$$x\in D_f \Rightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow 0\le x^2\le 1 \Rightarrow 0\ge -x^2\ge -1 \Rightarrow 1\ge 1-x^2\ge 0 \Rightarrow 0\le\sqrt{1-x^2}\le 1 \Rightarrow 0\le f(x)\le 1$$

یعنی تابع $f(x)$ در دامنه‌اش کراندار می‌باشد.

قضیه ۳ صفحه ۸۰:اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$

پاسخ: اثبات قضیه ۳: طبق تعریف حد به ازای هر دنباله $\{a_n\}$ که همگرا به a باشد و $a_n\ne a$ داریم $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=0$ و برای تابع g که در یک همسایگی محذوف a کراندار است، عدد مثبتی مانند M وجود دارد که $|g(a_n)|\le M$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می‌شود که دنباله $\{f(a_n)g(a_n)\}$ همگرا به صفر است. بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

مثال صفحه ۸۰: بنا بر قضیه (۳) داریم:

۱) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\sin\frac{1}{x-1}=0$

زیرا: $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ **و** $-1\le\sin\frac{1}{x-1}\le 1$ **یعنی تابع** $g(x)=\sin\frac{1}{x-1}$ **کراندار است.**

۲) $\lim\limits_{x\to 0} x^2[x]=0$

زیرا: $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ **و تابع** $g(x)=[x]$ **در یک همسایگی محذوف صفر و به شعاع مثلاً $r=1$ کراندار است.**

تمرین در کلاس صفحه ۸۰:

۱- نشان دهید که اگر $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

پاسخ: می‌دانیم $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$. از طرفی طبق فرض $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to a} -|f(x)|=0$ می‌شود. پس بنا به قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ است.

۲- اگر به ازای هر $x\ne 0$ داشته باشیم $3-x^2\le f(x)\le 3+x^2$، مطلوب است $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

پاسخ: چون $3-x^2\le f(x)\le 3+x^2$ و $\lim\limits_{x\to 0} 3-x^2=\lim\limits_{x\to 0} 3+x^2=3$ پس طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$ می‌باشد.

۳- تابع دیریکله با ضابطه $D(x)=\begin{cases}1 & ,\ x\ \text{گویا}\\ 0 & ,\ x\ \text{اصم}\end{cases}$ **داده شده است. ثابت کنید** $\lim\limits_{x\to 0} xD(x)=0$.

پاسخ: چون تابع دیریکله کراندار است $(|D(x)|\le 1)$ و $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ طبق قضیه ۳ داریم:

$$\lim_{x\to 0} xD(x)=0\times \text{کراندار}=0$$

مثال صفحه ۸۱: طبق قاعده ریشه‌گیری داریم:

۱) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-2}{3x^2-2}}=\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\dfrac{1}{5}$

۲) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt[3]{\dfrac{x-6}{x^2+2}}=\sqrt[3]{\dfrac{-1}{27}}=\dfrac{-1}{3}$

تمرین در کلاس صفحه ۸۱: مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{\dfrac{x+15}{2x^2-1}}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[4]{\frac{x+15}{2x^2-1}}=\sqrt[4]{\lim_{x\to 1}\frac{x+15}{2x^2-1}}=\sqrt[4]{\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+15)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-1)}}=\sqrt[4]{\frac{16}{1}}=2$$

مثال صفحه ۸۲: تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,\ x\le 1\\ x^2+1 & ,\ x>1\end{cases}$ **را در نظر بگیرید. به کمک تعریف حد راست ثابت کنید** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$.

پاسخ: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد $(a_n\neq 1)$ که مقادیر آن همگی از ۱ بزرگ‌تر باشند، آن‌گاه:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(a_n^2+1)=1+1=2$$

پس طبق تعریف $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

تمرین در کلاس صفحه ۸۳: به کمک تعریف حد راست ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد که تمام جملاتش مثبت است $(a_n>0)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ در این صورت:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\overset{a_n>0}{=\!=}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_n}=1$$

پس بنا به تعریف حد راست، $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$.

مثال صفحه ۸۳: تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,\ x\le 1\\ x^2+1 & ,\ x>1\end{cases}$ **را در نظر گرفته و** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ **را به کمک تعریف حد چپ به دست آورید.**

پاسخ: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد $(a_n\neq 1)$ که مقادیر آن همگی از ۱ کوچک‌تر باشند، آن‌گاه:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(2a_n-1)=2-1=1$$

پس طبق تعریف $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

تمرین در کلاس صفحه ۸۳: به کمک تعریف ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ **موجود و مساوی عدد حقیقی L باشند، آن‌گاه** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **موجود و مساوی L است.**

پاسخ: چون $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ موجود است پس برای هر دنباله $\{a_n\}$ دنباله دلخواه که همگرا به ۱ باشد و $a_n > a$ دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگراست و چون $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ پس برای هر دنباله $\{a_n\}$ دنباله دلخواه که همگرا به ۱ باشد و $b_n < a$ دنباله $\{f(b_n)\}$ به L همگراست. حال فرض کنید $\{c_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد $(c_n \neq ۱)$ چه جملات $\{c_n\}$ کوچکتر از a باشد و چه بزرگتر با توجه به مطالب فوق $\{f(c_n)\}$ به L همگرا می‌شود. بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و برابر L می‌باشد.

مثال صفحه ۸۴: ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$ ، که در آن، $\left[\frac{۱}{x}\right]$ جزء صحیح $\frac{۱}{x}$ است.

پاسخ: می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی S ، $S-۱<[S]\le S$ و با انتخاب $S=\frac{۱}{x}$ ، $x \neq ۰$ داریم:

$$\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]\le\frac{۱}{x} \quad (۱)$$

رابطه (۱) را برای دو حالت زیر در نظر می‌گیریم:

۱) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x>۰$ ضرب می‌کنیم.

$$۱-x<x\left[\frac{۱}{x}\right]\le ۱$$

چون $\lim\limits_{x\to ۰^+} ۱=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}(۱-x)=۱$ ، بنا بر قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

۲) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x<۰$ ضرب می‌کنیم.

$$۱\le x\left[\frac{۱}{x}\right]<۱-x$$

چون $\lim\limits_{x\to ۰^-} ۱=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}(۱-x)=۱$ ، بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$

تمرین در کلاس صفحه ۸۴: نشان دهید: $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}$ موجود نیست.

پاسخ: فرض کنیم $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n=\frac{۱}{n}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی $b_n=-\frac{۱}{n}$ باشد، در این صورت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به صفر همگرا هستند. از طرفی:

$$\lim_{n\to +\infty} f(a_n)=\lim_{n\to +\infty}\frac{|a_n|}{a_n}=\lim_{n\to \infty}\frac{\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n}}=۱$$

$$\lim_{n\to +\infty} f(b_n)=\lim_{n\to +\infty}\frac{|b_n|}{b_n}=\lim_{n\to +\infty}\frac{-\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n}}=-۱$$

و چون حدها با هم برابر نشد، پس بنا به تعریف حد $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

نتیجه صفحه ۸۴: نامساوی $|\sin x|\le|x|$ به ازای هر x (برحسب رادیان) برقرار است.

برهان: نامساوی به ازای $x=۰$ می‌شود $۰\le۰$ که این هم درست است و به ازای $۰<|x|<\frac{\pi}{۲}$ ، نامساوی به خاطر (۱) برقرار می‌باشد و نامساوی به ازای $|x|\ge\frac{\pi}{۲}$ نیز واضح است که برقرار است، زیرا $|\sin x|\le ۱$

مثال صفحه ۸۵: به کمک تعریف حد ثابت کنید: اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

پاسخ: اثبات: دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و برای هر عدد طبیعی n، $a_n\neq a$ را در نظر بگیرید؛ در این صورت:

$$|\sin a_n-\sin a|=۲\left|\sin\frac{a_n-a}{۲}\cos\frac{a_n-a}{۲}\right|\leq ۲\left|\sin\frac{a_n-a}{۲}\right|\leq|a_n-a|$$

بنابراین $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin a_n=\sin a$ در نتیجه طبق تعریف حد، $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

تمرین در کلاس صفحه ۸۵:

۱- ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

پاسخ: دنباله‌ی دلخواه $\{a_n\}$ که $a_n\neq a$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ را در نظر می‌گیریم:

$$|\cos a_n-\cos a|=\left|-۲\sin\frac{a_n-a}{۲}\sin\frac{a_n+a}{۲}\right|\leq ۲\left|\sin\frac{a_n-a}{۲}\right|\leq ۲\left|\frac{a_n-a}{۲}\right|=|a_n-a|$$

چون دنباله‌ی $\{a_n\}$ به a همگراست، پس برای هر $\varepsilon>۰$، $M\in\mathbb{N}$ موجود است که برای $n\geq M$، $|a_n-a|<\varepsilon$ بنابراین برای همین M، $|\cos a_n-\cos a|<\varepsilon$ و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\cos a_n=\cos a$ و بنا به تعریف حد:

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos x$$

۲- ثابت کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$ و $a\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\cot x=\cot a$ و $a\neq k\pi$ (k عدد صحیح است.)

پاسخ:

الف) $$\lim_{x\to a}\tan x=\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a$$

ب) $$\lim_{x\to a}\cot x=\lim_{x\to a}\frac{۱}{\tan x}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to a}\tan x}\overset{\text{با توجه به الف}}{=\!=\!=}\frac{۱}{\tan a}=\cot a$$

اکنون به کمک قضیه فشردگی درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ را ثابت می‌کنیم.

اثبات: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to ۰}\cos x=\cos ۰=۱$ و برای هر x که $۰<|x|<\frac{\pi}{۲}$ ، $\cos x<\frac{\sin x}{x}<۱$ و یا:

$$۰<۱-\frac{\sin x}{x}<۱-\cos x$$

از طرفی $\lim\limits_{x\to ۰}۰=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰}(۱-\cos x)=۱-۱=۰$ پس بنا بر قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\left(۱-\frac{\sin x}{x}\right)=۰$$

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$

مثال صفحه ۸۶: حد تابع $f(x)=\frac{\sin ax}{bx}$ را وقتی $x\to ۰$ بیابید. $(a,b\neq ۰)$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to ۰}\frac{a}{b}\times\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}$$

زیرا، وقتی $x\to ۰$، $t=ax\to ۰$ و اما $\lim\limits_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}=۱$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

مثال صفحه ۸۶: حد تابع $f(x)=\frac{\sin(\sin x)}{x}$ را وقتی $x\to 0$ بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ که در این تساوی $x\neq 0$ و $\sin x\neq 0$ بنابراین:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

زیرا اگر $x\to 0$ داریم $t=\sin x\to 0$

تمرین در کلاس صفحه ۸۶: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x(\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\times\frac{3}{2}\times\cos 2x}=1\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3}{2}\cos x}=\frac{2}{3}$$

مثال صفحه ۸۷: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+5x+2}{x+2}$ را بیابید.

پاسخ: چون $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)=0=\lim\limits_{x\to -2}(2x^2+5x+2)$ بنابراین به ازای $x\neq -2$ و یا $x+2\neq 0$ داریم:

$$\frac{2x^2+5x+2}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(2x+1)}{\cancel{(x+2)}}=2x+1$$

در نتیجه:
$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+5x+2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2x+1)=-4+1=-3$$

تمرین در کلاس صفحه ۸۷: مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

مثال صفحه ۸۷: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}-3}$ را بیابید.

پاسخ: اگر x به صفر میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند. بنابراین به ازای $x\neq 0$ داریم:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}=\frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2+9-9}=3+\sqrt{x^2+9}$$

در نتیجه:
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}(3+\sqrt{x^2+9})=3+\sqrt{9}=6$$

تمرین در کلاس صفحه ۸۷: مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=2\times 3=6$$

مثال صفحه ۸۸: مقدار $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}$ را بیابید.

پاسخ: وقتی x به π میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند، پس به ازای $x \neq \pi$ (حد را در یک همسایگی محذوف π حساب می‌کنیم.)

$$\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{\cancel{(1+\cos x)}(1-\cos x+\cos^2 x)}{\cancel{(1+\cos x)}(1-\cos x)} = \frac{1-\cos x+\cos^2 x}{1-\cos x}$$

عامل $(1+\cos x) \neq 0$ از صورت و مخرج ساده شده است، زیرا $x \neq \pi$ است. در نتیجه:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x+\cos^2 x}{1-\cos x} = \frac{1+1+1}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$$

تمرین در کلاس صفحه ۸۸: مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{2}$$

مسائل صفحه ۸۸:

۱- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید:

الف) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

پاسخ: فرض : $\{a_n\} \to 2$ دلخواه و $a_n \neq 2$: $\lim_{n\to\infty} a_n^3 = 2^3 = 8 \Rightarrow \lim_{x\to 2} x^3 = 8$

ب) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$

پاسخ: فرض : $\{a_n\} \to 3$ دلخواه , $a_n \neq 3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-9}{a_n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-3)(a_n+3)}{a_n-3} = 3+3=6 \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

ت) $\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}\ ,\ a \geq 0$

پاسخ: فرض : $\{a_n\} \to a$ دلخواه , $a_n \neq a$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a} \Rightarrow \lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$$

پ) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0$

پاسخ: فرض : $\{a_n\} \to 1$ دلخواه , $a_n \neq 1$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0$$

ث) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} x^2[x] = 0$

پاسخ: فرض : $\{a_n\} \to \frac{1}{2}$, $a_n > \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2[a_n] = 0 \times \text{کراندار} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} x^2[x] = 0$$

۲- الف) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد، ولی نه $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد نه $\lim_{x\to a} g(x)$.

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x\le -1\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}-1 & x>1\\ 1 & x\le -1\end{cases}$$

ب) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ وجود داشته باشد، ولی نه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد، نه $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x\le -1\end{cases} \ , \ g(x)=\begin{cases}-1 & x>1\\ 1 & x\le -1\end{cases}$$

۳- با استفاده از قضایای حد، حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+3-3)(x+3+3)}{x}=6$$

ب) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=4$$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\cot x$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0}\tan x\cot x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=1$$

ت) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x+[x]-[2x])$

پاسخ: $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x+[x]-[2x])=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-0+(-1)-(-1))=1$

۴- آیا عددی مانند a وجود دارد که مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^2+ax-4}$ ، عددی مخالف صفر باشد؟ مقدار a و مقدار این حد را پیدا کنید.

پاسخ: چون صورت کسر به ازای $x=2$ برابر صفر است و حد می‌خواهد غیرصفر باشد، پس باید مخرج نیز به ازای $x=2$ صفر شود. بنابراین $2(2^2)+2a-4=0$ و در نتیجه $a=-2$. حال تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^2-2x-4}\times\frac{x+1+\sqrt{4x+1}}{x+1+\sqrt{4x+1}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-(4x+1)}{2(x+1)(x-2)(x+2\sqrt{4x+1})}$$

۵- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$

پاسخ:

$$\sqrt{ax+b}-2=0 \xrightarrow{x=0} \sqrt{b}-2=0 \Rightarrow b=4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}\times\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)}=\frac{a}{4}\Rightarrow\frac{a}{4}=1\Rightarrow a=4$$

۶- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$ را حساب کنید.

پاسخ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(3x-1)-(3x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x+1-3x-1}{x}=-6$

۷- $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\left(۱-x\left[\frac{۱}{x}\right]\right)$ **را حساب کنید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\left(۱-x\left[\frac{۱}{x}\right]\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x}-\left[\frac{۱}{x}\right]\right)\xlongequal{t=\frac{۱}{x}}\lim_{t\to\infty}(t-[t])$$ وجود ندارد.

۸- $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}-\frac{x+۲}{x^۲+x}\right)$ **را حساب کنید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}-\frac{x+۲}{x^۲+x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳x-۴}{x(x-۲)}-\frac{x+۲}{x(x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳x^۲-x-۴-x^۲+۴}{x(x-۲)(x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۲x-۱)}{x(x-۲)(x+۱)}$$

۹- مقدار $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sin ۴x(\cot ۲x-\cot x)$ **را بیابید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰^+}\sin ۴x(\cot ۲x-\cot x)=\lim_{x\to ۰^+}\sin ۴x\left(\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\sin ۴x\left(\frac{\sin x\cos ۲x-\sin ۲x\cos x}{\sin ۲x.\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\sin ۴x\left(\frac{\sin(x-۲x)}{\sin ۲x.\sin x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin ۴x(-\sin x)}{\sin ۲x.\sin x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-\sin ۴x}{\sin ۲x}=-۲$$

۱۰- مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^+}\frac{|\cos\pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ **را بیابید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^+}\frac{|\cos\pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^+}\frac{\left|\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\pi x\right)\right|(۱+\sqrt{۲x})}{(۱-\sqrt{۲x})(۱+\sqrt{۲x})}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^+}\frac{-\left(\frac{\pi}{۲}-\pi x\right)(۱+\sqrt{۲x})}{۱-۲x}=-۴\pi$$

۱۱- تابع $f(x)=\left[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}\right]$ **در چند نقطه دارای حد است؟ (چرا؟)**

پاسخ:

$$f(x)=\left[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}\right]=\left[\frac{۴(x^۲+۱)-۱}{x^۲+۱}\right]=\left[۴-\frac{۱}{x^۲+۱}\right]=۳$$

یعنی تابع $f(x)=۳$ می‌باشد که در تمام نقاط دارای حد است.

۱۲- حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x^۲(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x^۲(۱+\cos x)}=\frac{۱}{۲}$$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x.\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}-2\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\times 2x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-4$$

ت) $\lim\limits_{x\to 4}(2-\sqrt{x})\tan\dfrac{\pi x}{8}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 4}(2-\sqrt{x})\tan\frac{\pi x}{8}\overset{t=x-4}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}(2-\sqrt{t+4})\tan\frac{\pi(t+4)}{8}=\lim_{t\to 0}(2-\sqrt{t+4})\times\left(-\cot\left(\frac{t\pi}{8}\right)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2+\sqrt{t+4}}\times\frac{\cos\left(\frac{t\pi}{8}\right)}{\sin\frac{t\pi}{8}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2+\sqrt{t+4}}\times\cos\frac{t\pi}{8}\times\frac{\frac{t\pi}{8}}{\sin\frac{t\pi}{8}}\times\frac{1}{\frac{t\pi}{8}}=\frac{2}{\pi}$$

۱۳- با استفاده از قضیه فشردگی مقدار $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$ را بیابید (می‌توانید راه‌حل ساده‌تری برای این مسأله، ارائه دهید؟)

پاسخ: می‌دانیم تابع cos کراندار است و $-1\le\cos\frac{1}{x}\le+1$ بنابراین $-x^2\le x^2\cos\frac{1}{x}\le x^2$ می‌باشد. از طرفی $\lim\limits_{x\to 0}-x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

بنابراین طبق قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$.

راه دوم: $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0$

۱۴- با فرض این که $f(x)=\left[x+\frac{1}{3}\right]+[3x]$، دنباله $\left\{f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)\right\}$ به چه عددی همگراست؟

پاسخ:

$$f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)=\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right]+\left[1+\frac{3}{n}\right]=\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{3}\right]+\left[1+\frac{3}{n}\right]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{3}\right]+\left[1+\frac{3}{n}\right]=1$$

۱۵- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع‌های زیر در نقطه‌ی داده شده، حدشان موجود نیست.

الف) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$

پاسخ:

$$a_n=1+\frac{1}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\left|1+\frac{1}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}-1}=1$$

$$b_n=1-\frac{1}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\left|1-\frac{1}{n}-1\right|}{1-\frac{1}{n}-1}=-1$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ موجود نمی‌باشد.

ب) $g(x)=\cos\frac{1}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$

پاسخ:

$$a_n=1+\frac{1}{2n\pi}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}+1-1}\right)=\cos 2n\pi=1$$

$$b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+1-1}\right)=\cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 1}\cos\frac{1}{x-1}$$ موجود نمی‌باشد.

۱۶- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید، تابع زیر (تابع دیریکله) در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

$$D(x)=\begin{cases}0 & ,\ \text{گویا } x\\ 1 & ,\ \text{گنگ } x\end{cases}$$

پاسخ: فرض کنیم a عددی دلخواه باشد. طبق قضیه صفحه ۴۵ دنباله‌ای مانند $\{u_n\}$ از اعداد گویا وجود دارد که $u_n\to a$. در این صورت $D(u_n)=0\Rightarrow D(u_n)\to 0$. با فرض $b_n=u_n+\frac{\sqrt{2}}{n}$ همه جملات این دنباله گنگ می‌شوند و $D(b_n)=1$ و در نتیجه $D(b_n)\to 1$. بنابراین $\lim_{x\to a}D(x)$ موجود نمی‌باشد.

۱۷- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، نشان دهید تابع زیر در نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$، دارای حد است و مقدار حد را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & ,\ \text{گویا } x\\ 3x+1 & ,\ \text{گنگ } x\end{cases}$$

پاسخ:

فرض: $\{a_n\}\to\frac{1}{2}$ ، دلخواه ، $a_n\neq\frac{1}{2}$

$$f(a_n)=\begin{cases}a_n+2 & ,\ \text{گویا } a_n\\ a_nx+1 & ,\ \text{گنگ } a_n\end{cases}$$

بنابراین وقتی u_n گویا باشد $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)=\frac{5}{2}$ و وقتی u_n گنگ باشد $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(3a_n+1)=\frac{5}{2}$.

بنابراین $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\frac{5}{2}$ و در نتیجه $\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\frac{5}{2}$ موجود می‌باشد.

مثال صفحه ۹۲: آیا مقداری برای **m** یافت می‌شود که تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & ,\ x\neq 0\\ m & ,\ x=0\end{cases}$ در $x=0$ **پیوسته باشد؟**

پاسخ: می‌دانیم $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$ ، در نتیجه $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ وجود ندارد. لذا m را هر عددی که بگیریم، شرط (ب) در تعریف پیوستگی برقرار نیست و نمی‌توان تابع f را در $x=0$ پیوسته کرد.

تمرین در کلاس صفحه ۹۲: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & ,\ x\neq 1\\ 4 & ,\ x=1\end{cases}$ **را در $x=1$ بررسی کنید.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2 \quad \Rightarrow$$ f در $x=1$ پیوسته نیست.

$$f(1)=4$$

مثال صفحه ۹۳: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & , \ x\neq 0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است.

پاسخ: $x=0$ نقطه درونی دامنه f است و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$ پس تابع f در $x=0$ پیوسته است.

تمرین در کلاس صفحه ۹۳: نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}\\ f(1)=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow$$ f در $x=1$ پیوسته است.

مثال صفحه ۹۴: تابع $f(x)=[x]$ در هر عدد صحیح n از راست پیوسته است اما از چپ ناپیوسته است.

پاسخ: زیرا:

$$\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n=f(n)$$

اما:

$$\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1\neq f(n)$$

تمرین در کلاس صفحه ۹۴: پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در نقطه $x=\pi$ بررسی کنید. (پیوستگی راست و چپ)

پاسخ:

$$\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+}[\sin x]=[0^-]=-1$$

$$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}[\sin x]=[0^+]=0$$

$f(\pi)=[\sin\pi]=0\Rightarrow$ f در $x=\pi$ پیوستگی چپ دارد.

تمرین در کلاس صفحه ۹۵: پیوستگی تابع $f(x)=x-\sqrt{4-x^2}$ را در نقاط انتهایی دامنه آن بررسی کنید.

پاسخ: دامنه‌ی این تابع $[-2,2]$ می‌باشد. پس منظور از پیوستگی f در نقاط انتهایی، بررسی پیوستگی راست در $x=-2$ و پیوستگی چپ در $x=2$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x-\sqrt{4-x^2}=-2\\ f(-2)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$ f در $x=-2$ پیوستگی راست دارد.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x-\sqrt{4-x^2}=2\\ f(2)=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$ f در $x=2$ پیوستگی چپ دارد.

مثال صفحه ۹۵: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در دامنه‌اش یعنی $[0,+\infty)$ بررسی کنید.

پاسخ: تابع f در نقطه‌ی انتهایی چپ دامنه‌اش یعنی 0 پیوسته است، زیرا در آن‌جا از راست پیوسته است ($\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=f(0)$) همچنین f در هر نقطه‌ی $c>0$ پیوسته است، زیرا $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$

تمرین در کلاس صفحه ۹۵: پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

پاسخ: دامنه‌ی این تابع $(1,+\infty)$ است. این تابع در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$.

قضیه ۱ صفحه ۹۶: فرض کنید D اشتراک دامنه تابع‌های f و g باشد و f و g هر دو در نقطه a پیوسته باشند و c عددی ثابت باشد، آن‌گاه

تابع‌های زیر نیز در a پیوسته‌اند.

الف) $f+g$ ب) $f-g$ پ) cf ت) $f.g$ ث) $\frac{f}{g}$ به شرطی که $g(a)\neq 0$

پاسخ:

برهان: همه‌ی حکم‌ها به سادگی از حکم‌های مشابه برای محاسبه حد مجموع و حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت در قضیه (۱) نتیجه می‌شوند.

برای نمونه قسمت (ث) را ثابت می‌کنیم.به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از نقاط D که همگرا به a است، داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a) \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} g(x_n)=g(a)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f(a)}{g(a)} \ , \ g(a)\neq 0$$

پس طبق تعریف (۳) تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی a پیوسته است.

نکته: عکس این قضیه همواره درست نیست.

مثال صفحه ۹۶: **تابع‌های** $f(x)=\begin{cases}1 & , \text{x گویا}\\ 0 & , \text{x گنگ}\end{cases}$ **و** $g(x)=\begin{cases}0 & , \text{x گویا}\\ 1 & , \text{x گنگ}\end{cases}$ **در** $x=0$ **حد ندارند و بنابراین در** $x=0$ **پیوسته نیستند. اما برای هر** $x\in\mathbb{R}$ **،** $(f.g)(x)=0$ **و این تابع ثابت در هر نقطه‌اش، حد آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، پس در تمام نقاط از جمله** $x=0$ **پیوسته است.**

مثال صفحه ۹۶: **دو تابع مثال بزنید که هر دو در نقطه‌ی a ناپیوسته باشند، ولی مجموع آن‌ها در a پیوسته باشد.**

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\leq a\\ -1 & x>a\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}-1 & x\leq a\\ 1 & x>a\end{cases}$$

قضیه ۲ صفحه ۹۷:

الف) هر چندجمله‌ای همه‌جا پیوست است، یعنی روی $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ **پیوسته است.**

ب) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

پاسخ:

برهان: الف) هرچندجمله‌ای تابعی است به شکل $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ که در آن $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ عددهای ثابت‌اند.

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to c} a_0=a_0$$

$$\lim_{x\to c} x^m=c^m \ , \ m=1,2,3,\ldots,n$$

این تساوی به معنی آن است که تابع $f(x)=x^m$ تابعی است پیوسته در نتیجه بنا بر قسمت (پ) قضیه (۱) $g(x)=ax^m$ نیز تابعی است پیوسته.

چون $P(x)$ مجموع تابع‌هایی پیوسته نظیر $g(x)=ax^m$ و تابعی ثابت است بنا بر قسمت الف قضیه (۱) نتیجه می‌شود تابع چندجمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) هر تابع گویا تابعی است به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای‌اند و دامنه f مجموعه $D=\{x\in\mathbb{R} \mid Q(x)\neq 0\}$ است.

از طرفی بنا بر قسمت الف قضیه (۲)، $P(x)$ و $Q(x)$ در همه جا پیوسته‌اند، در نتیجه طبق قسمت (ث) قضیه (۱) تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

مثال صفحه ۹۸: تابع $f(x)=\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}$ **روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟پاسخ:** دامنه تابع f، مجموعه‌ی $D=\mathbb{R}-\{-1,+1\}$ است، بنابراین طبق قضیه (۱) تابع f به جز در نقاطی که مخرج آن صفر می‌شود، همه‌جا پیوسته است در نتیجه تابع روی بازه‌های $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ پیوسته است.

تمرین در کلاس صفحه ۹۸: تابع $f(x)=\frac{2}{x-3}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$ **روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟**

پاسخ: دامنه‌ی تابع برابر $\mathbb{R}-\{3\}$ است.

$$\begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x^2+x+1=0 : \Delta<0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین تابع روی بازه‌های زیر پیوسته است: $(3,+\infty)\,,\,(-\infty,3)$

مثال صفحه ۹۸: **فرض کنید** $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$، $f(0)$ **را چنان تعریف کنید که تابع f در** $x=0$ **پیوسته باشد.**

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}$$

وقتی x به صفر میل می‌کند، داریم $(1-\cos x)\neq 0$ پس:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1+1=2$$

با انتخاب $f(0)=2$ تابع f در صفر پیوسته می‌شود.

تمرین در کلاس صفحه ۹۹: تابع $f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}$ **در چه نقاطی پیوسته است؟**

پاسخ: $f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$ و می‌دانیم توابع $\sin x$ و $\cos x$ همواره پیوسته‌اند. پس کافی‌است ریشه‌های مخرج را محاسبه کنیم و آن‌ها را حذف کنیم:

$$\cos x(1+\sin x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

بنابراین $f(x)$ در همه نقاط دامنه‌اش یعنی هوه نقاط به جز $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ پیوسته است

مثال صفحه ۹۹: می‌دانیم تابع $f(x)=|x|$ **همه‌جا پیوسته است و** $\lim_{x\to a} g(x)=b$ **بنابراین طبق قضیه (۳) داریم:**

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(b)=|b|$$

از قضیه (۳) نتیجه می‌گیریم که ترکیب دو تابع پیوسته، خود تابعی پیوسته است. و به بیان دقیق‌تر، اگر تابع g در نقطه a و تابع در g(a) پیوسته باشد، آن‌گاه تابع fog در نقطه a پیوسته است.

مثال صفحه ۹۹: نشان دهید تابع $y=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$ **همه‌جا پیوسته است.**

پاسخ: مخرج کسر زیر رادیکال همواره مخالف صفر است $(\Delta=1-4<0)$. بنابراین تابع گویای $g(x)=\frac{x-2}{x^2+x+1}$ همه‌جا پیوسته است.

از طرفی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ همواره پیوسته است $(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\sqrt[3]{a})$.پس ترکیب دو تابع پیوسته f و g یعنی تابع $f(g(x))=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x^2+x+1}}$ همه‌جا پیوسته است.

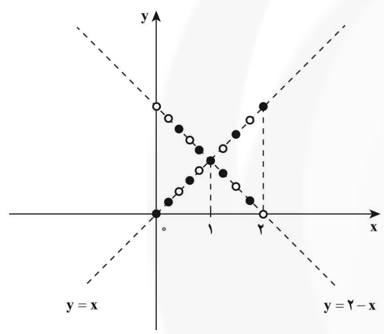
تمرین در کلاس صفحه ۱۰۰: **تابع $f(x)=\tan\sqrt{x}$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟**

پاسخ: تابع $\tan x$ در همه نقاط به جز $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ و تابع $g(x)=\sqrt{x}$ در $x\geq 0$ پیوسته است بنابراین اگر $\sqrt{x}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, x\geq 0$ در این صورت ترکیب دو تابع یعنی تابع $f(x)=\tan\sqrt{x}$ در تمام این نقاط که دامنه‌اش است پیوسته است. (تابع در تمام نقاط دامنه پیوسته است. در نقاط دیگر تابع تعریف نمی‌شود.)

مثال صفحه ۱۰۰: **تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:**

$$f(x)=\begin{cases} x & , \text{x گویا} \\ 2-x & , \text{x گنگ} \end{cases}$$

نقاطی از تابع f را تعیین کنید که تابع در آن نقاط پیوسته باشد.



پاسخ: می‌دانیم که در هر بازه‌ی باز از اعداد حقیقی هم اعداد گویا وجود دارد و هم اعداد گنگ، بنابراین نقاط تابع f یا روی خط $y=x$ (وقتی که x گویا باشد) و یا روی خط $y=2-x$ (وقتی که x اصم باشد) قرار دارند.

با مشاهده نمودار به صورت نقطه‌چین تابع در شکل روبه‌رو هرچه‌قدر به نقطه‌ی $(1,1)$ نزدیک‌تر شویم، نقطه‌چین‌ها به هم متراکم‌تر خواهندشد و به نظر می‌رسد که تابع در $x=1$ حد دارد و برای اثبات درستی حدس خود، از تعریف حد به شرح زیر استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $a\in R$ ، $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد به طوری که $a_n\to a$ و زیردنباله‌ی $\{b_n\}$ که همه‌ی جملات آن از اعداد گویا و زیردنباله‌ی $\{c_n\}$ که همه‌ی جملات آن از اعداد گنگ تشکیل شده است را انتخاب می‌کنیم.

$$f(b_n)=b_n \ , \ f(c_n)=2-c_n$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n)=a \ , \ \lim_{n\to+\infty} f(c_n)=2-a$$

شرط این که $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ موجود باشد آن است که $a=2-a$ یا $a=1$ پس $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=1$ و در نتیجه دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(1)=1$ همگراست و تابع f در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است.

برای حل مثال بالا از قضیه زیر استفاده شده است.

قضیه **اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا به a باشد، هر زیردنباله‌ی آن همگرا به a است و بالعکس.**

به عنوان مثال دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ که به ۱ همگراست، هر زیردنباله آن مانند $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ نیز به ۱ همگراست

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n-1+1}=1 \ , \ \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n+1}=1\right)$$

تمرین در کلاس صفحه ۱۰۱: **ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \text{x گویا} \\ 0 & , \text{x گنگ} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است.**

پاسخ: اگر $a_n\to 0$ و a_n گویا باشد در این صورت $f(a_n)=a_n^2\to 0$ و اگر a_n گنگ باشد در این صورت $f(a_n)=0\to 0$ پس f در $x=0$ پیوسته است

مسائل صفحه ۱۰۲:

۱- نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & , x>۱\\ x^{۲} & , x\le ۱\end{cases}$$

پاسخ: پیوستگی تابع را در $x=۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲,\ \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(x^{۲})=۱, f(۱)=۱$$

بنابراین تابع f در تمام نقاطش به جز $x=۱$ پیوسته است.

۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x} & , x\neq ۰\\ a & , x=۰\end{cases}$ **داده شده است. مقدار a را چنان انتخاب کنید که تابع در $x=۰$ پیوسته باشد.**

پاسخ:

$$a=f(۰)=\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۲-۲}{x(\sqrt[۳]{(x+۸)^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴)}=\frac{۱}{۴+۴+۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

۳- به ازای چه مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , x\neq ۰\\ a & , x=۰\end{cases}$ **در $x=۰$ پیوسته است.**

پاسخ:

$$a=f(۰)=\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}=\text{کراندار}\times ۰=۰$$

۴- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع f در نقطه $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}a+[x] & , x<۰\\ b & , x=۰\\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}} & , x>۰\end{cases}$$

پاسخ:

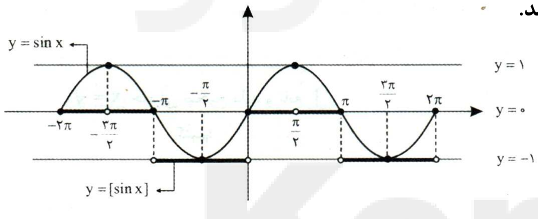
$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}}\times\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱+\cos x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x(\sqrt{۱+\cos x})}{\sqrt{۱-\cos^{۲} x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x(\sqrt{۱+\cos x})}{|\sin x|}=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{۱+\cos x}=\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(a+[x])=a-۱\ ,\ f(۰)=b\Rightarrow a-۱=b=\sqrt{۲}\Rightarrow a=\sqrt{۲}+۱\ ,\ b=\sqrt{۲}$$

۵- تابع $f(x)=\left[\dfrac{x}{۲}\right]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

پاسخ: میدانیم تابع براکتی در نقاط صحیح ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)=\left[\dfrac{x}{۲}\right]$ در نقاط $x=۲k, k\in Z$ ناپیوسته است.

۶- نقاط پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ مشخص کنید.



پاسخ: با توجه به نمودار تابع که در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده است مشخص می‌شود که این تابع در نقاط $x=-\dfrac{۳\pi}{۲},-\pi,۰,\pi,۲\pi$ ناپیوسته است. پس مجموعه نقاط پیوستگی تابع برابر $[-۲\pi,۲\pi]-\{-\dfrac{۳\pi}{۲},-\pi,۰,\pi,۲\pi\}$ می‌باشد.

۷- اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، ثابت کنید تابع $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

پاسخ: فرض کنیم f در a پیوسته باشد. چون قدرمطلق تابعی پیوسته است، داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Rightarrow \lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a} f(x)|=|f(a)|$$

پس $|f|$ نیز در a پیوسته است.

۸- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی مجموع آن‌ها در آن نقطه پیوسته باشد.

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x\ge a\\ -۱ & x<a\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}-۱ & x\ge a\\ ۱ & x<a\end{cases}$$

$$f(x)+g(x)=۰$$

۹- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی ضرب آن‌ها در آن نقطه پیوسته باشد.

پاسخ: دو تابع f(x) و g(x) هر دو در $x=۱$ ناپیوسته‌اند ولی تابع $f(x).g(x)$ در $x=۱$ پیوسته است:

$$f(x)=[x]$$

$$g(x)=[x]-۱$$

$$f(x).g(x)=[x]([x]-۱) \xrightarrow{\text{شرایط پیوستگی را بررسی می‌کنیم}} \begin{cases}\lim_{x\to ۱^+} f(x)g(x)=۱(۱-۱)=۰\\ \lim_{x\to ۱^-} f(x)g(x)=۰(۰-۱)=۰\end{cases} , \ f(۱).g(۱)=۰$$

۱۰- با برهان خلف، ثابت کنید: اگر تابع f در نقطه‌ی a پیوسته و تابع g در نقطه‌ی a ناپیوسته باشد، آن‌گاه $f+g$ در a ناپیوسته است.

پاسخ: برهان خلف: فرض کنیم f+g و f در $x=a$ پیوسته باشد. در این صورت تفاضل این دو تابع یعنی تابع g نیز در $x=a$ پیوسته می‌شود که خلاف فرض است. پس فرض خلف باطل و f+g در $x=a$ ناپیوسته می‌باشد.

۱۱- با استفاده از قضایای حد و پیوستگی ثابت کنید تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

پاسخ:

اگر $a\notin Z$ در این صورت هر دو تابع $\sin\pi x$ و $[x]$ پیوسته می‌شوند پس حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی $f(x)=[x]\sin\pi x$ پیوسته می‌شود و چون در اطراف هر عدد $[x]$ کراندار است می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}[x]\sin\pi x=\text{کراندار}\times ۰=۰$$

اگر $a\in Z$ در این صورت هر دو تابع $\sin\pi x=۰$ و $۰=۰\times a$ و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}[x]\sin\pi x[a]\sin\pi a=a\times ۰=۰$.

بنابراین f همواره پیوسته ااست.

۱۲- تابع $f(x)=[x^۲]$ روی بازه $[۲,۲+k)$ پیوسته است. بزرگ‌ترین مقدار k را بیابید.

پاسخ: تابع براکت در نقاط غیر صحیح پیوسته نمی‌باشد پس کافی‌ست $x^۲$ در این بازه برابر هیچ عدد صحیحی نباشد. وقتی $x=۲$ دراین صورت $x^۲=۴$ می‌باشد. بنابراین $۲+k$ حداکثر برابر $\sqrt{۵}$ می‌باشد تا $x^۲<۵$ و در نتیجه $x\in[۲,۲+k)\Rightarrow ۴\le x^۲<۵$ ، $۲+k=\sqrt{۵}\Rightarrow k=\sqrt{۵}-۲$.

۱۳- تابع $f(x)=\begin{cases}۴ & , \ x^۲=|x|\\ x+۲ & , \ x^۲\ne|x|\end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

پاسخ: ابتدا معادله $x^۲=|x|$ را حل می‌کنیم. با توجه به نمودار این دو تابع جواب‌های $x=۰,۱,-۱$ به دست می‌آید. بنابراین و با محاسبه حد f در این نقاط نتیجه می‌شود تابع در هر سه نقطه ناپیوسته است.

۱۴- تابع $f(x)=\dfrac{۴-\sqrt{x+۳}}{\sqrt[۳]{x+۱}-۱}$ در چند نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟

پاسخ:

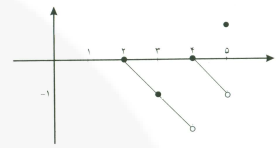
$$\begin{cases} x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳ \\ \sqrt[۳]{x+۱}-۱\neq ۰ \Rightarrow x+۱\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f=[-۳,۰)\cup(۰,+\infty)$$

و تابع در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

۱۵- نمودار تابع $f(x)=[x]-x+\sin\left(\frac{\pi}{۲}[x]\right)$ را در بازه‌ی $[۲,۵]$ رسم کرده و مشخص کنید، تابع در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است.

پاسخ:

$$f(x)=[x]-x+\sin\left(\frac{\pi}{۲}[x]\right)=\begin{cases} ۲-x+\sin(\frac{\pi}{۲}\times ۲) & ۲\leq x<۳ \\ ۳-x+\sin(\frac{۳\pi}{۲}\times ۲) & ۳\leq x<۴ \\ ۴-x+\sin(\frac{۴\pi}{۲}\times ۲) & ۴\leq x<۵ \\ ۱ & x=۵ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲-x & ۲\leq x<۳ \\ ۲-x & ۳\leq x<۴ \\ ۴-x & ۴\leq x<۵ \\ ۱ & x=۵ \end{cases}$$



بنابراین تابع در $x=۴,۵$ ناپیوسته است.

۱۶- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & , \ x^۲\geq ۲|x| \\ ۲|x| & , \ x^۲<۲|x| \end{cases}$ را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا ناحیه‌ها را مشخص می‌کنیم. $x^۲\geq ۲|x| \Rightarrow |x|^۲\geq ۲|x| \Rightarrow |x|^۲-۲|x|\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} |x|\leq ۰ \\ |x|\geq ۲ \end{cases}$. $|x|\leq ۰$ فقط وقتی برقرار است که $x=۰$ باشد و $|x|\geq ۲$ وقتی برقرار است که $x\geq ۲$ یا $x\leq -۲$. بنابراین تابه به شکل زیر در می‌آید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & , \ x\in(-\infty,-۲)\cup\{۰\}\cup(۲,+\infty) \\ ۲|x| & , \ x\in(-۲,۲)-\{۰\} \end{cases}$$

با به دست آوردن حد تابع f در نقاط $x=۰,-۲,۲$ دیده می‌شود که این تابع در همه جا پیوسته است.

۱۷- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع $f(x)=(x^۲-bx+a)\operatorname{sgn}(x^۲+x-۲)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. (sgn تابع علامت است.)

پاسخ:

ابتدا ظاهر تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=(x^۲-bx+a)\operatorname{sgn}(x^۲+x-۲)=\begin{cases} x^۲-bx+a & x^۲+x-۲>۰ \\ ۰ & x^۲+x-۲=۰ \\ -(x^۲-bx+a) & x^۲+x-۲<۰ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۲-bx+a & x\in(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty) \\ ۰ & x=۱,-۲ \\ -(x^۲-bx+a) & -۲<x<۱ \end{cases}$$

تابع باید در نقاط $x=۱,-۲$ پیوسته باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow ۱-b+a=-۱+b-a=۰ \\ &\lim_{x\to -۲^+} f(x)=\lim_{x\to -۲^-} f(x)=f(-۲)\Rightarrow ۴+۲b+a=-۴-۲b-a=۰ \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} b-a=۱ \\ ۲b+a=-۴ \end{cases} \Rightarrow a=-۲, b=-۱$$

مثال صفحه ۱۰۴: با استفاده از قضیه بولزانو ثابت کنید معادله $x^۴+x-۳=۰$ ریشه‌ای در بازه $(۱,۲)$ دارد.

پاسخ: تابع $f(x)=x^۴+x-۳$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که تابع چند جمله f که در هر نقطه از $\mathbb{R}$ یا بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است، پس در بازه $[۱,۲]$ نیز پیوسته است. از طرفی $f(۱)f(۲)<۰$ (چرا؟) بنابراین طبق قضیه بولزانو دست کم یک عدد c در بازه باز $(۱,۲)$ وجود دارد که $f(c)=۰$ یعنی c ریشه معادله $x^۴+x-۳=۰$ است.

تمرین در کلاس صفحه ۱۰۴: نشان دهید معادله $x-\cos x=۰$، ریشه‌ای در بازه $(۰,۱)$ دارد.

پاسخ:

$f(x) = x - \cos x$

$f(۰) = -۱\ ,\ f(۱) = ۱ - \cos ۱ > ۰ \ \Rightarrow\ f(۰)f(۱) < ۰ \xrightarrow{\text{طبق قضیه بولزانو}}$ f حداقل یک ریشه در $(۰,۱)$ دارد

مثال صفحه ۱۰۴: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین f(a) و f(b)، $(f(a) < f(b))$ و $g(x) = f(x) - k$. نشان دهید، وجود دارد $c \in (a,b)$ که $g(c) = ۰$.

پاسخ: طبق فرض داریم $g(a) = f(a) - k < ۰$ و $g(b) = f(b) - k > ۰$ و تابع g در بازه $[a,b]$ پیوسته است. (چرا؟) پس بنا بر قضیه بولزانو وجود دارد $c \in (a,b)$ که $g(c) = ۰$ و یا $f(c) = k$ ایده مثال فوق قضیه‌ی مقدار میانی است که در زیر بیان می‌شود.

مثال صفحه ۱۰۵: نشان دهید که خط $y = ۲$ نمودار تابع $f(x) = (x-۱)^۲(x-۳)^۲ + x$ را قطع می‌کند.

پاسخ: چون تابع چندجمله‌ای f در بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است، پس f در بازه $[۱,۳]$ نیز پیوسته است. از طرفی $f(۱) = ۱$ و $f(۳) = ۳$.
بنابراین طبق قضیه مقدار میانی خط $y = ۲$ که بین خطوط $y = ۱$ و $y = ۳$ قرار دارد نمودار f را قطع می‌کند.

تمرین در کلاس صفحه ۱۰۵:

آیا تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۴} + \sin \pi x + ۴$ در بازه $[-۲,۲]$ مقدار ۵ را می‌تواند داشته باشد؟

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^۳}{۴} + \sin\pi x + ۴ \\ y = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^۳}{۴} + \sin\pi x + ۴ = ۵ \ \Rightarrow\ \frac{x^۳}{۴} + \sin\pi x - ۱ = ۰$$

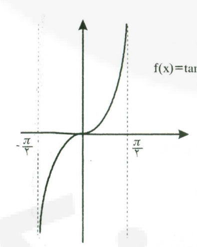
با فرض $g(x) = \frac{x^۳}{۴} + \sin\pi x - ۱$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ داریم:

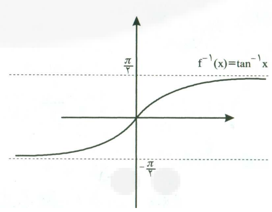
$$\begin{array}{l} g(-۲) = -۲ + ۰ - ۱ = -۳ \\ g(۲) = ۲ + ۰ - ۱ = ۱ \end{array} \ \Rightarrow\ g(-۲)g(۲) < ۰ \Rightarrow$$ g حداقل یک ریشه در بازه‌ی $[-۲,۲]$ دارد، بنابراین تابع f می‌تواند مقدار ۵ داشته باشد.

تمرین در کلاس صفحه ۱۰۶:

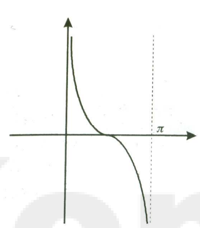
۱-نمودار و دامنه تابع وارون توابع زیر را در صفحه مختصات رسم کنید.

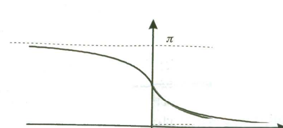
الف) $f(x) = \tan x\ ,\ -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$





ب) $g(x) = \cot x,\ ۰ < x < \pi$

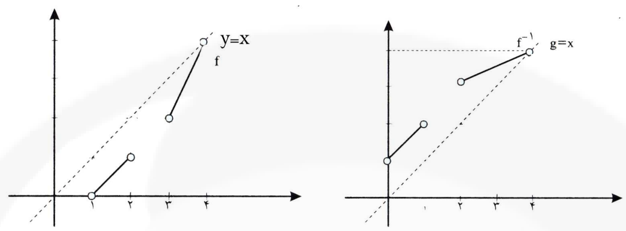




۱-فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x-1 & , 1<x<2 \\ 2x-4 & , 3<x<4 \end{cases}$ **، تابع f^{-1} در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟ نمودار f^{-1} را رسم کنید.**

f در $(1,2)\cup(3,4)$ پیوسته و یک به یک می‌باشد بنابراین تابع f^{-1} نیز پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & , 1<x<2 \\ 2x-4 & , 3<x<4 \end{cases}$$



با توجه به نمودار مشخص می‌شود که f^{-1} در تمام نقاط دامنه‌اش $(0,1)\cup(2,4)$ پیوسته می‌باشد.

۲-نشان دهید که معادله $x^3-x-1=0$ در بازه $[1,2]$ جواب دارد.

فرض کنیم $f(x)=x^3-x-1$ در این صورت تابع f در همه جا پیوسته و در نتیجه در بازه $[1,2]$ نیز پیوسته می‌باشد. **همچنین** $f(1)=1-1-1=-1<0$ و $f(2)=8-2-1=5>0$ **پس طبق قضیه بولزانو عددی مانند c موجود است که** $f(c)=0 \Rightarrow c^3-c-1=0$.

۳- نشان دهید معادله $x^5+x^4+2x^3-x+2=0$ در بازه $[-2,0]$ دارای جواب است.

پاسخ:

$$f(x)=x^5+x^4+2x^3-x+2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-32+16-16+2+2<0 \\ f(0)=2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)f(0)<0 \Rightarrow$$ f یک ریشه در بازه‌ی $[-2,0]$ دارد.

۴- ثابت کنید معادله‌ی $\sin x-x^2+x+1=0$ حداقل دو ریشه در بازه $[-\pi,\pi]$ دارد.

پاسخ:

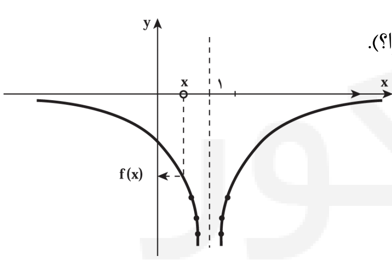
$$f(x)=\sin x-x^2+x+1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-\pi)=\sin(-\pi)-(-\pi)^2+(-\pi)+1=-\pi^2-\pi+1<0 \\ f(0)=1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ f یک ریشه در بازه‌ی $[-\pi,0]$ دارد.

۵- ثابت کنید که اگر P(x) یک چندجمله‌ای از درجه‌ی فرد باشد، آن‌گاه معادله $P(x)=0$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی است.

پاسخ: فرض کنید **P(x)** یک چندجمله‌ای از درجه فرد باشد. این تابع در همه جا پیوسته و بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می‌توان فرض کرد ضریب جمله‌ی پرتوان مثبت باشد. بنابراین $\lim_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$. بنابراین اعداد a و b وجود دارند که $P(a)>0$ و $P(a).P(b)<0$. پس بنا به قضیه بولزانو $P(x)$ دارای یک ریشه است.

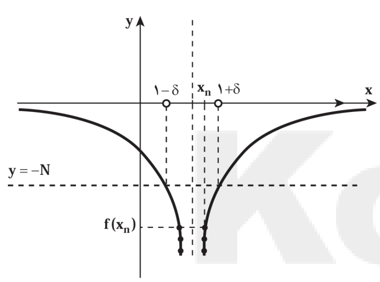
مثال صفحه ۱۰۹: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}+\infty$



پاسخ: به ازای هر دنباله $\{x_n\}$، $(x_n\neq 0)$ همگرا به صفر، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ است (چرا؟).

اگر رفتار تابع $f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ را در نزدیکی ۱ بررسی نماییم (شکل زیر) به این نتیجه می‌رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، مقدار $\frac{-1}{(x-1)^2}$ بدون هیچ محدودیتی و با مقادیر منفی کاهش می‌یابد.

و یا f(x) را می‌توان از هر عدد منفی کوچک‌تر کرد (f(x) به $-\infty$ میل می‌کند) به شرطی که x به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود.



این وضعیت تابع را در مجاورت $x=1$، روی نمودار تابع توضیح می‌دهیم. فرض کنید N یک عدد مثبت دلخواه است با رسم هر خط افقی $y=-N$ در شکل روبه‌رو یک همسایگی محذوف ۱ و به

شعاع $\delta > 0$ ایجاد می‌شود که برای هر $x_n \in D_f$ که در این همسایگی صدق کند، $f(x_n) < -N$ (x_n مقدار جمله‌ی nام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست.)

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد نامتناهی (حد منهای بی‌نهایت) می‌پردازیم.

مثال صفحه ۱۱۰: به کمک تعریف (۲) ثابت کنید: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

پاسخ: برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که همگرا به ۲ است و $x_n \neq 2$ داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{(x_n - 2)^2} = -\infty$$

زیرا وقتی دنباله $\{x_n\}$ به ۲ همگرا باشد، دنباله $\{(x_n - 2)^2\}$ با مقادیر مثبت به صفر همگراست. بنابراین دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ واگراست.

اگر به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به a که $x_n > a$، $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

تمرین در کلاس صفحه ۱۱۰: عبارت‌های ۱ و ۳ و ۴ را مشابه تعریف ۱ و ۲ تعریف کنید.

پاسخ:

فرض $D \subset R$ دامنه تابع f باشد. اگر به ازای هر دنباله از نقاط دامنه مانند $\{x_n\}$ که $\{x_n\} \to a$ و $x_n > a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

اگر به ازای هر دنباله از نقاط دامنه مانند $\{x_n\}$ که $\{x_n\} \to a$ و $x_n > a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

فرض $D \subset R$ دامنه تابع f باشد. اگر به ازای هر دنباله از نقاط دامنه مانند $\{x_n\}$ که $\{x_n\} \to a$ و $x_n < a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

فرض $D \subset R$ دامنه تابع f باشد. اگر به ازای هر دنباله از نقاط دامنه مانند $\{x_n\}$ که $\{x_n\} \to a$ و $x_n < a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

مثال صفحه ۱۱۱: حدهای نامتناهی زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ ب) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x-4}$

پاسخ: الف) وقتی $x \to 0$، حد صورت کسر و حد مخرج کسر صفر است و مخرج کسر یعنی x^2 در یک همسایگی محذوف صفر مثبت است. بنابراین طبق قسمت الف قضیه (۱) داریم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} = +\infty$$

ب) وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به ۱ میل کند، حد صورت کسر ۳ است و حد مخرج کسر یعنی $(x-1)(x+4)$ صفر است و مخرج کسر به ازای $x < 1$، مثلاً در بازه باز $(1-\delta, 1)$ منفی است، بنابراین طبق قسمت ب قضیه (۱) داریم:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x-4} = -\infty$$

تمرین در کلاس صفحه ۱۱۲: حدهای زیر را حدس زده و با استفاده از قضیه (۱) جواب حد را پیدا کنید.

۱) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \frac{x+1}{x+2}$ ۲) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1}$ ۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ ۴) $\lim\limits_{x \to 0^+} \cot x$

پاسخ:

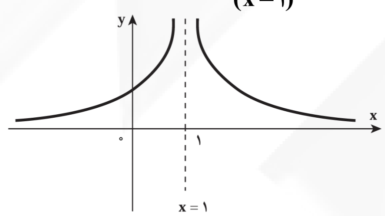
$$۱)\ \lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{-۲+۱}{\circ^+}=-\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{[x]-۱}{x^۲-۱}=\frac{-۱}{\circ^-}=+\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{\circ^+}=+\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to\circ^+}\cot x=\lim_{x\to\circ^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\circ^+}{۱}=\circ$$

مثال صفحه ۱۱۳: خط $x=۱$ مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ است، زیرا $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=+\infty$



تمرین در کلاس صفحه ۱۱۳:

۱- مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases}x>\circ\\ x-۱>\circ\Rightarrow x>۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x>۱\Rightarrow D_f=(۱,+\infty)$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\circ^+}=+\infty$$

پس $x=۱$ مجانب قائم تابع است.

۲- مجانب‌های قائم تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۱}$ **ب)** $g(x)=\tan x\ ,\ -\pi\le x\le\pi$

پاسخ:

الف) $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۱}$

ابتدا ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲-۱=\circ\Rightarrow x=\pm۱$$

$\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x+۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱}{\circ^+}=+\infty\Rightarrow$ $x=۱$ مجانب قائم است.

$\lim\limits_{x\to -۱}f(x)=\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x+۱}{(x-۱)(x+۱)}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow$ $x=-۱$ مجانب قائم نیست

دقت کنید که دیگر نیازی به محاسبه $\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)$ نداریم.

ب) $g(x)=\tan x\ ,\ -\pi\le x\le\pi$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{-\pi \le x \le \pi} x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

بنابراین $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = -\frac{\pi}{2}$ مجانب قائم است

تمرین در کلاس صفحه ۱۱۴: تعریف مشابه برای حد در منفی بی‌نهایت را فرمول‌بندی کنید.

پاسخ: فرض کنید f تابعی باشد که در بازه $(-\infty, c)$ تعریف شده و L عدد حقیقی باشد. گوییم حد تابع f وقتی x به $-\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط f مانند $\{x_n\}$ واگرا به $-\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به L باشد.

مثال صفحه ۱۱۴: ثابت کنید، اگر r یک عدد گویای مثبت باشد، آن‌گاه:

الف) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ ب) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

پاسخ: الف) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $+\infty$ است، داریم: $f(x_n) = \frac{1}{(x_n)^r}$

دنباله $\{f(x_n)\}$ همگرا به صفر است. پس $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

ب) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ است، داریم: $f(x_n) = \frac{1}{(x_n)^r}$

و $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$. بنابراین $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

مثال صفحه ۱۱۵: مقدار $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x}$ را حساب کنید.

پاسخ: وقتی x بزرگ می‌شود صورت و مخرج کسر هر دو بزرگ می‌شود، در نتیجه معلوم نیست مقادیر این کسر چگونه تغییر می‌کنند. بنابراین تابع کسری را به شکل دیگری می‌نویسیم. ابتدا بزرگترین درجه x را از صورت و مخرج فاکتور گرفته و با هم ساده می‌کنیم، (چون مقدارهای بزرگ x برای محاسبه این حد به کار می‌روند پس می‌توان فرض کرد $x \neq 0$). در نتیجه:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \to +\infty}\left(2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \to +\infty}\left(3 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} 2 + 5 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to +\infty} 3 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

مثال صفحه ۱۱۶: $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ را حساب کنید.

پاسخ: وقتی x بزرگ می‌شود، $\sqrt{x^2 + x}$ نیز بزرگ می‌شود و مقدار تفاضل آن‌ها را نمی‌توان به آسانی تشخیص داد، به همین دلیل ابتدا تابع را کمی تغییر شکل می‌دهیم. برای این کار تابع را در مزدوج صورت یعنی $(\sqrt{x^2 + x} + x) \neq 0$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^۲+x}-x}{۱}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲+x}-x)(\sqrt{x^۲+x}+x)}{۱\times(\sqrt{x^۲+x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+x}\quad (|x|=x\,,\,x>\circ)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\circ}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین در کلاس صفحهٔ ۱۱۶:

۱- مطلوبست محاسبه:

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۳+x+۱}{x^۳-x+۲}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۳+x+۱}{x^۳-x+۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۳\left(۵+\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳}\right)}{x^۳\left(۱-\frac{۱}{x^۲}+\frac{۲}{x^۳}\right)}=۵$$

ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۳x^۲+۱}}{۲x-۳}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۳x^۲+۱}}{۲x-۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{۳+\frac{۱}{x^۲}}}{۲x-۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{۳}}{۲x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پ) $\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{۱}{x}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{۱}{x}=\cos(\circ^-)=۱$$

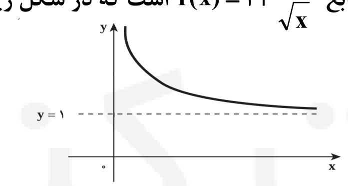
۲- اگر به ازای هر $x>۱\circ$، $\frac{۲x-۱}{x}<f(x)<\frac{۲x^۲+۳x}{x^۲}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲+۳x}{x^۲}=۲$$

و با توجه به این که برای $x>۱\circ$، $\frac{۲x-۱}{x}<f(x)<\frac{۲x^۲+۳x}{x^۲}$ است، پس بنا بر قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=۲$ می‌باشد.

مثال صفحهٔ ۱۱۷: خط $y=۱$ مجانب افقی تابع $f(x)=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}$ است که در شکل زیر نشان داده شده است. زیرا: $\lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)=۱$



پرسش صفحهٔ ۱۱۷: خط مجانب قائم تابع $y=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$x\geq\circ$

$\lim_{x\to\circ^+}۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}=۱+\frac{۱}{\circ^+}=+\infty\ \Rightarrow\ x=\circ$ معادله مجانب قائم

تمرین در کلاس صفحه ۱۱۸:

مجانب‌های افقی تابع‌های زیر را به دست آورید.

۱) $y=\frac{2x+1}{x-2}$ ۲) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ۳) $y=\frac{\sin x}{x}$

پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2 \Rightarrow y=2$$ مجانب افقی

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1 \Rightarrow y=1$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1 \Rightarrow y=-1$$ مجانب افقی

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)(\sin x)=0\times \text{کراندار}=0 \Rightarrow y=0$$ مجانب افقی

تمرین در کلاس صفحه ۱۱۹:

با توجه به تعریف ۶، نمادهای $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ را به طور مشابه تعریف کنید.

پاسخ:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ واگرا به $-\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $-\infty$ باشد.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ واگرا به $-\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ باشد.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ واگرا به $+\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $-\infty$ باشد.

مثال صفحه ۱۱۹: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim_{x\to-\infty}cx^2=-\infty$ ، (c عدد ثابت منفی)

پاسخ: به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از دامنه تابع $f(x)=cx^2$ که واگرا به $-\infty$ است، داریم: $f(x_n)=cx_n^2$

می‌دانید که دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $-\infty$ است ($c<0$ و دنباله $\{x_n^2\}$ واگرا به $+\infty$ است) بنابراین: $\lim_{x\to-\infty}cx^2=-\infty$

مثال صفحه ۱۱۹: $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=\lim_{x\to-\infty}-2x=+\infty$$

تذکر مهم: همواره نمی‌توان از قاعده‌های حدگیری برای حدهای نامتناهی استفاده کرد. زیرا $+\infty$ و یا $-\infty$ عدد نیستند.

مثلاً نوشتن این که $\lim_{x\to+\infty}x^3-x=\lim_{x\to+\infty}x^3-\lim_{x\to+\infty}x=+\infty-\infty$ غلط است ($+\infty-\infty$ را نمی‌توان تعریف کرد). با این وجود، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to+\infty}x^3-x=\lim_{x\to+\infty}x(x^2-1)=+\infty$$

مثال صفحه ۱۲۱: مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{x^3-3x^2+1}{x^2+x-1}$ را (در صورت وجود) به دست آورید.

پاسخ: چون درجه صورت یعنی ۳ بزرگ‌تر از درجه مخرج کسر است، ابتدا عبارت صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^{3}-3x^{2}+1 & x^{2}+x-1 \\ \cline{2-2} \pm x^{3}\pm x^{2}\pm x & x-4 \\ \cline{1-1} -4x^{2}+x+1 & \\ \pm 4x^{2}\pm 4x\pm 4 & \\ \cline{1-1} 5x-3 & \end{array}$$

در نتیجه $f(x)=x-4+\dfrac{5x-3}{x^{2}+x-1}$

چون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-3}{x^{2}+x-1}=0$ (چرا؟) پس $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-4)]=0$ (همین نتیجه برای حالت $x\to-\infty$ نیز درست است.)

بنابراین خط $y=x-4$ مجانب مایل تابع f می‌باشد.

پرسش صفحه ۱۲۱: با توجه به راه‌حل مثال بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت یک تابع کسری گویا با چه شرایطی مجانب مایل دارد؟ و سپس راه‌حلی کوتاه برای محاسبه مجانب مایل تابع کسری گویا بیان کنید.

پاسخ: وقتی درجه صورت از مخرج دقیقاً ۱ واحد بیشتر باشد مجانب مایل داریم. برای به دست آوردن این مجانب صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم. عبارت خارج‌قسمت همان مجانب مایل است.

مثال صفحه ۱۲۲: معادله مجانب مایل تابع $f(x)=2x+\sqrt{x^{2}+3}$ را وقتی $x\to+\infty$ به دست آورید.

پاسخ:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^{2}+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{3}{x^{2}}}\right)=3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(2x+\sqrt{x^{2}+3}-3x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{2}+3}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}+3-x^{2}}{\sqrt{x^{2}+3}+x}=0$$

بنابراین خط $y=3x$ مجانب مایل تابع است.

تمرین در کلاس صفحه ۱۲۲: در مثال بالا معادله مجانب مایل را وقتی $x\to-\infty$، به دست آورید.

پاسخ:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{x^{2}+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{3}{x^{2}}}\right)=2-1=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{x^{2}+3}-x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^{2}+3})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2}-x^{2}-3}{x-\sqrt{x^{2}+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^{2}}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{2x}=0$$

مسائل مجانب‌ها صفحه ۱۲۲:

الف) معادله مجانب‌های مایل و افقی تابع‌های زیر را به دست آورید.

۱) $y=\dfrac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}$ ۲) $y=x-\sqrt{x^{2}+2x}$ ۳) $y=\dfrac{x^{3}+x+1}{x^{2}+3}$ ۴) $y=x+\sqrt{4x^{2}+x+1}$

پاسخ:

۱) $y=\dfrac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\infty$$

پس مجانب افقی ندارد. در ادامه مجانب مایل را محاسبه می‌کنیم:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

بنابراین خط $y=x$ مجانب مایل تابع در $+\infty$ است. همچنین:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}{x}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}-x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}-x+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

بنابراین خط $y=-x$ هم مجانب مایل تابع در $-\infty$ است.

۲) $y=x-\sqrt{x^2+2x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=-1\right)$

پس مجانب افقی تابع $y=-1$ است. از طرفی $\lim_{x\to-\infty}x-\sqrt{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}x-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}=-\infty$ پس ممکن است تابع در $-\infty$ مجانب مایل داشته باشد:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+2x}-2x)=\lim_{x\to-\infty}-x-\sqrt{x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{-x+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-2x}=1$$

بنابراین خط $y=2x+1$ مجانب مایل تابع در $-\infty$ است.

۳) $\mathbf{y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2+3}}$

چون درجه صورت از مخرج دقیقاً ۱ واحد بیشتر است، پس مجانب مایل داریم. برای به دست آوردن این مجانب صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^{۳}+x+۱ & x^{۲}+۳ \\ \cline{2-2} \pm x^{۳} \pm ۳x & x \\ \hline -۲x+۱ & \end{array}$$

در نتیجه $y = x + \dfrac{-۲x+۱}{x^{۲}+۳}$

چون $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-۲x+۱}{x^{۲}+۳} = ۰$ پس خط $y = x$ مجانب مایل تابع f می‌باشد و مجانب افقی نداریم.

۴) $y = x + \sqrt{۴x^{۲}+x+۱}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+|۲x|\sqrt{۱+\frac{۱}{۴x}+\frac{۱}{۴x^{۲}}}}{x} = ۳$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}-۳x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}-۲x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^{۲}+x+۱-۴x^{۲}}{\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}+۲x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|۲x|+۲x} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین خط $y = ۳x + \frac{۱}{۴}$ مجانب مایل تابع در $+\infty$ است. همچنین:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|۲x|\sqrt{۱+\frac{۱}{۴x}+\frac{۱}{۴x^{۲}}}}{x} = -۱$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}+x) = \lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{۴x^{۲}-۴x^{۲}-x+۱}{۲x-\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{۲x-|۲x|} = -\frac{۱}{۴}$$

پس خط $y = -x - \frac{۱}{۴}$ هم مجانب مایل تابع در $-\infty$ است.

ب) اندازه زاویه بین دو خط مجانب مایل تابع $y = \sqrt{x^{۲}+۴x}$ را حساب کنید.

پاسخ:

ابتدا شیب مجانب‌های مایل تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{۱+\frac{۴}{x}}}{x} = ۱$$

$$m_{۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^{۲}+۴x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{۱+\frac{۴}{x}}}{x} = -۱$$

چون حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر ۱- است پس مجانب‌ها بر هم عمودند.

مسائل صفحه ۱۲۳:

۱- حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{\sqrt{x^{۲}-۴}}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} \dfrac{[x]-۲}{x-۲}$ پ) $\lim\limits_{x\to \pi^{+}} \cot x$

ت) $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \tan x$ ث) $\lim_{x\to 4^-} \frac{x-2}{x^2-2x-8}$ ج) $\lim_{x\to 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot x}$ ح) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

پاسخ:

الف) $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

پ) $\lim_{x\to\pi^+} \cot x = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ت) $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to 4^-} \frac{x-2}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to 4^-} \frac{x-2}{(x-4)(x+2)} = \frac{2}{0^-\,(6)} = -\infty$

ج) $\lim_{x\to 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4} : \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(-1)^3}{(x+2)(x-2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(-1)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4} = -\infty$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ح) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

۲- در نظریه‌ی نسبیت جرم ذره‌ای با سرعت v برابر است با $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ **که در آن m جرم سکون ذره است و c سرعت نور وقتی که** $v \to c^-$ **چه اتفاقی می‌افتد؟**

پاسخ: وقتی $v \to c^-$ آن‌گاه $1-\frac{v^2}{c^2} \to 0^+$ میل می‌کند. پس مخرج به صفر نزدیک شده و در نتیجه کل کسر بسیار بزرگ شده و به $+\infty$ میل می‌کند. یعنی با نزدیک شدن سرعت ذره به سرعت نور، جرم ذره نیز افزایش می‌یابد و به بی‌نهایت میل می‌کند!

۳- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-3}$ ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5x-1}{2x^2-1}$ پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x-1}$

ت) $\lim_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+2x})$ ث) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$ ج) $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3}\right]$

چ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x\tan^{-1} x}{2-x}$ ح) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x)$ خ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}$

د) $\lim_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x+۱}{x-۳}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(۲+\dfrac{۱}{x}\right)}{x\left(۱-\dfrac{۳}{x}\right)}=۲$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^۲+۵x-۱}{۲x^۲-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^۲\left(۱+\dfrac{۵}{x}-\dfrac{۱}{x^۲}\right)}{x^۲\left(۲-\dfrac{۱}{x^۲}\right)}=\dfrac{۱}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x+۱}{x^۲+۳x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(۲+\dfrac{۱}{x}\right)}{x^۲\left(۱+\dfrac{۳}{x}-\dfrac{۱}{x^۲}\right)}=۰$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^۲+۲x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^۲+۲x})(x+\sqrt{x^۲+۲x})}{x+\sqrt{x^۲+۲x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^۲-(x^۲+۲x)}{x+\sqrt{x^۲+۲x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۲x}{x+|x|\sqrt{۱+\dfrac{۲}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۲x}{۲x}=-۱$

ث) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲+۳x}-\sqrt{x^۲-۳x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^۲+۳x}-\sqrt{x^۲-۳x})(\sqrt{x^۲+۳x}+\sqrt{x^۲-۳x})}{\sqrt{x^۲+۳x}+\sqrt{x^۲-۳x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^۲+۳x)-(x^۲-۳x)}{|x|\sqrt{۱+\dfrac{۳}{x}}+|x|\sqrt{۱-\dfrac{۳}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۶x}{-۲x}=-۳$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^۲+x+۱}{x^۲+x+۳}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^۲+x+۳-۲}{x^۲+x+۳}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[۱-\dfrac{۲}{x^۲+x+۳}\right]=[۱^-]=۰$

چ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\tan^{-۱}x}{۲-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-\dfrac{\pi}{۲}\right)}{۲-x}=\dfrac{\pi}{۲}$

ح) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt[۳]{۸x^۳+۲x^۲}-۲x)(\sqrt[۳]{(۸x^۳+۲x^۲)^۲}+۲x\sqrt[۳]{۸x^۳+۲x^۲}+۴x^۲)}{\sqrt[۳]{(۸x^۳+۲x^۲)^۲}+۲x\sqrt[۳]{۸x^۳+۲x^۲}+۴x^۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۸x^۳+۲x^۲-۸x^۳}{\sqrt[۳]{۶۴x^۶+۳۲x^۵+۴x^۴}+۲x(۲x)\sqrt{۱+\dfrac{۱}{۴x}}+۴x^۲}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x^۲}{۴x^۲+۴x^۲+۴x^۲}=\dfrac{۱}{۶}$

خ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^۲+۱}}{x+\sqrt{x^۲+۳}}\times\dfrac{x-\sqrt{x^۲+۱}}{x-\sqrt{x^۲+۱}}\times\dfrac{x-\sqrt{x^۲+۳}}{x-\sqrt{x^۲+۳}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^۲-(x^۲+۱))(x-\sqrt{x^۲+۳})}{(x^۲-(x^۲+۳))(x-\sqrt{x^۲+۱})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۱\left(x-|x|\sqrt{۱+\dfrac{۳}{x^۲}}\right)}{-۳\left(x-|x|\sqrt{۱+\dfrac{۱}{x^۲}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-(x+x)}{-۳(x+x)}=\dfrac{۱}{۳}$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x+۱}-\sin\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}۲\sin\dfrac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}}{۲}\cos\dfrac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲}=\lim\limits_{x\to+\infty}۲\sin\dfrac{۱}{۲(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})}\cos\dfrac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲}=۰$

زیرا $\cos$ تابعی کراندار است و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{۱}{۲(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})}=۰$. دقت کنید که از فرمول مثلثاتی $\sin a-\sin b=۲\sin\dfrac{a-b}{۲}\cos\dfrac{a+b}{۲}$ استفاده کردیم.

۴- حدود زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+x-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x(2-0+0)}{(1+0-0)}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x}=+\infty$

۵- ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$ و سپس $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+[x]\right)$ را پیدا کنید.

پاسخ: فرض کنیم g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد. بنابراین در این همسایگی اعداد t و t' موجودند، به طوری که $t<g(x)<t'$ باشد. از طرفی چون $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ ، پس برای دنباله‌ی دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a و $a_n\neq a$ است، داریم $\lim\limits_{n\to +\infty}f(a_n)=+\infty$. بنابراین:

$$\forall k>0\ \exists M\in\mathbb{N}: n\geq M\ \Rightarrow\ f(a_n)>k+|t|\ \Rightarrow\ f(a_n)+g(a_n)>k+|t|+g(a_n)>k+|t|+t\geq k$$

پس $\lim\limits_{n\to +\infty}f(a_n)+g(a_n)=+\infty$. پس بنا به تعریف حد، $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$.

$$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+[x]\right)=+\infty$$

زیرا $[x]$ در همسایگی ۰ کراندار است و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ است.