

کانال تلگرام

کلاس یازدهم

11

جهت عضویت مستقیم همین
الان روی لینک کلیک کنید

@YAZDAHO

@YAZDAHO

↑ روی لینک کلیک کن ↑

اولين كانال تلگرامي انشا

انتنا ها ابتدایه فنا یایه دوازدهم



جهت عضویت روی

لینک کلیک کنید

@ENSHA

@ENSHA

کانال تلگرام

گام به گام



جهت عضویت مستقیم همین
الان روی لینک کلیک کنید

@gambeg

@gambeg

↑ روی لینک کلیک کن ↑

جبر و معادله

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۲ معادلات درجه دوم

۳ معادلات گویا و گنگ

۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۵ آشنایی با هندسه تحلیلی

فصل



آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله های حسابی و هندسی آشنا شدید و می دانید که مجموعه اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می باشد. چگونگی به دست آوردن مجموع اعداد طبیعی 1 تا n می تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبه مجموع جملات هر دنباله حسابی برسیم.

فعالیت

تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه رو آرایش شده اند. تعداد این دگمه ها چندتا است؟

۱ یکی از راه ها، شمارش تعداد دگمه ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.

در این شکل تعداد ردیف ها ۱۰ و تعداد دگمه ها در هر ردیف برابر شماره ردیف در شکل فوقی و ۱۰ در شکل پایین است، پس تعداد کل دگمه ها برابر ۱۰۰ است و چون تعداد دگمه های آبی و قرمز برابر است پس:

$$\text{تعداد کل دگمه ها} = \frac{\text{تعداد کل دگمه ها}}{2} = \frac{100}{2} = 55$$

۳ برای محاسبه مجموع اعداد طبیعی 1 تا n مراحل زیر را انجام داده ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_n$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ابتدا اعداد طبیعی 1 تا n را نوشته و ترتیب صعودی سپس n تا 1 را زیر مجموع 1 تا n قرار می دهیم طوری که مجموع هر دو عدد زیر هم $n+1$ می شود و چون کل اعداد n تا هستند حال ما n تا $n+1$ داریم پس $2S = n(n+1)$ می شود



فصل اول: جبر و معادله ۳

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

❖ مثال: روی محیط دایره ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

❖ حل: نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19}{2} (1 + 19) = 190$$

❖ تذکر: این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایقی را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود. ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مدام و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید: چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد: حل شد! معلم با تعجب گفت: این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت: خیلی هم آسان بود. سپس گفت: اول چنین نوشتیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

و بعد چنین:

$$100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 3 + 2 + 1$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم:

$$101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ به دست آوردیم که حاصل ضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

دنباله حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-2)d, a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-2)d) + (a+(n-1)d)$$

❖ حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را به دست آورید. نتیجه خواهید گرفت:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$S = a + (a+d) + \dots + a + (n-1)d$
 $S = a + (n-1)d + \dots + a + (n-1)d$
 $2S = (2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \dots + (2a + (n-1)d)$
 $2S = n [2a + (n-1)d]$

❖ مثال: مجموع صد جمله اول دنباله حسابی ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، را به دست

آورید.

❖ حل: جمله اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده

از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت:

$$S_{100} = \frac{100}{2} [(2 \times 3) + (99 \times 4)] = 50 \times 402 = 20100$$

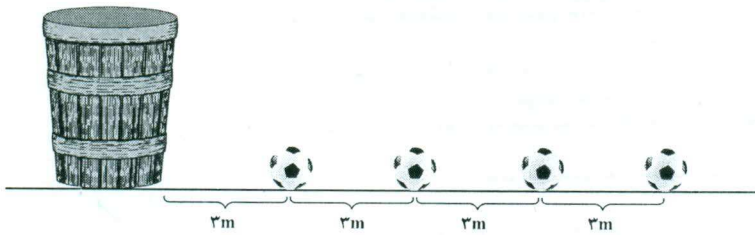
۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

۲ مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + \underbrace{a + (n-1)d}_{a_n}] = \frac{n}{2}[a + a_n]$

$12, 16, 20, \dots, 94$ $n = \frac{94-12}{4} = 22$ $S_n = \frac{22 \times [12 + 94]}{2} = 1188$

مثال: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سید نیز ۳ متر است (شکل زیر). دوندۀ ای باید از کنار سید شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سید حمل کند و به سید بپردازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سید بپردازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دوندۀ در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سید انداخته است؟



حل: دوندۀ برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سید باید مسافت $3 + 3 = 6$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سید باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

۱ قدر نسبت و مجموع n جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. ($a \neq 0$)

$$a, a, a, \dots, a \quad q=1 \quad S_n = na$$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. ($q \neq 1$)

$$a, aq, aq^2, \dots$$

الف) جمله n ام دنباله چیست؟ $a_n = aq^{n-1}$

(ب) فرض می‌کنیم مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی S_n باشد:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم:

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم:

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

کارد کلاس

خواندنی



در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «آثار الباقیه عن القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی

است که جمله اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد 18446744073709551615 بدست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد: برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانه گندم و برای خانه سوم چهار دانه گندم و همین‌طور برای هر خانه دو برابر خانه پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم بدست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $2^{64} - 1$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید: در سطح کره زمین 2305 کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه 10000 رود خارج شود در طول هر رودخانه 1000 قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل 1000 قاطر باشند و همراه هر قاطر 8 کیسه گندم قرار داده باشیم که در هر کیسه 10000 دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots \quad S = \frac{1}{8} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 0.1269758$$

مثال: برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیو به لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هر یک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم تا 97% کاهش یابد؟

حل: اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند $(\frac{1}{2})$ و... بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

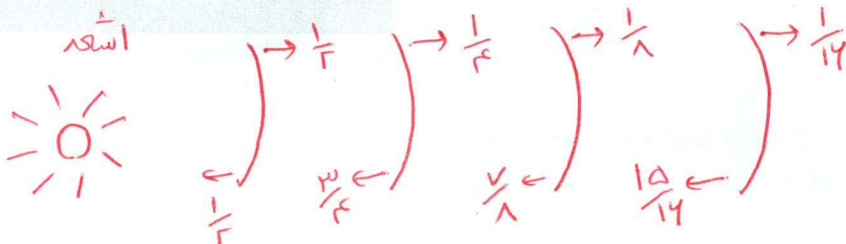
این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل حداقل 97% درصد شود.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \approx 33.33$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $2^6 = 64$ درمی‌یابیم که حداقل مقدار n برای برقراری نامساوی فوق برابر با 6 خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.



روش تصویری

$$\frac{1(1-2^{44})}{1-2} = 2^{44} - 1 = 18\ 44\ 47\ 44\ 40\ 73\ 70\ 95\ 51\ 41\ 4$$

کاردر کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

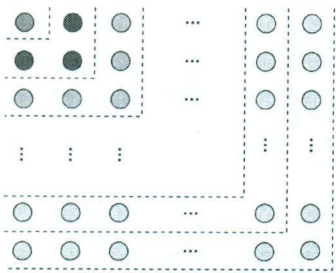
الف) این جایزه چند گرم می شود؟ $(1+2+4+8+\dots+2^{43})$ گرم

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد. چون ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر است با ۱۰^{۱۸} گرم

$$\alpha=1 \quad q=2 \quad n=44 \quad S_n = a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) \rightarrow 1 \left(\frac{1-2^{44}}{1-2} \right) = S_{44}$$

$$S_{44} = 2^{44} - 1 > 2^{43} = (2^7)^6 > 100^6 = 10^{18}$$

تمرین



۱ در دنباله حسابی ... ۵, ۸, ۱۱, ... حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟
 $a=5 \quad S_n > 493 \quad \frac{n}{2} [10 + 3(n-1)] > 493 \quad 3n^2 + 7n - 914 > 0$
 $d=3 \rightarrow n_1 = -\frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot (-914)}}{2 \cdot 3} \rightarrow n > 17 \rightarrow n = 18$
 $\Delta = 1181 \rightarrow n_2 = -\frac{7 - \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot (-914)}}{2 \cdot 3} = -\frac{7 - 61}{6} = 10$
 الف) به کمک شکل روبه رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟ *صغریه*

۳ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد.

جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید. *صغریه*

۴ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟ *صغریه*

۵ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین

ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع

رنگ شده است؟ *صغریه*

۶ برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

سوال ۲ صحت ب

$$1 + r + \Delta + \dots + (r(n-1)) = n^r$$

$$a=1 \quad d=r \quad n=n \quad S_n = \frac{n}{r} [ra + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{r} [r + (n-1)r] = \frac{n}{r} \times rn = n^r$$

102, 104, ..., 998 $a=102$ $a_n=998$ $n = \frac{998-102}{4} = 189 + 1 = 190$ (سوال ۳)

$$S_n = \frac{n}{r} [ra + (n-1)d] = \frac{190}{4} [2 \times 102 + (190-1) \times 4] = 12355$$

سوال ۴

$$S_n = \frac{n}{r} [ra + (n-1)d]$$

$$10a + 19d = \frac{r}{r} [ra + 19d] \rightarrow \boxed{10a = 10a + 19d} \rightarrow 5a + 19d = 2V$$

جواب فرد

$$a + a + rd + a + 3d + \dots + a + 19d = 19a$$

$$\boxed{10a + 9d = 19a} \rightarrow 10a + 19d = 2V$$

$$\begin{cases} 5a + 19d = 2V \\ 10a + 19d = 2V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a + 19d = 2V \\ -5a - 19d = -2V \end{cases} \rightarrow \frac{d = 4a}{r d = r \quad d = 4a}$$

$$10a + 19d = 2V \quad 10a + 2V = 2V \quad 10a = 0 \quad \underline{a=0}$$

سوال ۵

$$a_n = r^{n-1} \quad 1, r, r^2, \dots$$

$$S_n = a \left[\frac{1-q^n}{1-q} \right] \quad S_n = 200 \quad \left[\frac{1-r^n}{-1} \right] = 200$$

$$r^n - 1 = 200 \quad r^n = 201$$

$$r^n = 2^{\log 201} \quad n = \log_2 201$$

سوال ۶

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{r^2} > \frac{1}{r^3} > \dots \quad S_n = a \left[\frac{1-q^n}{1-q} \right]$$

$$S_n > \frac{99}{100} \rightarrow \frac{1}{r} \left[\frac{1 - (\frac{1}{r})^n}{1 - \frac{1}{r}} \right] > \frac{99}{100} \rightarrow 1 - (\frac{1}{r})^n > \frac{99}{100}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n < \frac{1}{100} \rightarrow r^n > 100 \quad \text{نقطه ص} = V$$

سوال ۷

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \quad a=1 \quad S_n = a \left[\frac{1-q^n}{1-q} \right]$$

$$q=a \quad n=n$$

$$S_n = 1 \left[\frac{1-a^n}{1-a} \right] \rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$\rightarrow 1 - a^n = (1-a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است ($a \neq 0$) که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ به دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کاردرکلاس

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$a \quad b \quad c \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 3 \times 2 = 1$$

۱ معادله $3x^2 = 5x - 2$ را حل کنید.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۲ اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$$x = -1 \rightarrow 4 - m(-1) - 7 = 0 \quad m - 3 = 0 \quad m = 3$$

$$4x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$a = 4 \quad b = -3 \quad c = -7$$

$$\Delta = 9 - 4(4)(-7) = 9 + 112 = 121$$

$$x_1 = \frac{3 + 11}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$x_2 = \frac{3 - 11}{8} = -1$$

پل پارک جزیره (اهواز - استان خوزستان)



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$ax^2 + bx + c = 0$	مقدار هر ریشه x_2 و x_1	جمع ریشه‌ها (S)	ضرب ریشه‌ها (P)	a	b	c	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$	۱ $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	۳	-۵	۲	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
$4x^2 - 3x - 7 = 0$	-۱ $\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	۴	-۳	-۷	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	۱ ۱	۲	۱	۱	-۲	۱	۲	۱
$5x^2 + 6x - 8 = 0$	-۲ $\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	۵	۶	-۸	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

$z = -\frac{b}{a}$ جمع ریشه‌ها
 $z = \frac{c}{a}$ ضرب ریشه‌ها

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، نشان دهید:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$b^2 - \Delta = b^2 - (b^2 - 4ac) = 4ac \quad \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

❖ مثال: اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها

به‌دست آورید.

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-1)x_2 = \frac{-7}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{4}$$

❖ حل: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -1 + \frac{7}{4} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 3$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و -۳ باشند راه حل زیر ارائه شده است. مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$$

۲ اگر $x_1 = \alpha$ و $x_2 = \beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \sum x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \alpha) = 0 \\ (x - \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

به طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.

$$S = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$P = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$

❖ مثال: محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌متر مربع است. ابعاد مستطیل را به دست آورید.

❖ حل: فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{33}{2}, \quad x_1 x_2 = 65$$

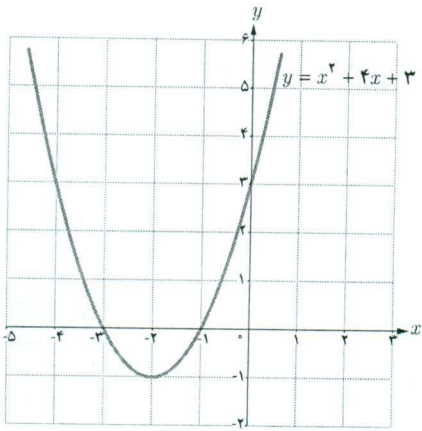
معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = \frac{33}{2}$ و $P = 65$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{33}{2}x + 65 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 33x + 130 = 0$$

از حل معادله اخیر $x_1 = 10$ یا $x_2 = \frac{13}{2}$ به دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به ترتیب 10 و $\frac{13}{2}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت



نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + 4x + 3$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

۱ معادله $f(x) = 0$ را حل کنید و جواب‌های آن را به دست آورید.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (x+1)(x+3) = 0$$

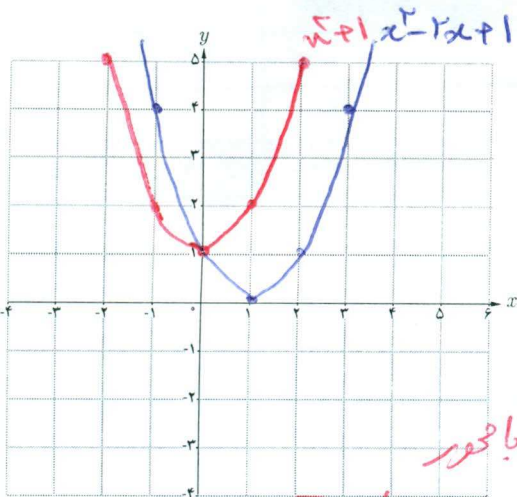
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x) = 0$ دارد؟ محل تلاقی نمودار با محور x ها دقیقاً جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقداری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هاست.

کارد در کلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ چه می‌توان گفت؟

معادله $g(x) = 0$ جواب ندارد چون محل برخوردی با محور x همانند و معادله $f(x) = 0$ چون فاصله بر محور x است لذا جواب دارد

❖ مثال: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

❖ حل: از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و

داریم:

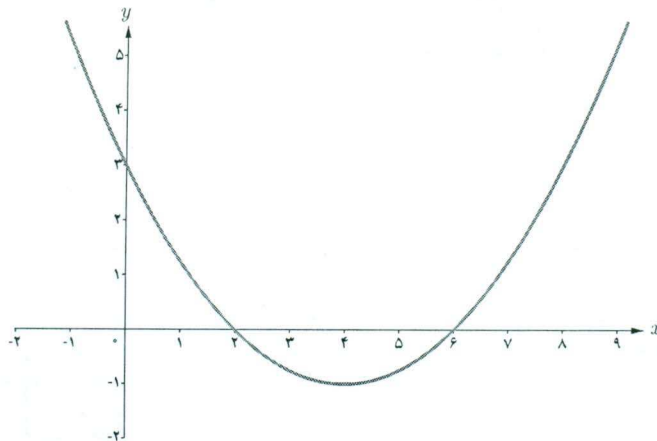
$$a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$

$$= a(x^2 - Sx + p)$$

$$= a\left[x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= ax^2 + bx + c$$

❖ مثال: اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول: از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که در مثال قبل آمده است می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند و داریم:

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

روش دوم: از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$: حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = 8$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -2$ و در نتیجه $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادله کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

۱ با توجه به معادله $f(x) = 0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) دو ریشه مثبت دارد. (شکل‌های ۸ و ۹)

(ب) دو ریشه منفی دارد. (۴)

(پ) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. (۱ و ۲)

(ت) ریشه ندارد. (۵ و ۷)

(ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (۷)

(ج) یک ریشه دارد. (۳)

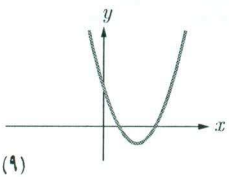
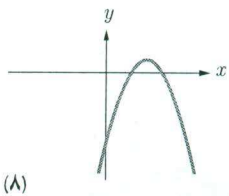
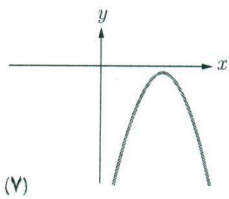
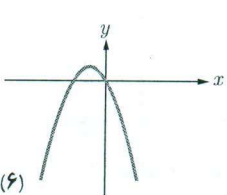
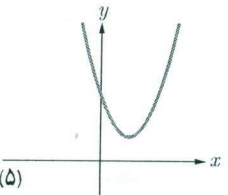
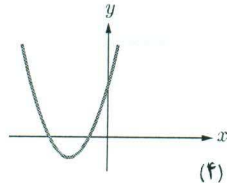
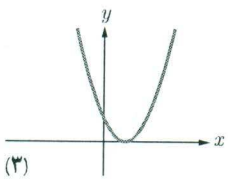
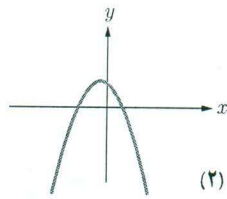
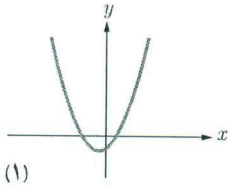
(چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است. (۳، ۸، ۹)

(ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (۱، ۲، ۵، ۶)

۲ با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

شماره شکل	ویژگی	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	تعداد صفر f	۲	۲	۰	۲	۰	۲	۱	۲	۲
	علامت a	+	-	-	-	+	+	+	-	+
	علامت b	-	+	+	-	-	+	-	-	+
	علامت c	+	-	-	۰	+	+	+	+	-

❖ تذکر: ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور x ها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور y ها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c > 0$ و طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a} > 0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b < 0$.



$$-\frac{b}{2a} > 0 \quad -b < 0 \quad b > 0$$

$$(n-1)^2 = \frac{1}{F}n + 1$$

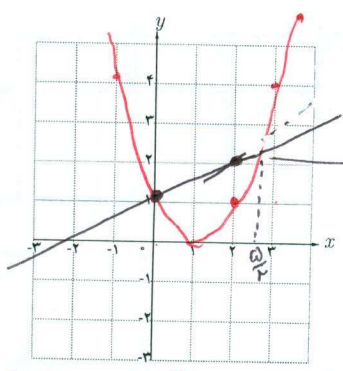
$$x^2 - 2n + 1 = \frac{1}{F}n + 1$$

$$x^2 - \frac{A}{F}n = 0$$

$$n(n - \frac{A}{F}) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n = \frac{A}{F} \end{cases}$$

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



۱ معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{3}x + 1$ را حل کنید. *جواب را به طرز اریب شده*

۲ نمودار دو تابع $y = (x-1)^2$ و $y = \frac{1}{3}x + 1$ را رسم کنید. *هر دو تابع در ازای $x = \frac{5}{2}$ برابر می شود*

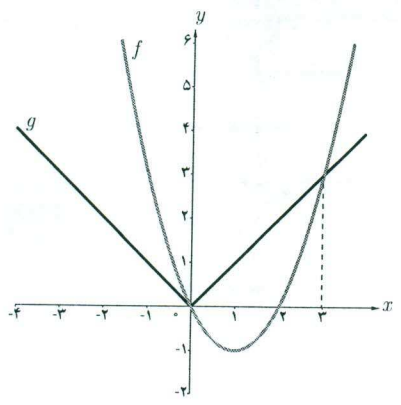
۳ چه ارتباطی بین ریشه های معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{3}x + 1$ و

طول های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟ ریشه های معادله حقیقی همان طول های نقاط تلاقی نمودارها هستند

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب های معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می نامیم.

❖ مثال: به روش هندسی معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

❖ حل: با فرض $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = |x|$ ، نمودار این دو تابع را رسم می کنیم:



$x = 3$, $x = 0$

با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت اند از: که جواب های معادله $|x| = x^2 - 2x$ می باشند.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x^2 - 4x + 4 & x - 2 \\ \hline - & x^2 + x - 2 \\ x^2 - 2x^2 & \\ \hline x^2 - 4x & \\ - & \\ x^2 - 2x & \\ \hline -2x + 4 & \\ - & \\ -2x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

مثال: اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^2 - x^2 - 4x + 4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل: از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می یابیم. می توان نوشت $p(x) = (x-2)(x^2+x-2)$. آنگاه از حل معادله $p(x) = 0$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

داریم:

صفرهای تابع p برابر $-2, 1, 2$ می باشند.

کارد کلاس

Handwritten notes for the first example:

$$x^2 + 2x - 2 \mid x^2 - 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 2 \\ -x^2 + 1 \\ \hline 2x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ -2x + 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x=1, x=-1$

سایر صفرها

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^2 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

مثال: صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = (x^2-1)^2 + (x^2-1) - 2$ را به دست آورید.

حل: هر چند معادله $f(x) = 0$ از درجه چهار است اما می توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t = x^2 - 1$ ، معادله به صورت $t^2 + t - 2 = 0$ در می آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t = x^2 - 1$ مقادیر x را می یابیم.

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = -2$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = -2 \Rightarrow x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f ، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می باشد.

برخی از معادلات را می توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کارد کلاس

Handwritten notes for the second example:

$$x^4 - 10x^2 + 14 = 0 \quad u^2 = t$$

$$t^2 - 10t + 14 = 0$$

$$(t-8)(t-2) = 0$$

$$t=8 \quad u^2=8 \quad u = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$t=2 \quad u^2=2 \quad u = \pm\sqrt{2}$$

همه صفرهای تابع $f(x) = x^4 - 10x^2 + 14$ را به دست آورید.

الف) $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$x^2 - 5x + P = 0$ $x^2 - 1x + \frac{2}{9} = 0$

ب) $\alpha, 2\alpha$ $S = 3\alpha$ $P = 2\alpha^2$
 $x^2 - 5x + P = 0$ $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = 0$

مسئله چهار جواب دارد

تمرین

۱ معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. **بالای صفر**

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟)

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و

$y = a(x-1)(x+3)$

$y = a(x-2)^2$ ضابطه آن را مشخص کنید.

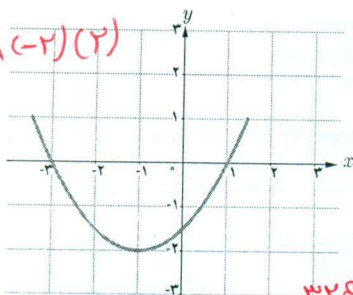
$\sum x = -1$
 $\sum y = -2$

$-2 = a(-1)(3)$

$a = \frac{1}{3}$

$P(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x+3)$

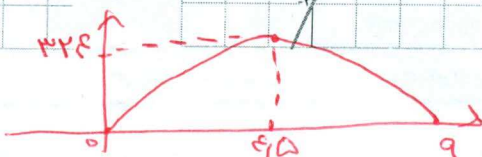
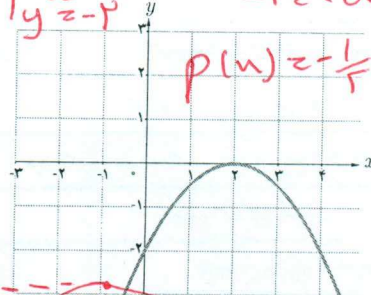
$P(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{2}{3}$ (ب)



$\sum x = 0$
 $\sum y = -2$

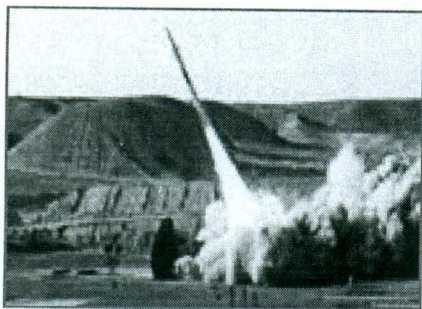
$-2 = 5a$ $a = -\frac{1}{5}$

$P(x) = -\frac{1}{5}(x-2)^2 = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{4}{5}$



(الف)

نمودار تیراندازی ←



۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود.

ارتفاع این موشک (h) در زمان t ، از رابطه $h(t) = -16t^2 + 144t$ به دست می‌آید.

ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به دست آورید.

$t_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-144}{-32} = 4.5$ $h_{max} = -16 \times \frac{1}{4} + 144 \times \frac{9}{4}$
 $= -32 + 432 = 324$

$t(-14t + 144) = 0 \rightarrow t = 0$ و $t = 9$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 4x$ $x(x^2 - 4) = 0$ $\sum x = 0$
 $x^2 = 4$ $x = \pm 2$

ب) $g(x) = 2x^2 + x + 3$ $x(2x^2 + x + 3) = 0$ $\sum x = 0$
 $2x^2 + x + 3 = 0$ $\Delta < 0$ ریشه حقیقی ندارد

ج) $h(x) = x^2 + 2x + 5$ $\rightarrow \frac{-b}{2a} + \frac{3}{4} + 5$
 $\Delta = 9 - 4(1)(5) = -11$ ریشه حقیقی ندارد

۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 3x - 4 = 0$ $x^2 = t$ $t^2 - 3t - 4 = 0$ $(t-4)(t+1) = 0$ $(x^2-4)(x^2+1) = 0$ $x = \pm 2$

ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$ $\rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = t$

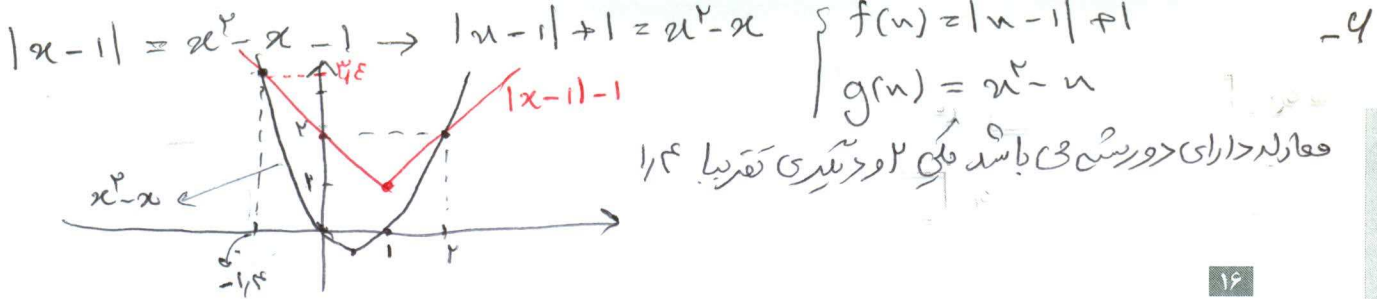
$t^2 - 7t + 4 = 0$ $(t-1)(t-4) = 0$

$t = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3$ $x^2 = 9$ $x = \pm 3$

$t = 4 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 6$ $x^2 = 18$

$x = \pm \sqrt{18}$

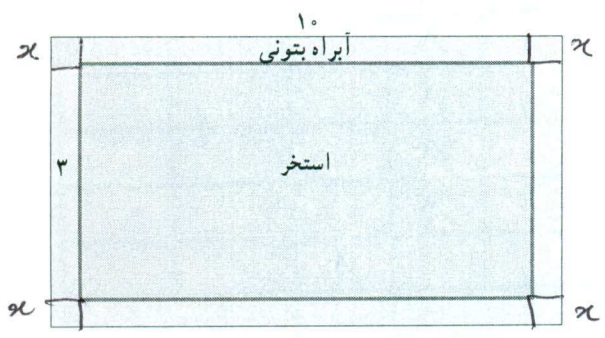
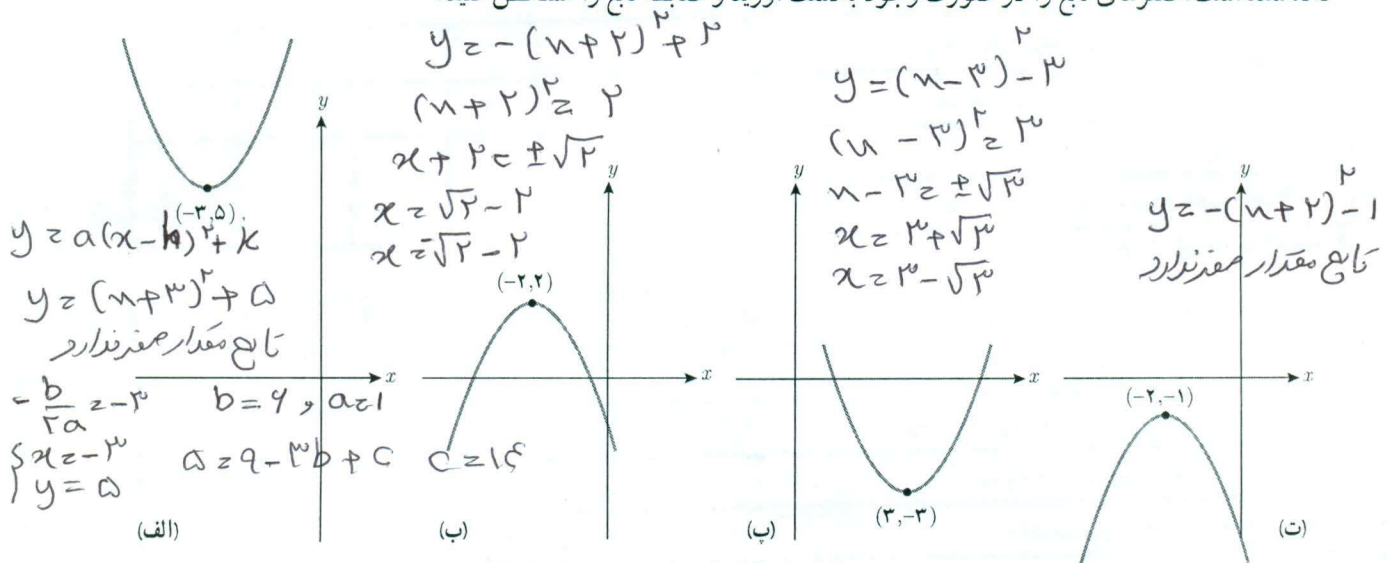
$t^2 - t - 15 = 0$ $\Delta = 41$ $t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$
 $1 - x^2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$ $x^2 = 1 - \frac{1 + \sqrt{41}}{2} = \frac{1 - \sqrt{41}}{2}$
 $1 - x^2 = \frac{1 - \sqrt{41}}{2}$ $x^2 = 1 - \frac{1 - \sqrt{41}}{2} = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$
 $x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{41}}{2}}$



۱۶

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

۷ هر یک از سهمی های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a|=1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

$$4x^2 + 20x + 4x = 14$$

$$2x^2 + 12x - 7 = 0$$

$$\Delta = 144 + 56 = 200$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{-12 \pm 10\sqrt{2}}{2} = -6 \pm 5\sqrt{2}$$



۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی

چند سانتی متر است؟

$$21m^2 = 2100cm^2$$

۲۰۰۰ کاشی

$$S = n^2 + n$$

$$2000S = 2000(n^2 + n)$$

$$10000n^2 + 20000n = 210000$$

$$\Delta = 1 + 14(105) = 1481$$

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{1481}}{2} = 5$$

$$n_2 = \frac{-1 - \sqrt{1481}}{2} = -21$$



درس

معادلات گویا و کنگ

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله



در یک مغازه ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟ برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازه کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول: فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ کیلوگرم}$$

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول ۴ درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد:

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول ۷ درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک $x+8$ و وزن کل محلول $200+x$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{8+x}{200+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید ۷ درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{x+8}{200+x} = \frac{7}{100}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $100(200+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$100(x+8) = 7(200+x)$$

$$از حل این معادله خواهیم داشت: $93x = 600$ و در نتیجه $x = \frac{600}{93}$$$

بنابراین تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول ۷ درصد نمک به دست آید.

حالت دوم: اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خودبه‌خود به ۷ برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $7(200-y) = 800$ و از آنجا $y = \frac{600}{7}$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کاردر کلاس

در مسئله ماهی‌های تزئینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

$$\begin{aligned} 1 + 5 &= 13 \quad \text{وزن نمک} \\ 200 + 5 &= 205 \quad \text{وزن کل محلول} \\ \frac{13}{205-y} &= \frac{7}{100} \\ 1300 - 7y &= 1300 \\ y &= \frac{1300}{7} = 191,29 \end{aligned}$$

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

❖ مثال: معادله $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$ را حل کنید.

❖ حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x-4)$ است. (چرا؟)
با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم:

$$3x(x-2) + 2(x-4) = x(4x-4)$$

$$3x^2 - 6x + 2x - 8 = 4x^2 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -2$$

البته جواب $x = -2$ مورد قبول نیست. (چرا؟) چون مخرج کسرها صفر می‌کند

۱) ابتدا با یک ساله سازه تر جوی را به دست می آوریم $2L + 2W = 2 \rightarrow L + W = 1 \rightarrow L = 1 - W$



$$2L + 2W = 2 \rightarrow L + W = 1 \rightarrow L = 1 - W$$

$$\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L} \rightarrow \frac{1-W}{W} = \frac{1}{1-W}$$

$$(1-W)^2 = W \rightarrow W^2 - 3W + 1 = 0 \quad W_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{عق}$$

$$W_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{عق}$$

$$L = 1 - W = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$140 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 210 - 10\sqrt{5} \quad \text{کاردر کلاس}$$

$$140 \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = -70 + 70\sqrt{5} \quad \text{طول}$$

$$\text{معادله } \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3 \text{ را حل کنید.}$$

(تبدیل طرف در $(x-2)^2$ ضرب می کنیم)

$$1 + 2(x-2) = 3(x-2)^2 \rightarrow 1 + 2x - 4 = 3x^2 - 12x + 12$$

$$3x^2 - 14x + 11 = 0 \quad \frac{1}{3}(3x-9)(3x-5) = 0$$

$$\begin{cases} 3x = 9 & \text{عق } x = 3 \\ 3x = 5 & \text{عق } x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم: $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$

آنگاه می گوئیم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

پایه صفت

فصل اول: جبر و معادله ۱۹

خواندنی

در ریاضیات هنگامی نسبت طلایی پدید می آید که نسبت بخش بزرگتر به بخش کوچکتر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگتر باشد.

تعبیر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.

مصریان سالها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نیز این نسبت را دارا هستند.

روانشناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به چشم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می آید.

در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

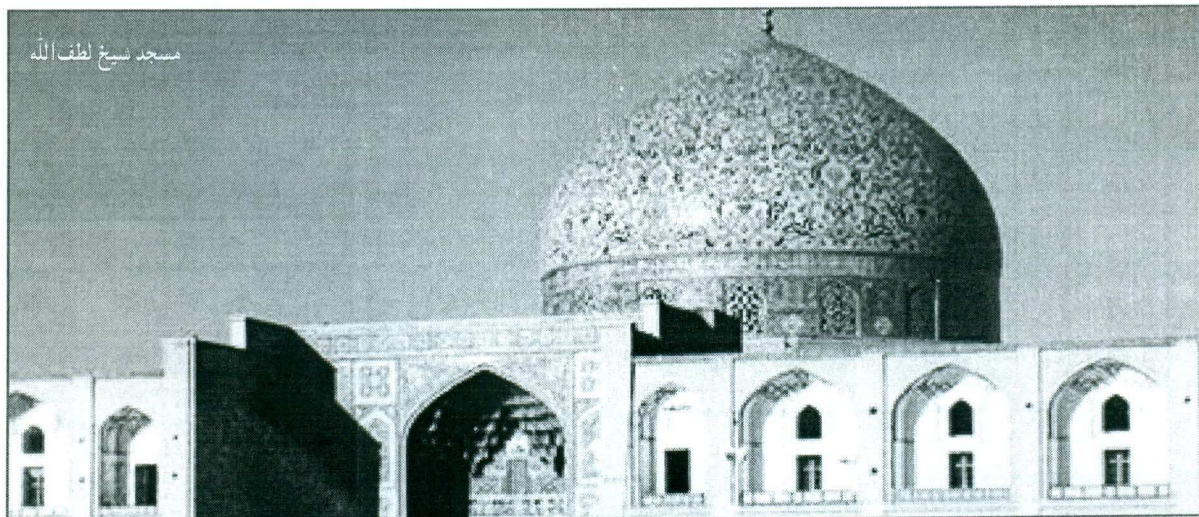
کتیبه بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین طور نسبت ارتفاع ستونها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.

در پل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف الله و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست و جوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می یابید.

منبع: مبانی هنرهای تجسمی، قسمت اول، شرکت چاپ

و نشر کتابهای درسی ایران، ۱۳۸۲



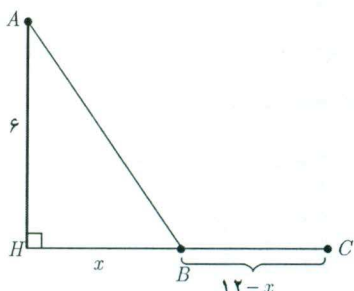
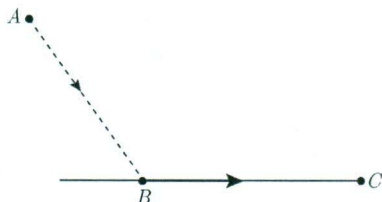
مسجد شیخ لطف الله

معادلات شامل عبارت‌های گنگ



طرح یک مسئله

معمولاً مرغ‌های دریایی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



❖ حل: برای درک بهتر صورت مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصله B

از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $12-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{36+x^2}$ می‌شود.

$$14\sqrt{36+x^2} + 10(12-x)$$

میزان انرژی مصرف‌شده توسط مرغ دریایی برابر است با:

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم:

$$14\sqrt{36+x^2} + 120 - 10x = 180 \Rightarrow 14\sqrt{36+x^2} = 10x + 60$$

$$7\sqrt{36+x^2} = 5x + 30$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $2x^2 - 25x + 72 = 0$ می‌رسیم که از آنجا $x=8$ و

$x=4/5$. در این صورت فاصله B تا C برابر $12-8=4$ یا $12-4/5=7/5$ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟ $AC = \sqrt{324+144} = \sqrt{468} = 4\sqrt{117}$

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟! $x_{min} = 4/5$

$$مقدار کالری = 4\sqrt{117} \times 14 = 187183$$

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

❖ مثال: معادله $\sqrt{x+2} = x-4$ را حل کنید.

❖ حل:

$$(\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2$$

$$x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=7$$

آزمایش جواب‌ها

$$x_2 = 7: \sqrt{7+2} = 7-4 \\ 3 = 3 \quad \checkmark$$

جواب معادله است

بنابراین $x=7$ تنها جواب معادله است.

$$x_1 = 2: \sqrt{2+2} = 2-4 \\ 2 \neq -2 \quad \times$$

جواب مسئله نیست

❖ تذکر: در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به دست آوردن دامنه تعریف داریم:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x \geq 4$$

کاردکلاس

آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابرش باشد؟

$$x + \sqrt{x} = 4 \quad \sqrt{x} = 4 - x \\ x^2 - 12x + 34 = 0 \quad (x-4)(x-9) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x=4 \\ x=9 \end{array} \right\}$$

معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

$$\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x = \pm 2 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array} \right\}$$

جواب مسترک وجود نداشته در نتیجه جواب ندارد

سرعت رفت v_1 زمان رفت t_1
سرعت بازگشت v_2 زمان برگشت t_2

$$v_2 = v_1 - 1 \quad t_1 + t_2 = 17 - 2 = 15 \quad t_1 = \frac{144}{v_1} \quad t_2 = \frac{144}{v_1 - 1}$$
$$t_1 + t_2 = \frac{144}{v_1} + \frac{144}{v_1 - 1} = 15 \rightarrow v_1 = 24 \text{ قق}$$
$$\rightarrow v_2 = 23 \text{ قق}$$

۲۲

$$144(v_1 - 1) + 144v_1 = 15v_1(v_1 - 1)$$
$$144v_1 - 144 + 144v_1 = 15v_1^2 - 15v_1$$
$$15v_1^2 - 297v_1 + 1152 = 0 \rightarrow 5v_1^2 - 132v_1 + 384 = 0$$

تمرین

۱ $\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$

۲ $\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2}$

۳ $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

۴ $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$

۵ $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

۶ $\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

۷ $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$

۸ پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای

هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر

اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟
 $xy = 120 \quad (n-1)(y+4) = 120 \quad 120 + 4n - y - 4 = 120 \quad y = 3n - 4$

$5xy = 120 \quad x(3n-4) = 120 \quad 3n^2 - 4n - 120 = 0 \quad n^2 - n - 20 = 0 \quad n = 4 \text{ قق}$
 $y = 3x - 4 \quad n = -5 \text{ قق}$

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام

دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟ **بالای صحنه**

۴۰۰۰
مهرت قبل
تخفیف

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه ای واقع شده اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و

پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می باشد. در صورتی که سرعت حرکت

کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت

حرکت آب تعیین کنید.



رودخانه آروند (استان خوزستان)

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+15} = \frac{1}{18}$$
$$18(n-15) + 18n = n(n-15)$$
$$n^2 - 15n + 270 = 0$$
$$(n-45)(n-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 45 \\ n = 6 \end{cases}$$

۱۰ $n - 15 \geq 20$
قق $n - 15 = -9$

$$1) \frac{4}{x} = 2 + \frac{n}{x+1} \xrightarrow{x(x+1)} 4(x+1) = 2n(x+1) + n(x)$$

$$4x+4 = 2x^2 + 2n + x^2 \rightarrow 3x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Delta = 14 + \sqrt{12} \wedge \wedge$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{3} \quad \left. \begin{array}{l} n = \frac{2 + \sqrt{12}}{3} \quad \text{قبول} \\ n = \frac{2 - \sqrt{12}}{3} \quad \text{قبول} \end{array} \right\}$$

$$2) \frac{p}{r-p} + \frac{r}{p} = a \xrightarrow{p(r-p)} p(r) + r(r-p) = ar(r-p)$$

$$\rightarrow p^2 + r - rp = 10p - arp^r \rightarrow 3p^2 - 4p + r = 0$$

$$\Delta = 16 - 12r = 4 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{3} \quad \left. \begin{array}{l} n = \frac{4 + \sqrt{4}}{3} \quad \text{قبول} \\ n = \frac{4 - \sqrt{4}}{3} \quad \text{قبول} \end{array} \right\}$$

$$3) \frac{3y+a}{y^2+ay} + \frac{y+c}{y+a} = \frac{y+1}{y}$$

$$\xrightarrow{y(y+a)} 3y+a+y(y+c) = (y+1)(y+a)$$

$$3y+a+y^2+cy = y^2+4y+a \rightarrow y=0 \quad \text{قبول}$$

$$4) \sqrt{x} = \sqrt{x+c} \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x+c})^2 \rightarrow x = x+c \quad n=c \quad \text{قبول}$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \rightarrow (1+\sqrt{x})(1-x) = 1-\sqrt{x}$$

$$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) = 0$$

$$(1-\sqrt{x}) [(1+\sqrt{x})^2 - 1] = 0 \quad \left. \begin{array}{l} 1-\sqrt{x} = 0 \quad \sqrt{x} \geq 1 \quad x \geq 1 \quad \text{قبول} \\ (1+\sqrt{x})^2 - 1 = 0 \quad (1+\sqrt{x})^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1+\sqrt{x} \geq 1 \rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \quad x \geq 0 \\ 1+\sqrt{x} = -1 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \quad \text{جواب صحیح ندارد} \end{array} \right\}$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{x}+2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$\sqrt{x}-2 = 2(x-4) + \sqrt{x}+2 \quad 2x \geq 4 \quad x \geq 2 \quad \text{قبول}$$

$$6) \sqrt{3x+1} = 1 - \sqrt{x+3} \quad (\sqrt{3x+1})^2 = (1 - \sqrt{x+3})^2$$

$$3(x+1) = 1 - 2\sqrt{x+3} + x+3 \rightarrow 2\sqrt{x+3} = 2 - 2x$$

$$1\sqrt{x+3} = 1-x \rightarrow (1\sqrt{x+3})^2 = (1-x)^2 \quad 4x(x+3) = 1 - 2x + x^2 + 9$$

$$144x^2 - 112x + 489 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} n \geq 1 \quad \text{قبول} \\ n = \frac{c}{a} = \frac{489}{144} = 3,1 \quad \text{قبول} \end{array} \right\}$$

۴

درس

قدر مطلق و ویژگی های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی های آن آشنا شدید. همان طور که می دانید قدر مطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می شود.

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$

کاردرکلاس

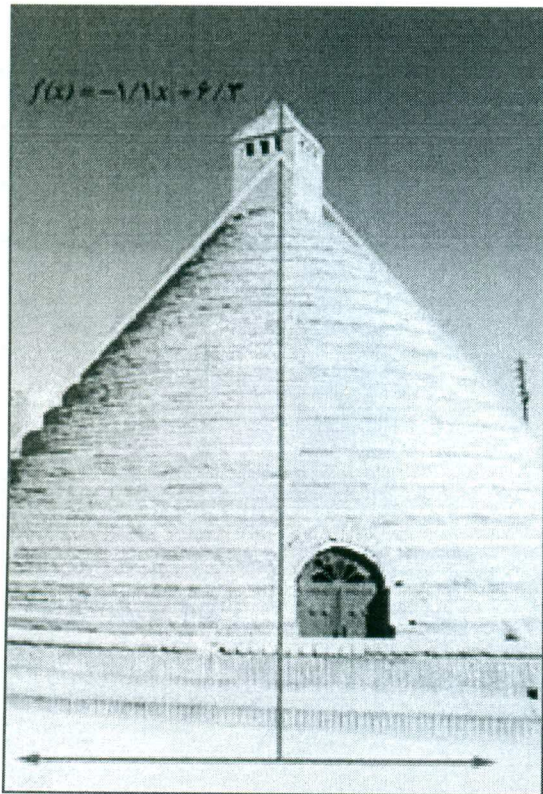
۱ حاصل هریک از عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-5 - (-3)| = 1 - 2 = 2$ ب) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| = -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ پ) $|\frac{1}{5} - \frac{1}{2}| = 0 = 0$

۲ عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^2 + 2a^2 + 1} = \sqrt{(a^2 + 1)^2} = |a^2 + 1| = a^2 + 1$

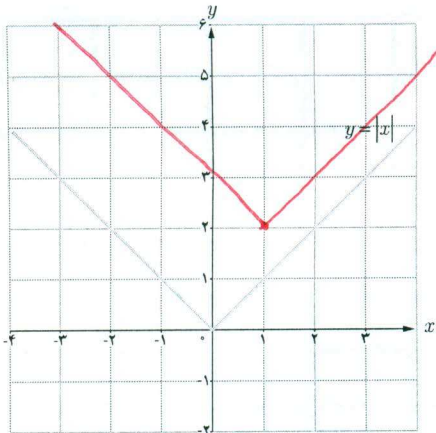
ب) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$



آب انبار - روستای بیابانک (استان سمنان)

رسم توابع قدر مطلقى

فعالیت



شکل (۱)

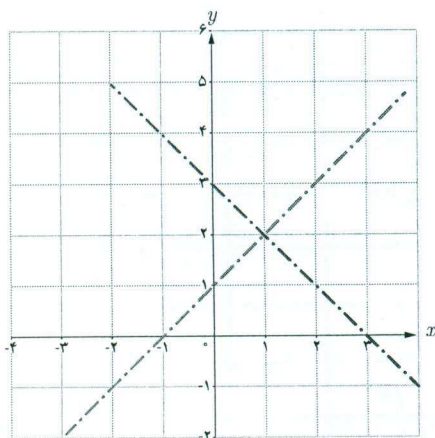
می‌خواهیم نمودار تابع $y = |x-1| + 2$ را رسم کنیم.

روش اول: با توجه به نمودار $y = |x|$ در شکل (۱) و استفاده از انتقال منحنی، نمودار آن را رسم کنید.

روش دوم: گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

$$y = |x-1| + 2 = \begin{cases} x-1+2 & , x \geq 1 \\ -x+1+2 & , x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ -x+3 & x < 1 \end{cases}$$

گام دوم؛ با توجه به شکل (۲) نمودار y را رسم کنید.



شکل (۲)

مثال: نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = |x-1| + |x+2|$ را رسم کنید.

حل: در اینجا نمی‌توانیم از رسم تابع $y = |x|$ و انتقال استفاده کنیم.

بنابراین از روش تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها کمک می‌گیریم.

برای این کار ابتدا عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

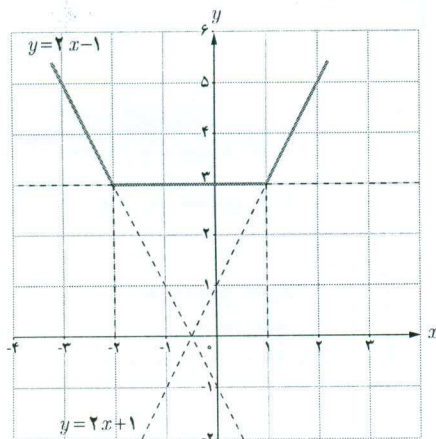
x		-۲	۱	
$x-1$	-	-	۰	+
$x+2$	-	۰	+	+

$$f(x) = (x-1) + (x+2) = 2x+1$$

$$f(x) = -(x-1) + (x+2) = 3$$

$$f(x) = -(x-1) - (x+2) = -2x-1$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & , x < -2 \\ 3 & , -2 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & , x > 1 \end{cases}$$



شکل (۳)

نمودار تابع از سه قسمت که هر یک بخشی از یک خط هستند تشکیل می‌شود (شکل ۳).

ویژگی های قدر مطلق

در سال های قبل با برخی از ویژگی های قدر مطلق آشنا شده اید که عبارت اند از:

الف) $|x| \geq 0$

ب) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$ ($a \geq 0$)

ث) $|-x| = |x|$

ب) $\sqrt{x^2} = |x|$

ت) $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$

ج) $|x|^2 = x^2$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند. $|ab| = |a||b|$ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که:

۱) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a||b|$

۲) با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که: $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

$$|\frac{a}{b}| = \sqrt{(\frac{a}{b})^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$$

فعالیت

۱) فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هر یک از نامعادله های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x| < c, (c \neq 0)$ (۱) 

ب) $|x| > c$ (۲) 

پ) $|x| \leq c$ (۳) 

ت) $|x| \geq c$ (۴) 

۲) برای هر عدد حقیقی a نشان دهید که: $-|a| \leq a \leq |a|$

۳) برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که: $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

۴) با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید:

$-|a| \leq a \leq |a|$ (۵)
 $-|b| \leq b \leq |b|$ (۶)

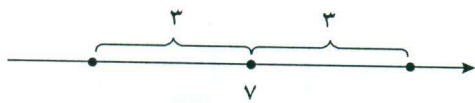
$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$
 $\rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$

(۷) $-|a| \leq a \leq |a|$ (۸)
 $-|b| \leq b \leq |b|$ (۹)
 $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

(۳)

معادلات قدر مطلق

حل یک مسئله



بر روی محور اعداد حقیقی فاصله چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟
برای حل مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم.

اگر طول نقطه جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-3|=7$. با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق خواهیم دانست $x-3 = \pm 7$ ، و در نتیجه $x=10$ و $x=-4$ ؛ و هر دو جواب‌های معادله هستند.

جواب‌های معادله $|f(x)| = |g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند معادلات قدر مطلق می‌گویند.

❖ مثال: معادله $|3x-2| = |x-4|$ را حل کنید.

روش اول: با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق: جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادله $3x-2 = x-4$ و $3x-2 = -(x-4)$ هستند که، به ترتیب، عبارت‌اند از:

$$x = \frac{3}{2} \text{ و } x = -1$$

روش دوم: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $9x^2 - 12x + 4 = x^2 - 8x + 16$ ؛ و از آنجا $2x^2 - x - 3 = 0$.
جواب‌های این معادله -1 و $\frac{3}{2}$ هستند.

کاردر کلاس

معادله قدر مطلق $|x-1| = 4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.

۱ روش اول: (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$

حالت اول: $x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 4-3x \Rightarrow x = \frac{5}{4}$ ، حالت دوم: $x < 1 \Rightarrow \dots$ ، مجموعه جواب $\left\{ \frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right\}$

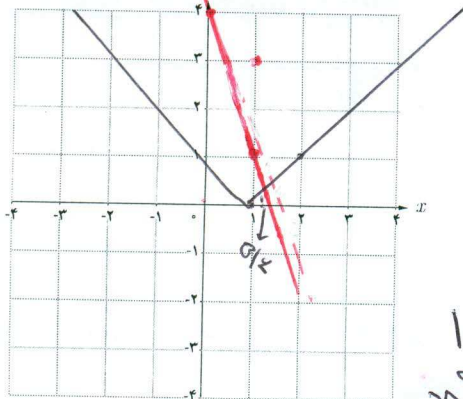
$$-x+1 = 4-3x \quad 2x \geq 3 \quad x \geq \frac{3}{2}$$

۲ روش دوم: (روش هندسی)

الف) توابع $y = |x-1|$ و $y = 4-3x$ را رسم کنید.

ب) طول‌های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید. $x = \frac{5}{4}$

پ) جواب‌های معادله را به دست آورید. $x = \frac{9}{4}$

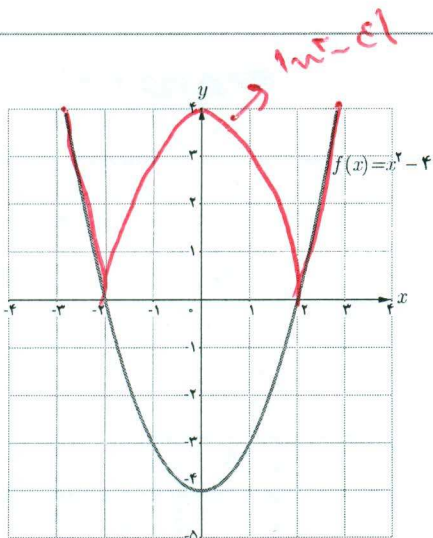


۳ روش سوم: (به توان رساندن طرفین)

$$|u-1| = 4-3u \quad |u-1|^2 = (4-3u)^2$$

$$u^2 - 2u + 1 = 16 - 24u + 9u^2 \rightarrow 8u^2 - 22u + 15 = 0$$

$$\frac{1}{8}(8u-12)(8u-10) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 8u=12 \quad u = \frac{3}{2} \\ 8u=10 \quad u = \frac{5}{4} \end{array} \right.$$



در شکل روبه‌رو نمودار تابعی با ضابطه $f(x) = x^2 - 4$ آمده است.
 ۱ با توجه به علامت عبارت $x^2 - 4$ و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع $y = |x^2 - 4|$ را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

۲ نمودار $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.

۳ تابع $y = |f(x)|$ را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید.

$$y = |f(x)| = \begin{cases} x^2 - 4, & f(x) \geq 0 \\ 4 - x^2, & f(x) < 0 \end{cases}$$

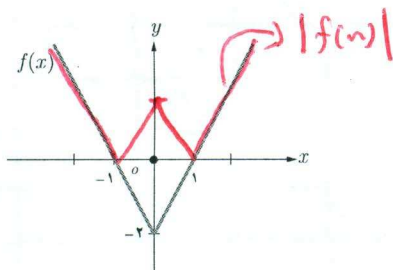
۴ با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $y = |f(x)|$ از روی نمودار $y = f(x)$ بیان کنید.

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

۵ در شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ را از روی نمودار تابع

$y = f(x)$ رسم کنید.

با توجه به فعالیت بالا :

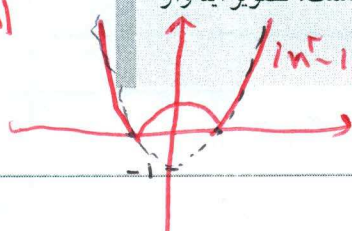
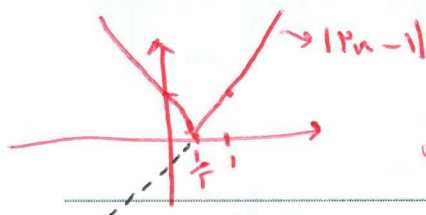


۱ نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x هاست.

۲ برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم

کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست، تصویر آینه‌وار

نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x رسم کنیم.

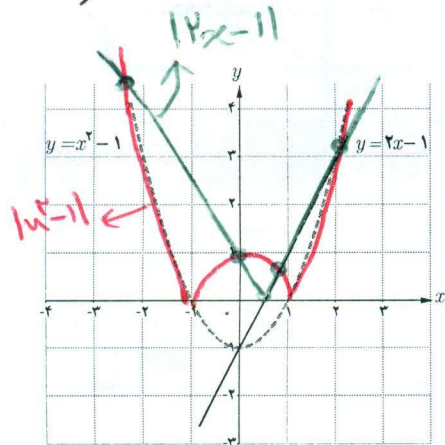


۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y = |x^2 - 1|$ و $y = |2x - 1|$ را

رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به دست آورید.

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادله

$|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را حل کنید.



$$|x^2 - 1| = |2x - 1| \begin{cases} \text{حالت اول} & x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2 \\ \text{حالت دوم} & x^2 - 1 = -(2x - 1) \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \Delta = 12 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.732 \\ x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.732 \end{cases}$$

الف) $|x+3| > 2$

$$\begin{cases} x+3 > 2 \rightarrow x > -1 \\ x+3 < -2 \rightarrow x < -5 \end{cases}$$

ب) $|x-4| \geq 2$

$$\begin{cases} x-4 \geq 2 \rightarrow x \geq 6 \\ x-4 \leq -2 \rightarrow x \leq 2 \end{cases}$$

ج) $|x-3| = 7$

$$\begin{cases} x-3 = 7 \rightarrow x = 10 \\ x-3 = -7 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

ب) $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$

پ) $h(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} x-1+x+1 = 2x & x \geq 1 \\ -x+1+x+1 = 2 & -1 < x < 1 \\ x-1-x+1 = 0 & x < -1 \end{cases}$

۲ بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

$|x+1| + |x-3| = 6$

$$\begin{cases} x \leq -1 \rightarrow -2x + 4 = 6 \rightarrow -2x = 2 \rightarrow x = -1 \\ -1 < x < 3 \rightarrow -x + 1 + x + 1 = 6 \rightarrow 2 = 6 \text{ (غیرممکن)} \\ x \geq 3 \rightarrow x - 1 + x - 3 = 6 \rightarrow 2x - 4 = 6 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

۳ هر یک از عبارت های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

- الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است. **بالای صفر**
- ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است. **بالای صفر**
- پ) فاصله بین x و ۳- بزرگ تر از ۲ است. **بالای صفر**

۴ دو معادله زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

$$\begin{cases} x-3 = 2-x \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = 2.5 \\ x-3 = -(2-x) \rightarrow x-3 = -2+x \rightarrow -3 = -2 \text{ (غیرممکن)} \end{cases}$$

ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

$$\begin{cases} x-1 = 2x+1 \rightarrow x = -2 \\ x-1 = -(2x+1) \rightarrow x-1 = -2x-1 \rightarrow 3x = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

۵ نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

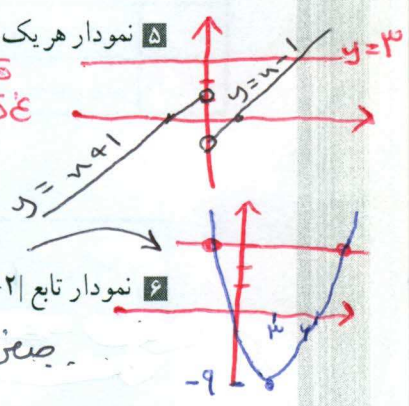
الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

$$\begin{cases} x - \frac{x}{x} = 3 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4 \\ x - \frac{x}{-x} = 3 \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

ب) $y = x^2 - 6x$

$$x^2 - 6x = 3 \rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 36 + 12 = 48$$

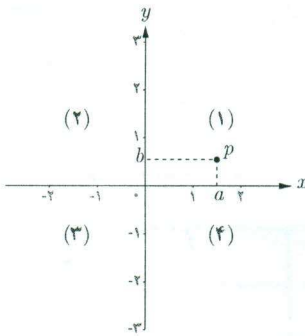
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$



۶ نمودار تابع $f(x) = ||x-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۷ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x| = 2$ را جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.

آشنایی با هندسه تحلیلی



در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

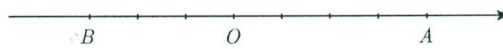
به هر نقطه P در صفحه مختصات یک زوج مرتب (a, b) نظیر می‌شود. به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم. در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم.

فاصله بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد زیر به مبدأ O ، نقطه متناظر با 4 را با A و نقطه متناظر با -3 را با B مشخص کرده‌ایم؛

۱ طول پاره‌های OA و OB چقدر است؟ $|OA| = 4$ $|OB| = 3$



۲ طول پاره خط BA چقدر است؟ $|AB| = 7$

۳ فاصله دو نقطه A و B متناظر با 4 و (-3) از یکدیگر چقدر است؟ 7

۴ بر روی هریک از دو محور زیر، در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟



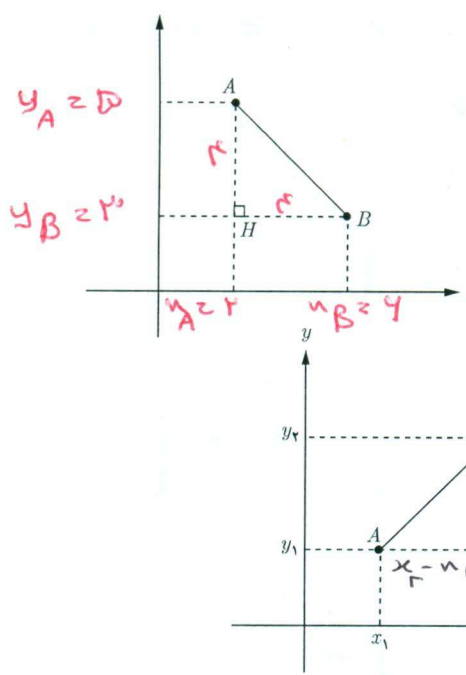
$$|AB| = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به صورت $|AB| = |x_B - x_A|$ تعریف می‌کنیم.

خواندنی

هندسه تحلیلی شاخه‌ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی به وجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می‌کنند. بنیان‌گذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما در قرن ۱۷ میلادی بوده‌اند. این رشته در مورد اندازه، فاصله، زاویه و فرمول‌های مربوط به آن بحث می‌کند.

فعالیت



۱ دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(6, 3)$ را، در شکل روبه‌رو، در نظر بگیرید: الف) روی محور افقی x_A و x_B و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید. ب) در مثل قائم‌الزاویه AHB ($\hat{H} = 90^\circ$) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول پاره خط AB را به دست آورید.

۲ در شکل روبه‌رو، اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند، طول AB را محاسبه کنید.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

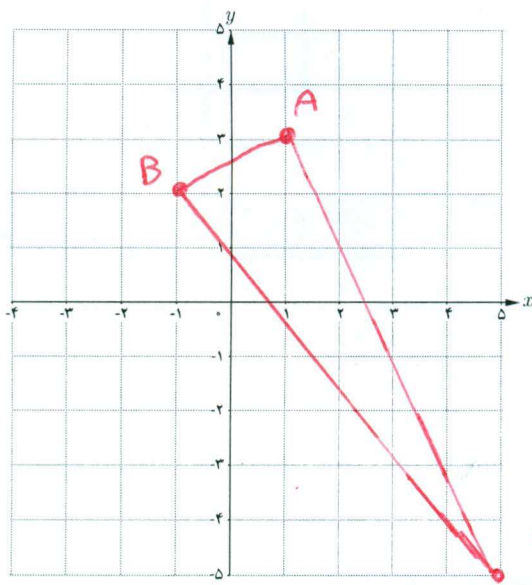
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

به‌طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

کار در کلاس



سه نقطه $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC ، در صفحه مختصات روبه‌رو، هستند. الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

ب) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \quad 65 = 80 + 5 \quad \checkmark$$

رابطه فیثاغورس برقرار نیست قائم‌الزاویه است.
ت) شیب دو خط AB و AC را به دست آورید.

چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 3}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5 - 3}{5 - 1} = -2$$

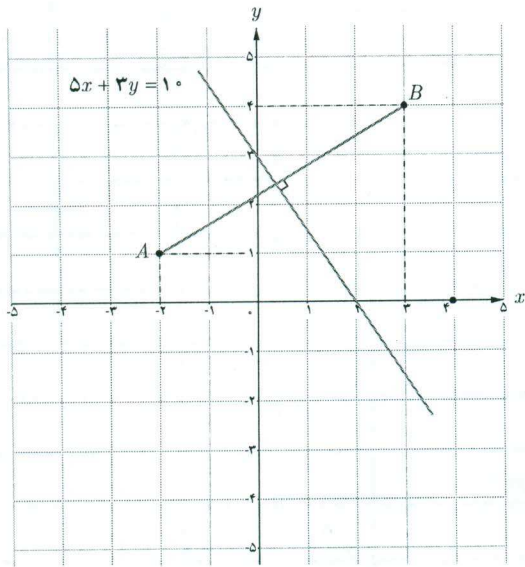
$$m_{AB} \times m_{AC} = \frac{1}{2} \times -2 = -1$$

نسبتاً معکوس و درجه‌ها یکدیگر را جفت می‌سازند

فصل اول: جبر و معادله ۳۱

❖ مثال: در شکل زیر، معادله عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به هم وصل کرده است.
 ❖ حل: عمودمنصف یک پاره‌خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x, y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره‌خط می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم:

$$5x + 3y = 10$$

این معادله برای تمام نقاطی که از A و B هم‌فاصله‌اند برقرار است، بنابراین، معادله عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{3}{5}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $-\frac{5}{3}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟

شیبها عکس‌العکس یکدیگرند

به طور کلی:

اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm' = -1$ و برعکس.

کاردکلاس

نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.

$$PA = \sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{360} \rightarrow PA = PB$$

$$PB = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{360}$$

روش اول

چون فاصله P از دو سر A و B یکسان است بنابراین P روی عمودمنصف AB قرار دارد

روش دوم

$$AB \text{ خط } M \left| \begin{array}{l} \frac{y+0}{x} = 3 \\ \frac{15-0}{6} = 3 \end{array} \right. \quad m_{AB} = \frac{15}{6} = 3 \quad m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{1}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 7$$

روش سوم

$$P \left| \begin{array}{l} -12 = x \\ 11 = y \end{array} \right. \quad 11 = -\frac{1}{3}(-12) + 7 \rightarrow 11 = 8 + 7 \quad \checkmark$$

روی عمودمنصف AB است

$$m_{PM} = \frac{11 - 0}{-12 - 0} = -\frac{11}{12} \quad m_{AB} = \frac{15 - 0}{6} = 3$$

$$m_{AB} \times m_{PM} = -1 \rightarrow PM \perp AB$$

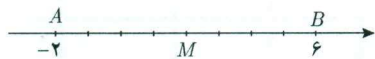
عمودمنصف AB است

مختصات نقطه وسط یک پاره خط

فعالیت

۱ در شکل زیر نقطه M وسط پاره خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟

$$x_M = 2$$



۲ چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می کنید؟ طول نقطه M میانگین طول نقاط A و B است.

۳ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، طول نقطه M را برحسب طول های نقاط A و B به دست آورید.

$$AM = MB$$

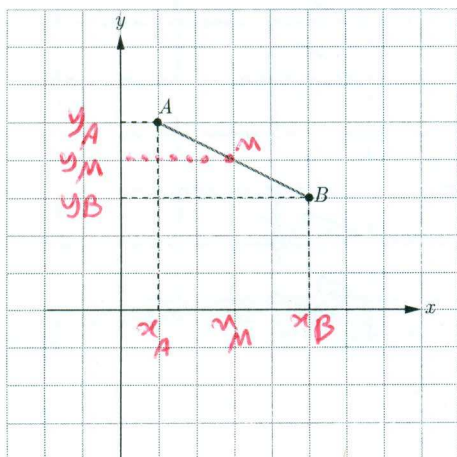
$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$



۴ اگر A و B روی محور y ها و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می توان بیان کرد؟

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

کاردر کلاس



اگر $A(1, 5)$ و $B(5, 3)$ دو سر پاره خط AB و $M(a, b)$ وسط این پاره خط باشد:

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به دست آورید.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

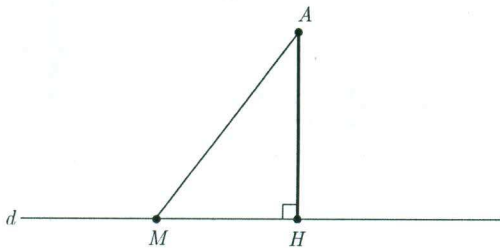
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

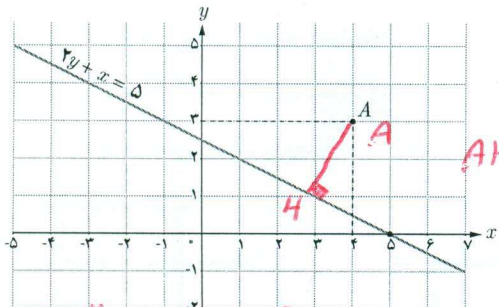
فاصله یک نقطه از یک خط



اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم. بنابراین برای به دست آوردن فاصله هر نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمودی رسم و طول پاره‌خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت

در شکل روبه‌رو خط d به معادله $2y + x = 5$ و نقطه $A(4, 3)$ داده شده است.



- ۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.
- ۲ رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را به دست آورید.
- ۳ شیب AH را به دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.
- ۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به دست آورید.
- ۵ طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.

$m_d = -\frac{2}{1}$ $m_{AH} = \frac{1}{2}$ $y - d = \frac{1}{2}(x - 4)$
 $\rightarrow 2y - 4 = x - 4$ AH معادله

$2y - 1d = 2x - 4$

به طور کلی اگر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

که در آن، وجود علامت قدر مطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.

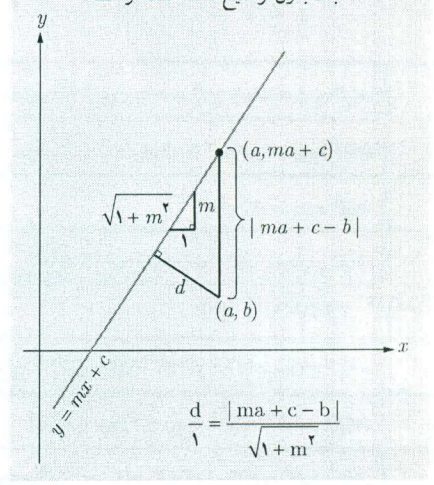
۱- از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند خود به اثبات آن بپردازند.

$$\begin{cases} 2x - 4 = x - 4 \\ 2y - 1d = 2x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{49}{25} \end{cases}$$

$$AH = \sqrt{\left(4 - \frac{4}{25}\right)^2 + \left(3 - \frac{49}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{1745 + 10134}}{25} = \frac{\sqrt{11879}}{25} = \frac{\sqrt{10}}{25} = \frac{1}{25}$$

خواندنی

اثبات بدون توضیح فاصله نقطه از خط



❖ مثال: فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $y = \frac{4}{3}x + 4$ را به دست آورید.

❖ حل: ابتدا معادله خط را به صورت $4x - 3y + 12 = 0$ می نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه A تا خط d را AH فرض می کنیم و داریم:

$$AH = \frac{|4(-2) - 3(4) + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8|}{5} = \frac{8}{5}$$

❖ مثال: فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

❖ حل: ابتدا معادله خط را به صورت $8x + 6y - k = 0$ می نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم:

$$AH = \frac{|8(1) + 6(-4) - k|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|-16 - k|}{10} \Rightarrow |-16 - k| = 40$$

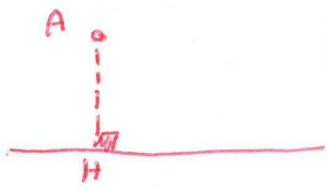
$$-16 - k = 40 \Rightarrow k = -56$$

$$-16 - k = -40 \Rightarrow k = 24$$

کارد کلاس

❑ اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

$AH: \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow S = 3 \times 3 = 9$

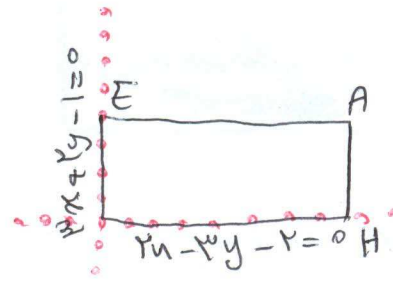


❑ دو خط $2x - 3y = 2$ و $3x + 2y = 1$ معادله های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2, 5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$$AH = \frac{|2(2) - 3(5) - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$AE = \frac{|3(2) - 2(5) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$S = AH \times AE = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{15}{\sqrt{13}} = 15$$



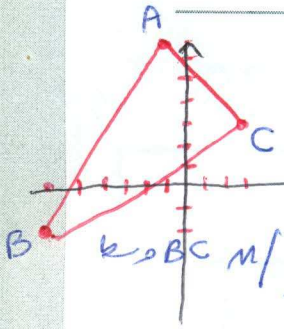
$m_{BC} = \frac{a}{9}$ $C \left| \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right.$ $y - 3 = \frac{a}{9}(x - 3)$ $9y - 27 = ax - 15$ (ت)

$ax - 9y + 12 = 0$ معادله BC

$AH = \frac{|a(-1) - 9(7) + 12|}{\sqrt{a^2 + 9^2}} = \frac{64}{\sqrt{104}}$

فصل اول: جبر و معادله ۳۵

تمرین



۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

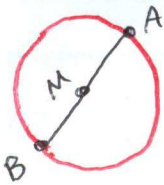
$AB = \sqrt{a^2 + 9^2} = \sqrt{104} \rightarrow AB = BC$
 $BC = \sqrt{9^2 + 5^2} = \sqrt{104}$

(الف) مثلث را رسم کنید.

(ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

(ب) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.
 (ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

با ۵۵ متر



۲ $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

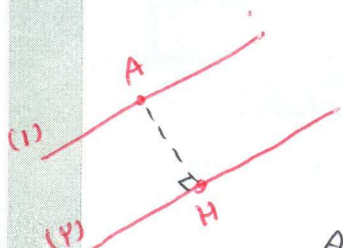
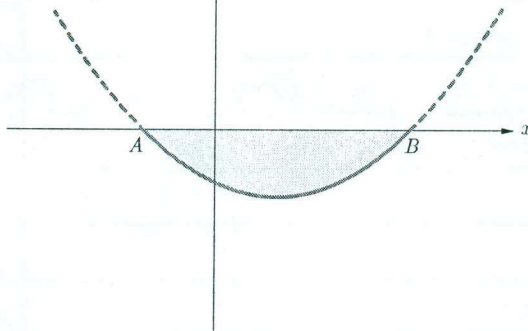
$MA = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$ شعاع دایره
 مرکز دایره $M \left| \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \right.$
 وسط AB $M \left| \begin{matrix} 0+8 \\ 6+(-8) \end{matrix} \right. = \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}$

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 2$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

(الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به دست آورید.
 $x^2 - 8x - 2 = 0 \rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x=10 \\ x=-2 \end{matrix}$
 $A(-2, 0)$ $B(10, 0)$
 (ب) اگر x بر حسب سانتی‌متر باشد طول AB را به دست آورید.
 $AB = |10 - (-2)| = 12$

(پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow y_{min} = 16 - 32 - 2 = -18$
 بیشترین ضخامت عدسی = $| -18 | = 18$

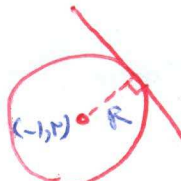


۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ می‌باشد.

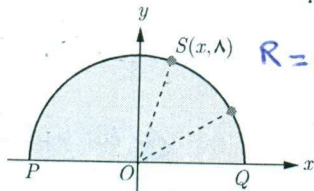
نقطه $A(x_0, y_0)$ روی خط (۱) قرار دارد $\rightarrow ax_0 + by_0 = -c$
 $AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۵ خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$R = \frac{|4(-1) + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$



۶ نقطه $S(x, \lambda)$ روی نیم دایره ای به شعاع 10° در شکل رویه رو داده شده است.



الف) مقدار x را به دست آورید. $R=OS=\sqrt{x^2+\lambda^2}=10$ $x^2=34$ $x=4$
 ب) شیب خط های PS و SQ را به دست آورید.

پ) نشان دهید \hat{PSQ} قائمه است.

$$S|P| \rightarrow m_{PS} = \frac{0-\lambda}{-10-4} = \frac{1}{14}$$

$$S|Q| \rightarrow m_{SQ} = \frac{0-\lambda}{10-4} = -\frac{1}{6}$$

$$m_{PS} \times m_{SQ} = \frac{1}{14} \times -\frac{1}{6} = -\frac{1}{84} \neq -1$$

$PS \perp QS$
 $\hat{PSQ} = 90^\circ$

۷ اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax+2y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$$AH = \frac{|a(1) + 2(2) - 1|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 2 \Rightarrow \frac{|2a + 3|}{\sqrt{a^2 + 4}} = 2$$

$$2\sqrt{a^2 + 4} = |2a + 3| \Rightarrow (2\sqrt{a^2 + 4})^2 = (2a + 3)^2$$

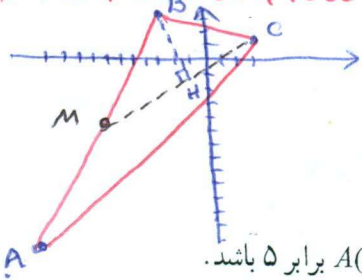
$$4a^2 + 16 = 4a^2 + 12a + 9 \Rightarrow 12a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{12}$$

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -12)$ ، $B(-3, 3)$ ، $C(3, 1)$ می باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

جواب: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$



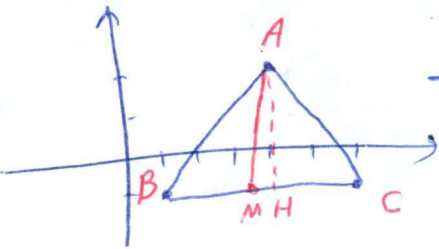
۹ نقطه ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

جواب: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

۱۰ نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM

باشند طول MH را به دست آورید.

جواب: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$



$$H|C \rightarrow \frac{y+1}{-1} = \frac{y-2}{-1}$$

$$M|BC \rightarrow \frac{y+1}{-1} = \frac{y-2}{-1}$$

$$\rightarrow MH = \left| 2 - \frac{y}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

M وسط BC

۹- نقطه M روی $y=2x$

$$MO + MA = 5$$

$$\sqrt{x^2 + 4x^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = 5$$

$$\sqrt{5x^2} + \sqrt{5(x-2)^2} = 5$$

$$|x| + |x-2| = \sqrt{5}$$

$x < 0$
 $-x - x + 2 = \sqrt{5}$
 $2x = 2 - \sqrt{5}$
 $x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$0 < x < 2$
 $x - x + 2 = \sqrt{5}$
 $2 = \sqrt{5}$ (غیرممکن)

$x > 2$
 $x + x - 2 = \sqrt{5}$
 $2x = 2 + \sqrt{5}$
 $x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$M \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5} \right) \quad M \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5} \right)$$

$$AB \text{ خط } M \left| \frac{-10-10}{2} = -10 \right. \quad -1$$

$$\left| \frac{-12+10}{2} = -1 \right. \quad -a$$

$$m_{MC} = \frac{1 - (-a)}{2 - (-12)} = \frac{1+a}{14}$$

$$y - 1 = \frac{1+a}{14}(x - 2) \rightarrow 14y - 14 = (1+a)x - 2 - 2a$$

$$\rightarrow (1+a)x - 14y - 12 + 2a = 0$$

معادله میانه CM

$$BH = \left| \frac{12(-3) - 19(2) - 17}{\sqrt{12^2 + 19^2}} \right| = \frac{110}{\sqrt{505}}$$

ب) در معادله $(1+a)x - 14y - 12 + 2a = 0$ $a=0$ قرار دهیم

$$\begin{cases} -x + 14y - 12 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 14y - 12 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15y - 13 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 14y - 12 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15y - 13 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{15} \\ x = 1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

تابع

- ۱ آشنایی بیشتر با تابع
- ۲ انواع توابع
- ۳ وارون تابع
- ۴ اعمال روی توابع

۲ فصل



مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x) = \sqrt{x} + 50$ نمایش داد.

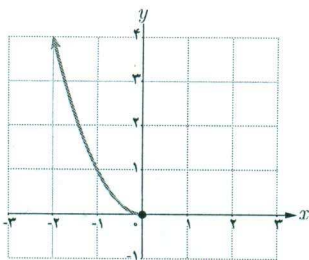
آشنایی بیشتر با تابع

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A ، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را دامنه تابع و B را هم دامنه تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم دامنه است.

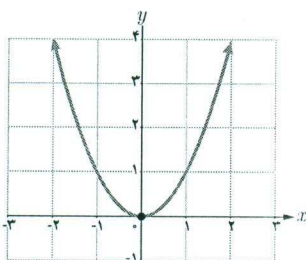
کارد در کلاسی

الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

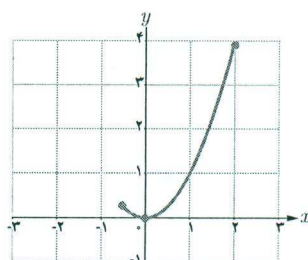
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$t(x) = x^2$	$s(x) = x^2$	$k(x) = x^2$
دامنه تابع	\mathbb{R}	$\{-1, 1, 2\}$	$(-2, 2]$	\mathbb{R}	$(-\infty, 0]$	$[-\frac{1}{4}, 2]$
برد تابع	\mathbb{R}	$\{-2, 2, 4\}$	$(-4, 4]$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$[0, 4]$



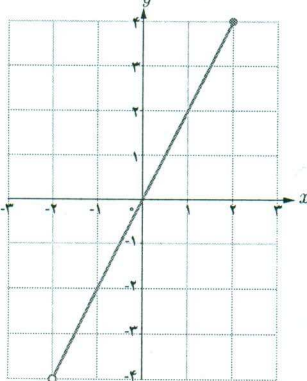
$s(x)$



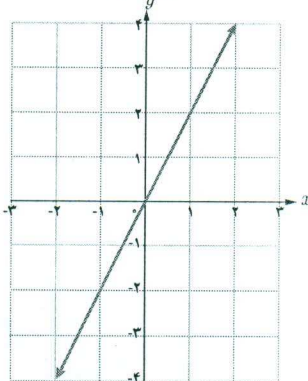
$t(x)$



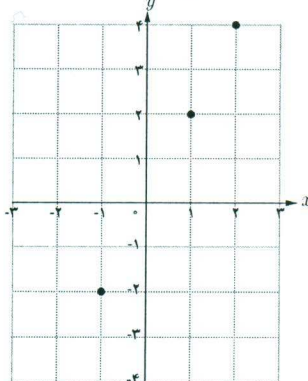
$k(x)$



$h(x)$



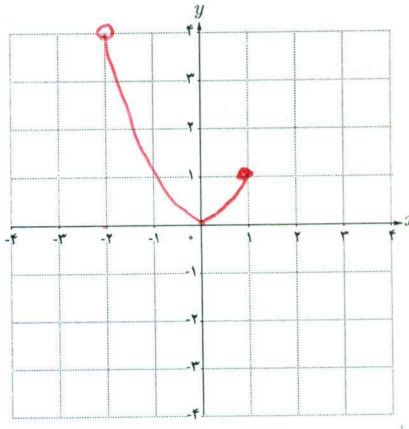
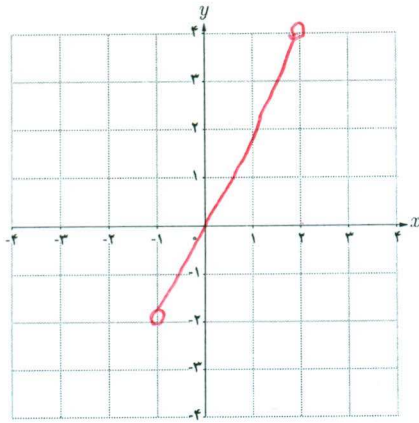
$f(x)$



$g(x)$

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = x^2$
دامنه	$(-1, 2)$	$(-2, 1]$
برد	$(-2, 4)$	$(\frac{1}{4}, 1]$

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟ **جی‌نهار**



برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

به‌طور مثال تابع f در قسمت الف کار در کلاس قبل، تابعی است با دامنه \mathbb{R} و هم‌دامنه \mathbb{R} و ضابطه آن نیز $f(x) = 2x$ است. برای سادگی و اختصار این تابع را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهند:

$$\left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x \end{array} \right.$$

(f تابعی از \mathbb{R} به \mathbb{R} است.)

$$\left\{ \begin{array}{l} h: (-2, 2] \rightarrow (-4, 4) \\ h(x) = 2x \end{array} \right.$$

به همین ترتیب تابع h قسمت الف را می‌توان چنین نمایش داد.

$$\left\{ \begin{array}{l} h: (-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = 2x \end{array} \right.$$

تابع h را به‌صورت مقابل هم می‌توان معرفی کرد.

در هر دو نمایش اخیر تابع h ، دامنه مجموعه $(-2, 2]$ و ضابطه آن $h(x) = 2x$ است. در نمایش اول هم‌دامنه $(-4, 4)$ است که همان برد تابع است. در نمایش دوم h ، هم‌دامنه را \mathbb{R} در نظر گرفته‌ایم. در این حالت نیز برد تابع $(-4, 4)$ است.

هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

برای تابع $f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \infty)$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ **بیروت**
 $f(x) = x^2$

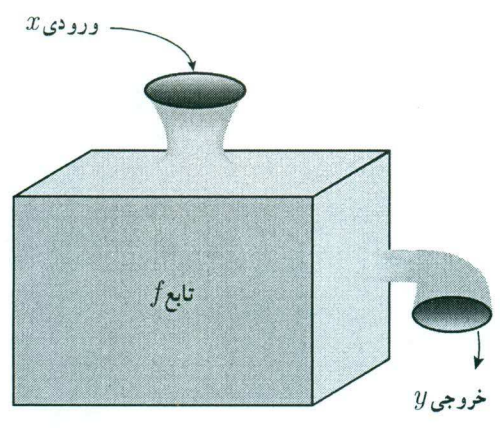
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$
 (الف) ✗

$f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}]$
 $f(x) = x^2$
 (ب) ✓

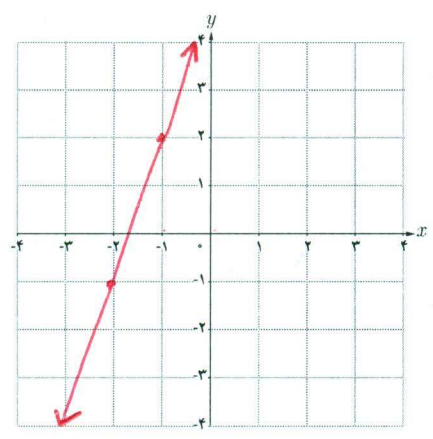
$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{9}]$
 $f(x) = x$
 (پ) ✗

$f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$
 (ت) ✓

تابع به عنوان یک ماشین



می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد (البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسانی داشته باشند). اگر x عنصری دلخواه از دامنه f و y نمایش خروجی نظیر آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند.
 در این صورت می‌نویسیم: $y = f(x)$



فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد (حقیقی) را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. در این صورت به ازای ورودی 10 ، خروجی 35 را می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- الف) ماشین به ازای ورودی -2 ، چه خروجی خواهد داشت؟ **-۱**
- ب) اگر خروجی ماشین 4 باشد ورودی آن چقدر بوده است؟
 $3x + 5 = 4 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$
- پ) نمایش تابع به صورت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است.
 $f(x) = 3x + 5$
- ت) نمودار تابع را رسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.
 $D = \mathbb{R}$ $R: \text{بر}$

تساوی دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع باهم برابرند که نمودارهای آنها کاملاً برهم منطبق شوند. به طور مثال هیچ کدام از توابع داده شده در قسمت الف کار در کلاس صفحه ۳۸ با یکدیگر برابر نیستند. اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی باهم برابرند که به عنوان دو مجموعه باهم برابر باشند.

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

مثال: تابع‌های $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ باهم برابرند ولی تابع‌های $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$ برابر نیستند. چرا؟

$D_f \neq D_g$
 $D_g = \mathbb{R}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

کار در کلاس

۱ در جدول زیر کدام یک از توابع داده شده زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید:

۱	$f = \{(1, 2), (5, 7)\}$	$g = \{(1, 7), (5, 2)\} \rightarrow f(1) \neq g(1) \leftarrow$ اما $D_f = D_g$
۲	$f = \{(a, b), (c, d)\}$	$g = \{(c, d), (a, b)\} \rightarrow$ f و g برابرند
۳	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x \end{cases}$	$\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 3x \end{cases} \rightarrow D_f \neq D_g$
۴	$f(x) = x x $	$g(x) = x^2 \rightarrow f(-1) \neq g(-1) \leftarrow$ اما $D_f = D_g$
۵	$f(x) = 4x$	$g(x) = \frac{4x}{4} \rightarrow$ f و g برابرند

۲ وقتی در آسمان پدیده آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t \in [4, 12]$:

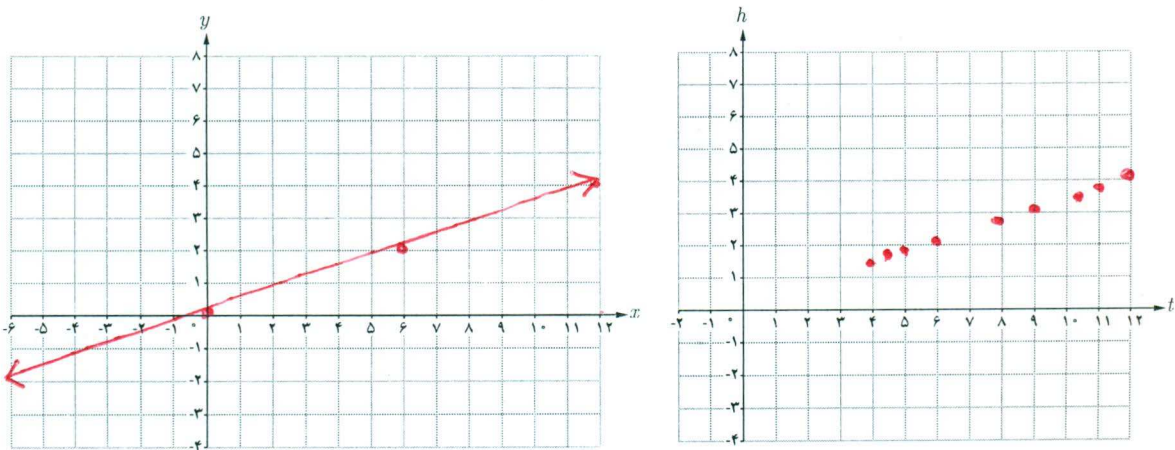
الف) جدول را کامل کنید:

t (ثانیه)	۴	$4\frac{1}{4}$	۵	۶	۸	۹	$10\frac{1}{5}$	۱۱	۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	۲	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{5+11}{15} = \frac{16}{5}$	$\frac{11}{3}$	۴

ب) چرا h تابعی از t است؟ برای هر زمان t فقط یک مقدار h وجود دارد
 پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید.
 ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید:

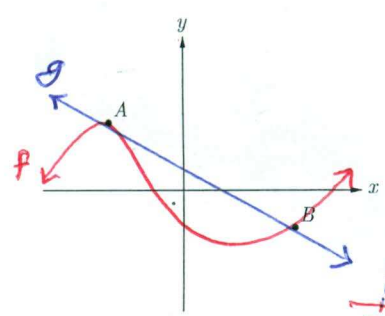
$$\begin{cases} h: [4, 12] \rightarrow [1, 4] \\ h(t) = \frac{1}{3}t \end{cases}$$

ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y = \frac{1}{3}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.
 $D_h \neq D_y$



تمرین

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ بی‌شمار

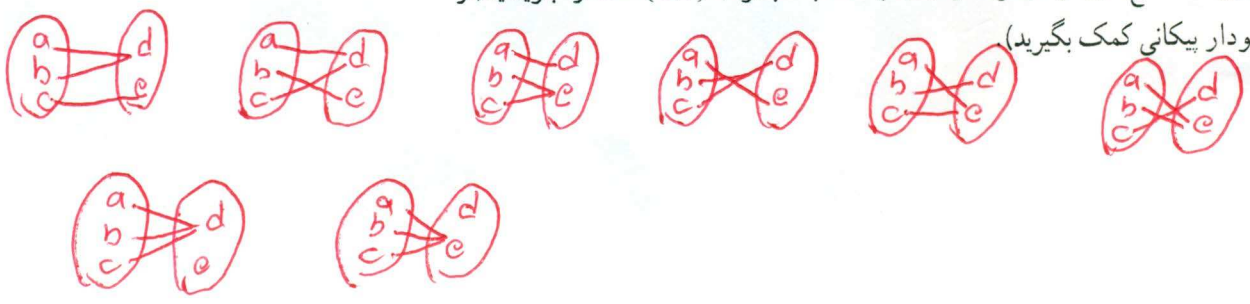


۲ کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

- الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند. (X)
- ب) برد و هم‌دامنه تابع می‌توانند یکی باشند. (V)
- پ) هم‌دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است. (X)
- ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0, 3]$ است. (V)

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ بی‌شمار $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید (از نمودار بی‌کافی کمک بگیرید)

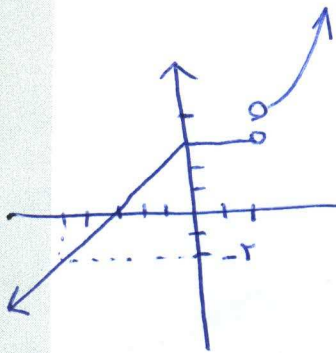


۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases} \quad \begin{cases} r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{cases} \quad \begin{cases} s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = 5x \end{cases}$$



۶ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(-5) = -2$ و $f(2) = 3$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد:

الف) $m(۳۵) = ۲۱۸ \times ۳۵ + ۷۰۱۴۴ = ۱۷۱۱۷۹$

تابع خطی برای مردان

ب) $۱۸۵ = ۲۱۸x + ۷۰۱۴۴$

$M(x) = ۲۱۸x + ۷۰۱۴۴$

$F(x) = ۲۱۸x + ۷۱۱۴۸$

تابع خطی برای زنان

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

$x = \frac{۱۸۵ - ۷۰۱۴۴}{۲۱۸} = \frac{۱۱۴۱۳۹}{۲۱۸} \approx ۵۲۳۵۷$ cm



خواندنی

نتایج یک مطالعه در مورد قد مردان و زنان از سال ۱۹۱۴ تا ۲۰۱۴ نشان می‌دهد که میانگین قد مردان ایرانی در طی این صد سال از ۱۵۷/۱ به ۱۷۳/۶ سانتی‌متر و میانگین قد زنان ایرانی از ۱۴۸/۵ به ۱۵۹/۷ سانتی‌متر رسیده است. مردان ایرانی بیشترین افزایش طول قد در دنیا را در ۱۰۰ سال اخیر داشته‌اند.

شما تاکنون با توابع مختلفی آشنا شده‌اید. توابع در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. تابع‌های ثابت، تابع‌های همانی، تابع‌های خطی و به‌طور کلی توابع چند جمله‌ای نمونه‌هایی از توابعی هستند که در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این درس با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند:

$$f(x) = \frac{5}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{\frac{1}{3}x - 4}{x^2 - 7x + 1}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{5}x + 2}{x^3 + 1}$$



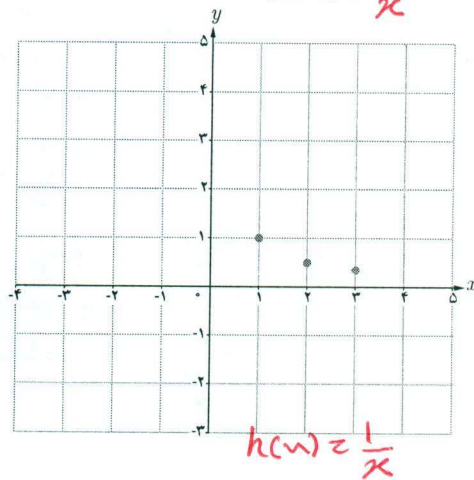
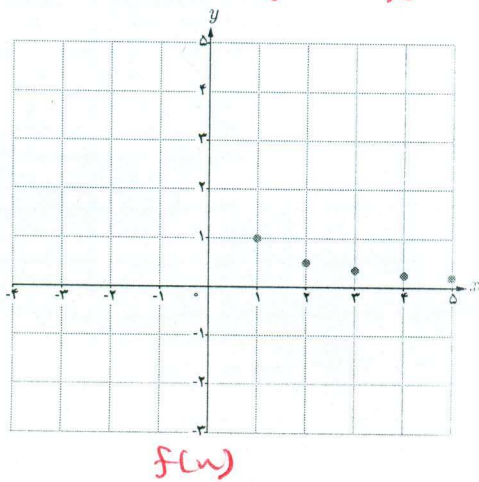
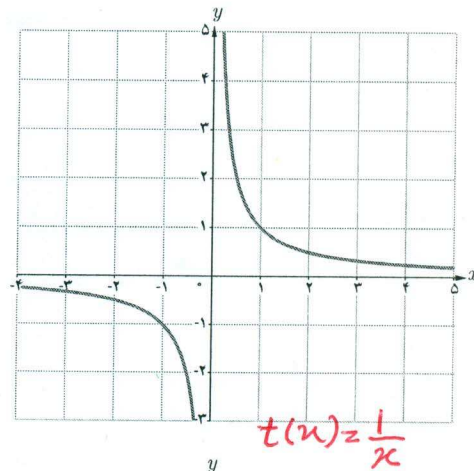
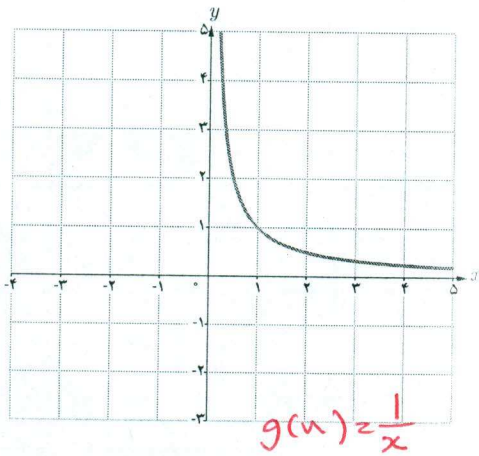
خواندنی

توابع گویا در دنیای واقعی کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال میانگین تعداد وسایل نقلیه‌ای که در یک صف منتظر ورود به یک پارکینگ هستند از تابع گویای $f(x) = \frac{x^2}{2(1-x)}$ بدست می‌آید که در آن x شدت ترافیک و عددی بین صفر و یک است.

فرودگاه امام خمینی (ره)

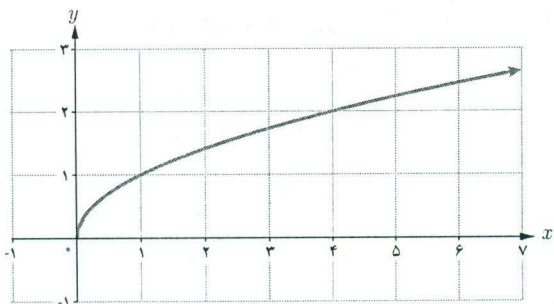
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

$\left\{ \begin{array}{l} f \\ \end{array} \right.$ <p>(الف)</p>	$\left\{ \begin{array}{l} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$ <p>(ب)</p>	$\left\{ \begin{array}{l} h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$ <p>(پ)</p>	$\left\{ \begin{array}{l} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$ <p>(ت)</p>
--	--	---	--



دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه‌های دیگری محدود کنیم. دامنه f را بار D نمایش می‌دهیم. دامنه یک تابع گویا مجموعه همه مقادیری است که به‌آزای آنها، عبارت جبری گویای نمایش دهنده ضابطه تابع، تعریف شده باشد؛ مثلاً دامنه تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{-2\}$ است.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)



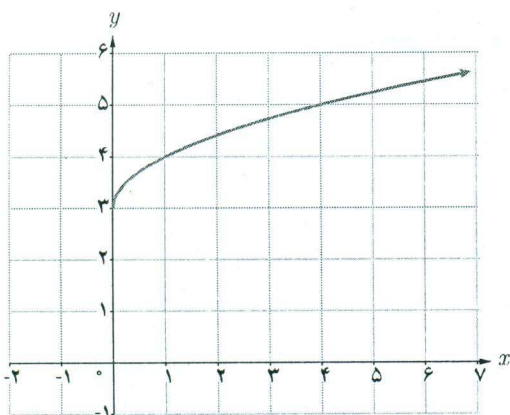
تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ یا $y = \sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازه $[0, +\infty)$ است. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

کاردرکلاس

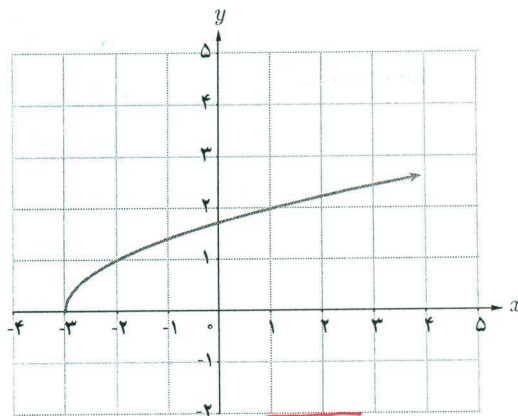
به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار چهار تابع:

الف) $f(x) = \sqrt{x} + 3$ ، ب) $h(x) = \sqrt{x} - 3$ ، پ) $g(x) = \sqrt{x-3}$ ، ت) $r(x) = \sqrt{x+3}$

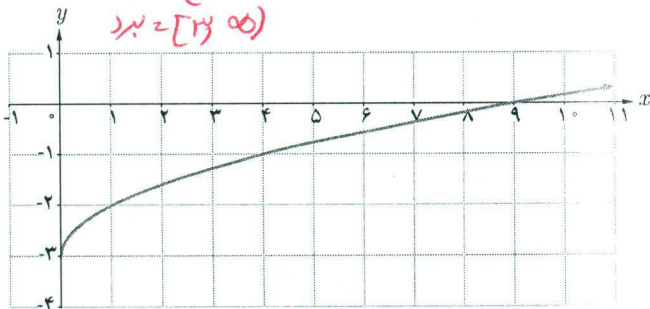
رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



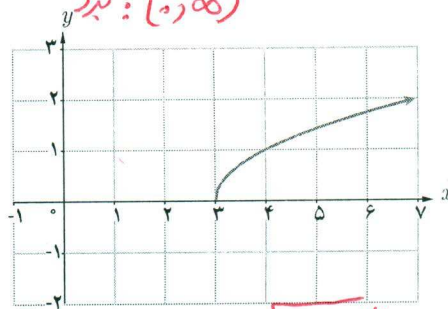
$f(x) = \sqrt{x} + 3$
 $D = [0, \infty)$
 برد: $[3, \infty)$



$r(x) = \sqrt{x+3}$
 $D = [-3, \infty)$
 برد: $[0, \infty)$

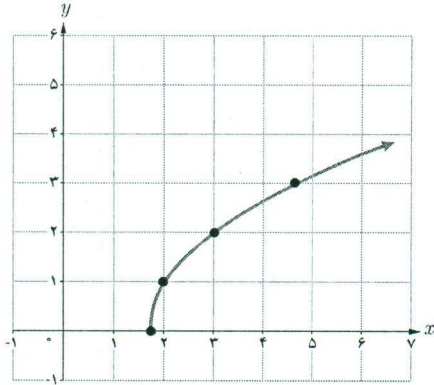


$h(x) = \sqrt{x} - 3$
 $D = [0, \infty)$
 برد: $[-3, \infty)$



$g(x) = \sqrt{x-3}$
 $D = [3, \infty)$
 برد: $[0, \infty)$

x	$\frac{5}{3}$	۲	۳	۴	$\frac{14}{3}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{7}$	۳



مثال : دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3x-5}$ برابر مجموعه همه اعدادی است که برای آنها $3x-5 \geq 0$ و یا $x \geq \frac{5}{3}$ پس : $D_f = [\frac{5}{3}, +\infty)$.

برد این تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است

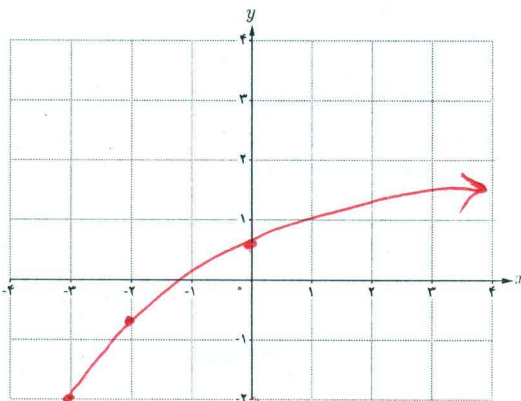
یعنی : $R_f = [0, +\infty)$

در جدول، مقادیر تابع f به ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

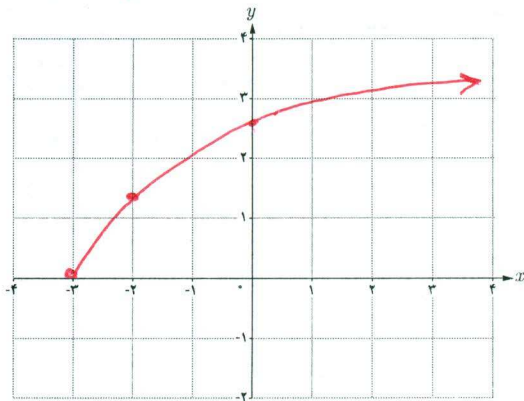
کارد کلاس

$2n+4 \geq 0 \quad 2n \geq -4 \quad n \geq -2 \quad D_f = [-2, \infty)$

الف) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x+6}$ را به دست آورید. سپس به کمک نقطه یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.
ب) نمودار تابع $g(x) = \sqrt{2x+6} - 2$ را به کمک انتقال رسم کنید.



الف) $D: [-3, \infty)$
ب) $D: [-2, \infty)$



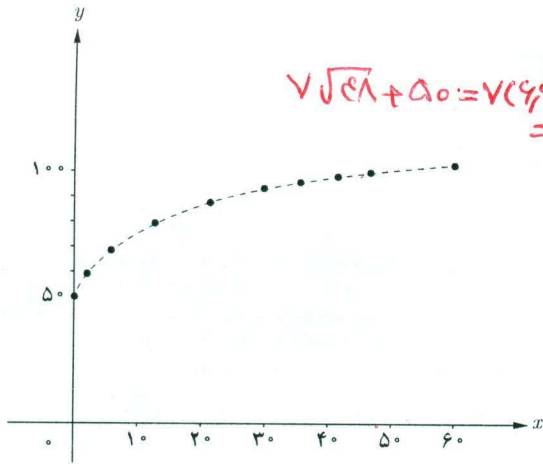
الف) $D: [-3, \infty)$
ب) $D: [-2, \infty)$

فعالیت

تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. x نشان دهنده ماه های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازه $[0, \infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازه $[0, 60]$ می باشد.

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



ب) برد این تابع چیست؟ $(50, \infty)$

ب) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید

که کودکی با قد ۷۵ سانتی متر حدوداً چند ماهه است.

$$75 = \sqrt{x} + 50$$

$$25 = \sqrt{x}$$

$$\frac{25}{\sqrt{}} = \sqrt{x}$$

$$25^2 = x \quad x = 12, 74$$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می دهند؛ مثلاً معادله $x + y = 2$ شامل همه زوج های مرتبی است که مجموع مؤلفه های آنها برابر ۲ است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به صورت $y = -x + 2$ یا $f(x) = -x + 2$ نیز نمایش می دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر بر حسب x و y یک تابع را مشخص نمی کند.

مثال ❀

الف) در معادله $-x^2 + y = 4$ ، y را بر حسب x به دست آورید. آیا y تابعی از x است؟ $y = x^2 + 4$ بله

❀ حل: داریم $y = x^2 + 4$. این معادله یک سهمی را مشخص می کند که همان تابع $f(x) = x^2 + 4$ است.

ب) آیا در معادله $x - y^2 = 4$ ، y تابعی از x است؟

❀ حل: اگر y را بر حسب x به دست آوریم داریم: $y = \pm\sqrt{x-4}$ به ازای $x = 5$ داریم: $y = \pm 1$. یعنی فقط نقاط $(5, 1)$ و

$(5, -1)$ روی نمودار تابع قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی دهد.

کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x| + 1$ **تابع هست**

ب) $x = |y| + 1$ **تابع نیست چون نقاط $(۵, ۴)$ و $(۴, -۵)$ هر دو در آن**

$x = ۵ \rightarrow y = \pm ۴$ **چون در این تابع مقدار دارد**

تابع پله ای - تابع جزء صحیح

هزینه ارسال بسته های پستی به طور معمول تابعی از وزن آنهاست. هزینه توقف خودرو در یک پارکینگ نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه ای از این توابع آشنا می شویم.

فعالیت

هزینه ارسال یک بسته پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) بر حسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \leq 2 \\ 10 & 2 < x \leq 5 \\ 17 & 5 < x \leq 10 \\ 20 & 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

اگر حداکثر وزن بسته های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

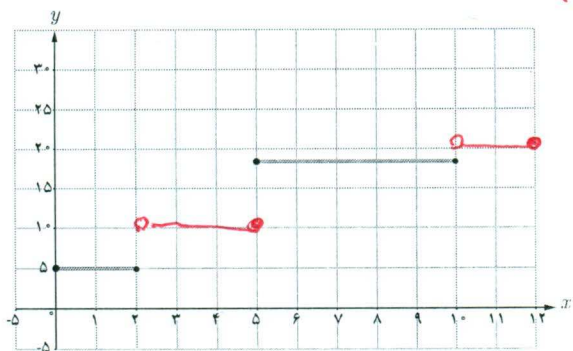
الف) ضابطه تابعی را که جدول فوق نشان می دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به دست آورید: $D = \{0, 12\}$ $\{5, 10, 17, 20\}$ برد

ب) برای ارسال دو بسته به وزن های ۹ کیلوگرم و

۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه ای باید پرداخت؟ $17 + 20 = 37$

ب) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.

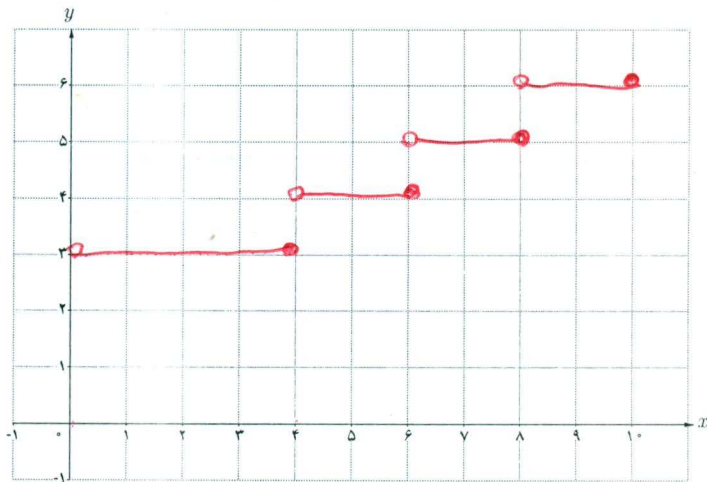
توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به گونه ای که تابع روی هر کدام از این بازه ها ثابت باشد، تابع پله ای می نامند.



۱ پارکینگ یک مجتمع تفریحی - ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر مدت توقف در این پارکینگ ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به‌ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

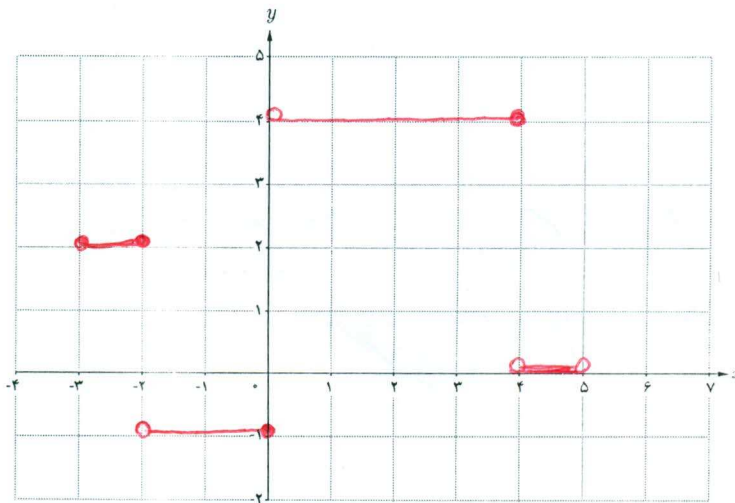
$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x \leq 4 \\ 4 & 4 < x \leq 6 \\ 5 & 6 < x \leq 8 \\ 6 & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$

$D = (0, 10]$
بر: $\{3, 4, 5, 6\}$



۲ نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید:

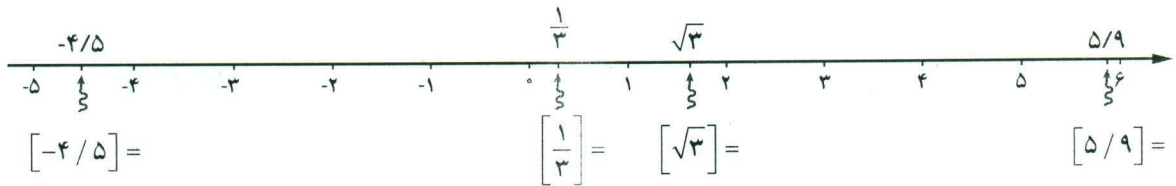
$$f(x) = \begin{cases} 2 & -3 \leq x \leq -2 \\ -1 & -2 < x \leq 0 \\ 4 & 0 < x \leq 4 \\ 0 & 4 < x < 5 \end{cases}$$



گونه خاصی از توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد. ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می‌شویم.

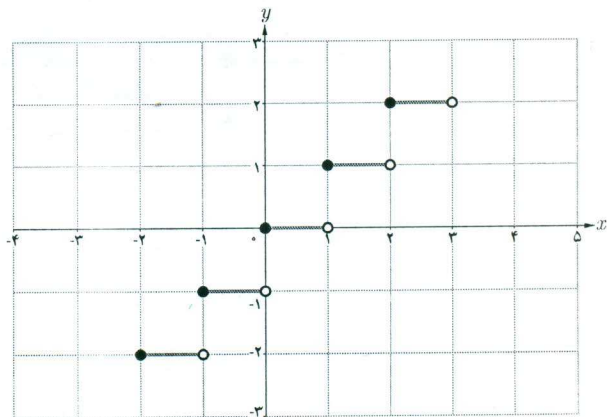
برای هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، به‌طور مثال $[-2/8] = -3$ و $[3/49] = 3$. مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره $x \leq [x]$. اگر x یک

عدد صحیح باشد $x = [x]$. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



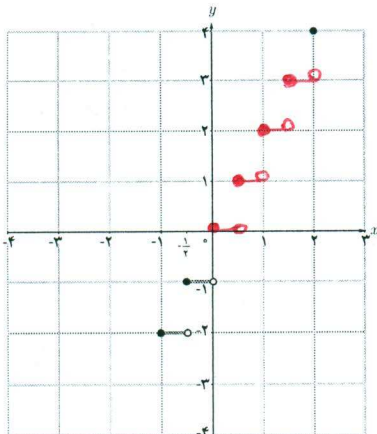
تابعی که به هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند. $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{Z}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $[-2, 3]$ رسم شده است.

x	$y = [x]$
$-2 \leq x < -1$	$y = -2$
$-1 \leq x < 0$	
$0 \leq x < 1$	
$1 \leq x < 2$	
$2 \leq x < 3$	



نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$$



$2x$	$-2 \leq 2x < -1$	$-1 \leq 2x < 0$		$2 \leq 2x < 3$	$3 \leq 2x < 4$
$[2x]$	-2	-1	0	2	3
x	$-1 \leq x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq x < 0$		$1 \leq x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 2$

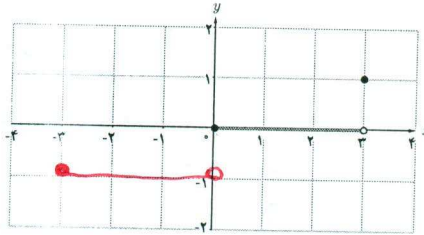
Handwritten notes in red ink:

- $0 \leq 2x < 1$ and $1 \leq 2x < 2$ with arrows pointing to the empty cells in the table above.
- $0 \leq x < \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2} \leq x < 1$ with arrows pointing to the empty cells in the table above.

۱ نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{1}{3}x\right] &= 0 \\ 0 \leq x < 3 \end{aligned} \right.$$

$$-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{1}{3}x\right] &= -1 \\ -3 \leq x < 0 \end{aligned} \right.$$



تمرین

۱ دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $f(x) = \frac{-3x}{x^2+1}$
 $D_f = \mathbb{R}$

پ) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$

$$(u+5)(u-3) = 0$$

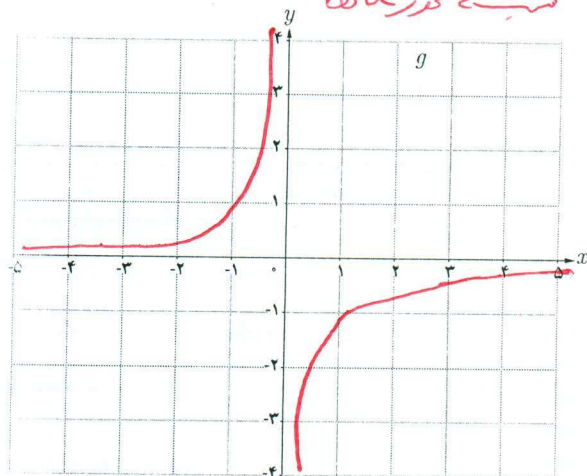
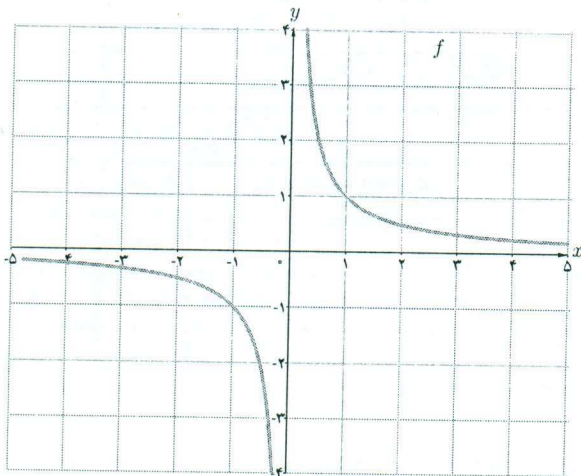
$$\begin{cases} u = -5 \\ u = 3 \end{cases}$$

ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$
 $3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$
 $D_f = \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$

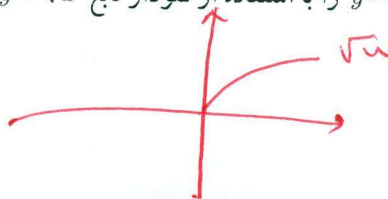
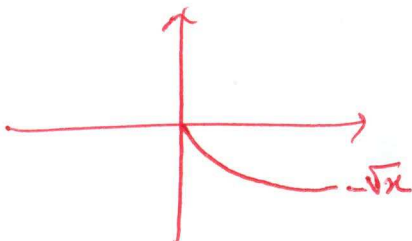
ث) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$
 $D_f = [0, \infty)$

ج) $f(x) = \sqrt{8-x}$
 $D_f = (-\infty, 8]$

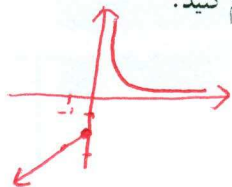
۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.
 نمودار g از قرین کردن نمودار f نسبت به محور x ها بدست می آید چون مقادیر تابع در نمودار g قرین هستند نسبت به محور x ها.



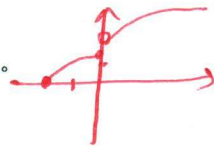
۳ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.



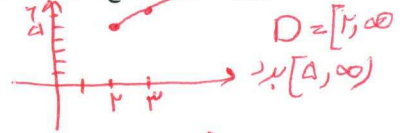
$D=R$
الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x-2 & x \leq 0 \end{cases}$ برد $(-\infty, -2] \cup (0, \infty)$



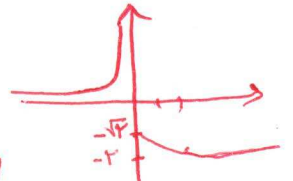
ب) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$
 $D = [-2, \infty)$ برد $[0, \infty) \cup (-2, 0]$



ب) $f(x) = \sqrt{x-2} + 5$



ت) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$
 $D=R$ برد $(-\infty, -2] \cup (0, \infty)$



۵ کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می کند؟

الف) $3x+2y=12$ تابع ✓
ب) $x=1$ تابع ✗
پ) $y=-2$ تابع ✓

ت) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$ تابع ✗

ث) $y^2=x^2$ تابع ✗
ج) $y=|x|$ تابع ✗



۶ هزینه پاک سازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی برحسب میلیون تومان است. الف) هزینه پاک سازی ۵٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟ ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

$\frac{255 \times 5}{100-5} = 255$ میلیون

۷ نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x]+1$, $-2 \leq x < 3$

ب) $f(x) = [-\frac{1}{4}x]$, $-4 \leq x < 4$

صفر دیگر

۸ نمودارهای دو تابع $y = [x]-3$ و $y = [x-3]$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه ای بین این دو تابع وجود دارد؟

صفر دیگر

۹ اگر تعداد افرادی که طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می شوند با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4+t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان برحسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

صفر دیگر

$$f(u) = [u] + 1 \quad -2 \leq u < 3$$

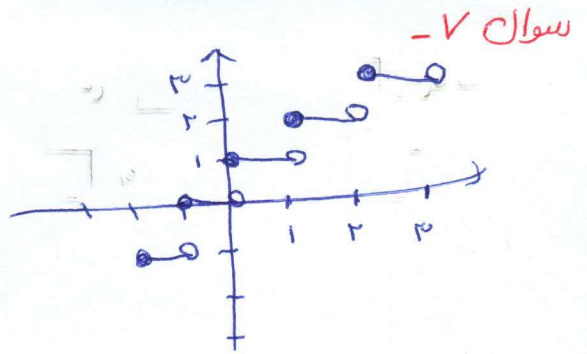
$$-2 \leq u < -1 \rightarrow [u] = -2 \rightarrow y = -1$$

$$-1 \leq u < 0 \rightarrow [u] = -1 \rightarrow y = 0$$

$$0 \leq u < 1 \rightarrow [u] = 0 \rightarrow y = 1$$

$$1 \leq u < 2 \rightarrow [u] = 1 \rightarrow y = 2$$

$$2 \leq u < 3 \rightarrow [u] = 2 \rightarrow y = 3$$



$$f(u) = \left[\frac{1}{7} u \right] \quad -8 \leq u < 8$$

$$-8 \leq u < -7$$

$$-2 \leq \frac{1}{7} u < -1 \rightarrow f(u) = -2$$

$$-7 \leq u < -6$$

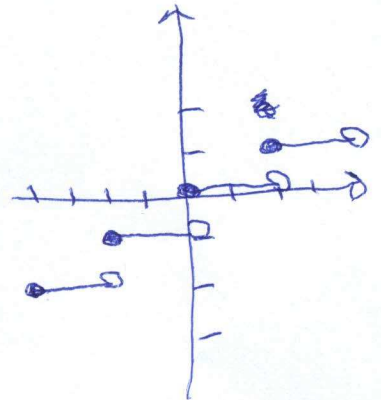
$$-1 \leq \frac{1}{7} u < 0 \rightarrow f(u) = -1$$

$$-6 \leq u < -5$$

$$0 \leq \frac{1}{7} u < 1 \rightarrow f(u) = 0$$

$$-5 \leq u < -4$$

$$1 \leq \frac{1}{7} u < 2 \rightarrow f(u) = 1$$



$$y = [u] - 3$$

$$-2 \leq u < -1 \rightarrow y = -4$$

$$-1 \leq u < 0 \rightarrow y = -5$$

$$0 \leq u < 1 \rightarrow y = -6$$

$$1 \leq u < 2 \rightarrow y = -7$$

$$y = [u - 3]$$

$$y = -4$$

$$y = -5$$

$$y = -6$$

$$y = -7$$

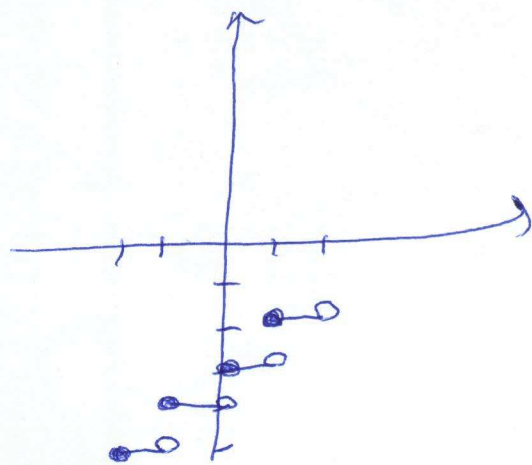
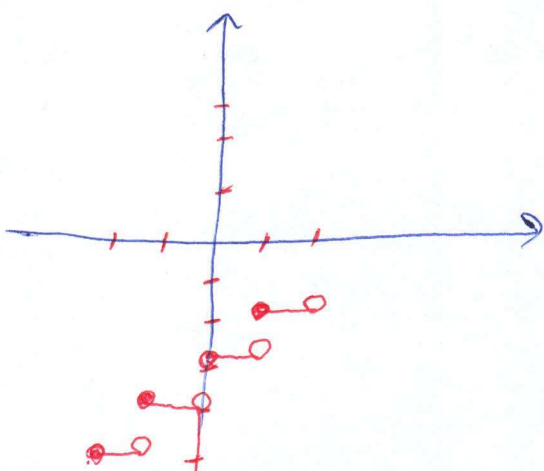
$$-4 \leq u - 3 < -3$$

$$-5 \leq u - 3 < -4$$

$$-6 \leq u - 3 < -5$$

$$-7 \leq u - 3 < -6$$

سوال ۸ -



هر دو تابع نمودار یکسانی دارند

$$N(A) = \frac{95000 \times A - 2000}{A + 5} = \frac{95000 - 2000}{9} = \frac{93000}{9} = 10333 \frac{1}{3}$$

سوال ۹ - الف)

نفر

$$10333 \frac{1}{3} = \frac{95000t - 2000}{t + 5} \rightarrow 22000 + 10333t = 95000t - 2000$$

$$20000 = 84667t$$

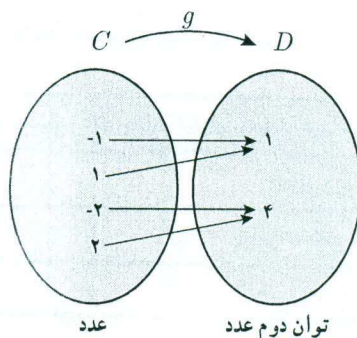
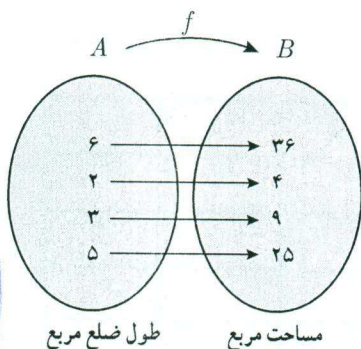
$$t = 0.236$$



واریون انواع

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید:



الف) f و g را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$$f = \{(2, 9), (3, 14), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$g = \{(-1, 1), (1, 4), (2, 4), (3, 1)\}$$

$$D_f = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$D_g = \{-1, 1, 2, 3\}$$

$$R_f = \{9, 14, 16, 25\}$$

$$R_g = \{1, 4\}$$

ب) اگر جای دو مؤلفه هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به دست می‌آید. آنها را به ترتیب

h و k بنامید. h و k را واریون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

$$h = \{(9, 2), (14, 3), (16, 4), (25, 5)\}$$

$$k = \{(1, -1), (4, 1), (4, 2), (1, 3)\}$$

کدام یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید. h تابع دومی که تابع نیست معکوس را رابطه‌ای که تابع است

اگر رابطه بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی

دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به دست می‌آید واریون آن رابطه می‌نامیم.

اگر f یک تابع باشد واریون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

اگر f^{-1} تابع باشد آن‌گاه f را واریون پذیر (معکوس پذیر) و f^{-1} را «تابع واریون» f می‌نامیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

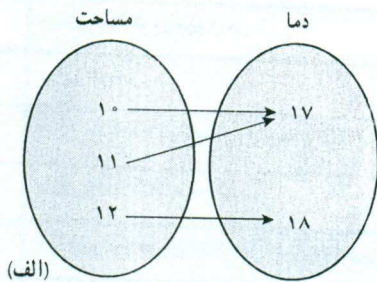
می‌باید که این رابطه معکوس
ع هر کفنی که یک مجموعه معکوس
نزدیک تطبیق کند و
یع از برد متعلق به چیده
از دامنه نباشد

توابع یک به یک

چه توابعی وارون پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون پذیر بود ولی تابع g وارون پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون پذیر باشد؟ *چه طور می توانی در هر دو طرف از هر دو تابع فقط یک عنصر داشته باشی*
ظرف شده باشد

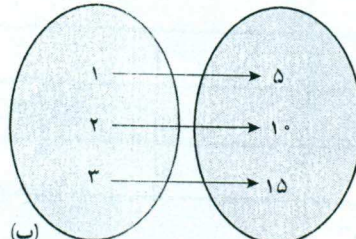
فعالیت

توابع زیر را در نظر بگیرید:



(الف)

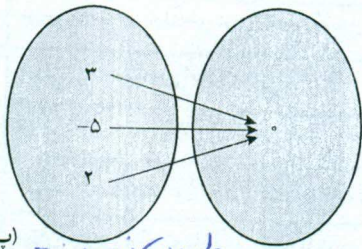
وارون پذیر نیست



(ب)

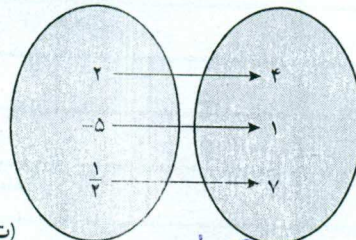
وارون پذیر

(الف) کدام یک از آنها وارون پذیرند؟



(پ)

وارون پذیر نیست



(ت)

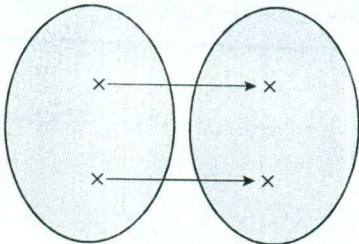
وارون پذیر

(ب) ویژگی مشترک توابع وارون پذیر

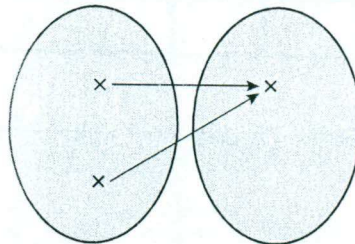
چیست؟

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

همان گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک به یک باشد آن گاه وارون پذیر است.



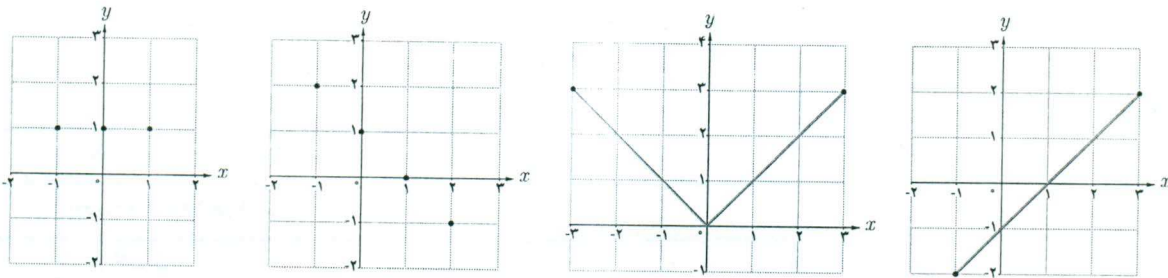
تابع یک به یک است.



تابع یک به یک نیست.

فعالیت

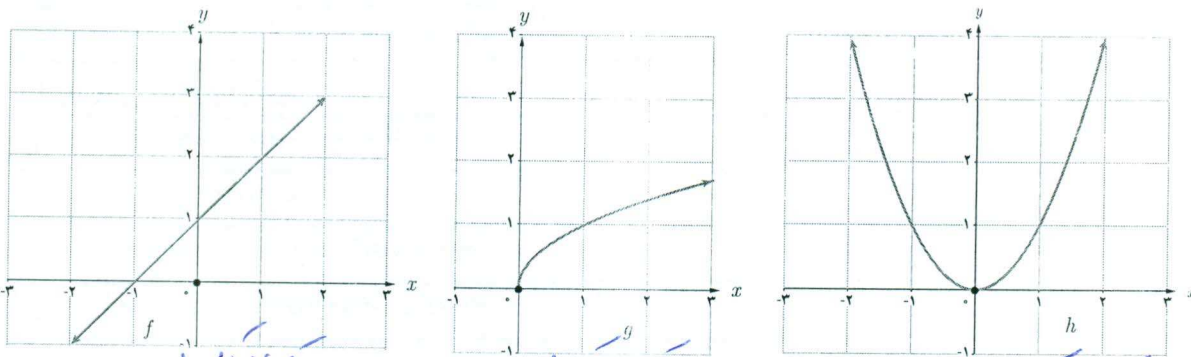
توابع داده شده در (الف) و (پ) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.



توابع (الف) و (پ) هر یک در هر یک از دو محور x و y یک نقطه قطع کند.
 توابع (ب) و (ت) هر یک در هر یک از دو محور x و y دو نقطه قطع کند.
 ۲ از ۲-۳ + ۳ = ۵ هر دو خط x و y را قطع می کنند.
 به طور کلی می توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کاردر کلاس

۱ کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



$k = \{(1,2), (3,4), (8,9)\}$

$l = \{(3,7), (2,5), (1,5)\}$

۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می کند. چون کدهای اعضا یک به یک نیستند پس نمی توانیم بگوییم که هر کد ملی متعلق به دو نفر یا بیشتر باشد یعنی هر کد ملی فقط متعلق به یک نفر می باشد.

نکته ← وارون تابع ممکن است تابع باشد یا نباشد ولی تابعی همواره تابع هست

کارد کلاس

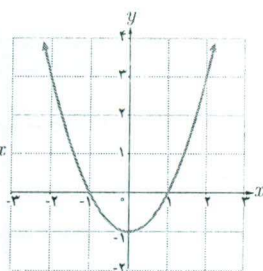
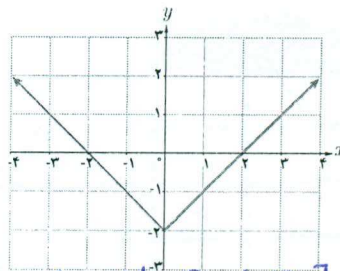
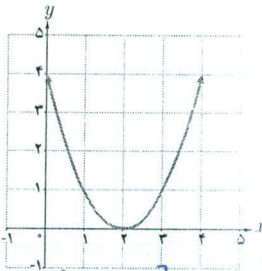
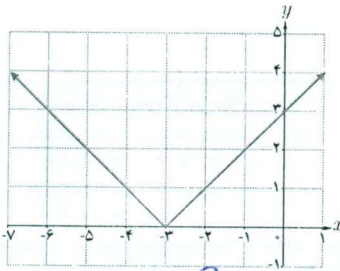
تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x+3|$

ب) $y = (x-2)^2$

پ) $y = |x|-2$

ت) $y = x^2 - 1$



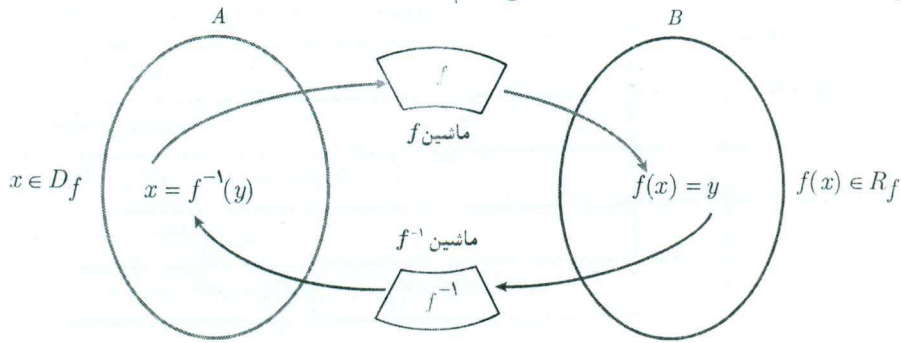
دامنه محدود
 $D = (-\infty, 3]$
 یا
 $D = [3, \infty)$

دامنه محدود
 $D = (-\infty, 2]$
 یا
 $D = [2, \infty)$
محاسبه وارون یک تابع

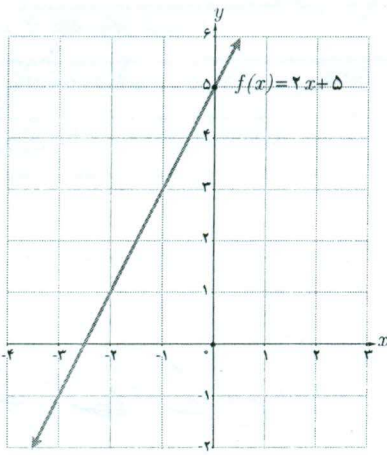
دامنه محدود
 $D = [0, \infty)$ یا $D = (-\infty, 0]$

دامنه محدود
 $D = [0, \infty)$ یا $D = (-\infty, 0]$

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و f^{-1} را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و f^{-1} و نحوه محاسبه f^{-1} آشنا می‌شویم.



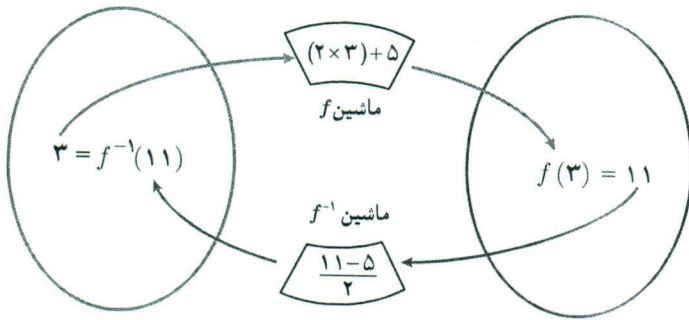
فعالیت



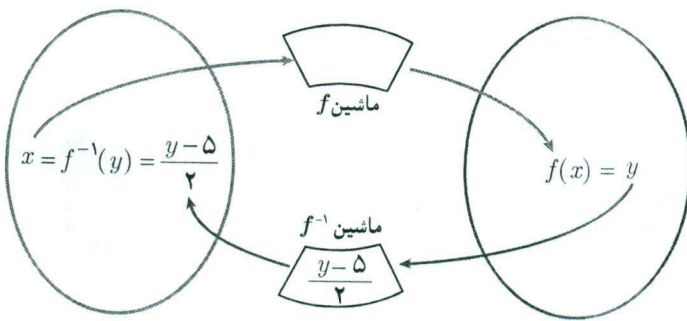
تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم.
 $f(x) = 2x + 5$

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

چون هر دو انتی آن را از یک نقطه قطع می‌کنند هر کفو برد دقیقاً یک کفواز داند قطره شده است



ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید:
 $(3, 11) \in f$ و $(11, 3) \in f^{-1}$
 به عبارت دیگر $f(3) = 11$ و $f^{-1}(11) = 3$



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$ ، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

ت) بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = 2x + 5 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \quad (y \in R_f)$$

f^{-1} را به صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(t) = \frac{t-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(h) = \frac{h-5}{2} \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} \end{cases}$$

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y = 2x + 5$$

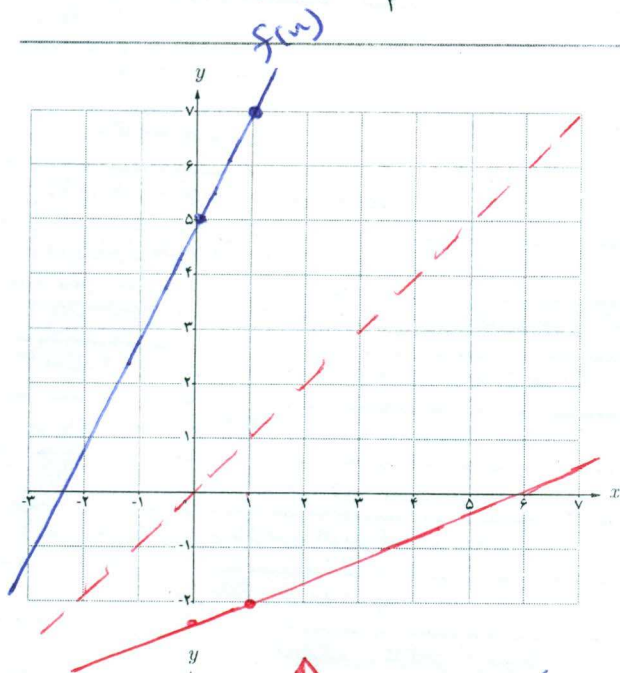
$$\Rightarrow 2x = y - 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - 5}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

کاردر کلاس



با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = 2x + 5$ نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x) = 2x + 5$$

$$y = 2x + 5$$

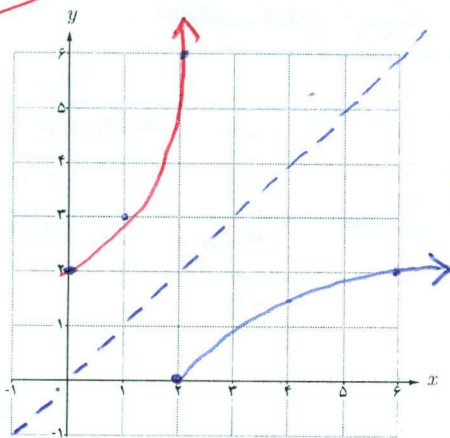
$$y - 5 = 2x$$

$$x = \frac{y - 5}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

$$\frac{y}{x} \quad \frac{5}{-5} \quad \frac{1}{-2}$$



اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - 2}$ ، دامنه و برد f را $D = [2, \infty)$ و $R_f = [0, \infty)$ به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

در معادله $y = \sqrt{x - 2}$ ضابطه f^{-1} را بنویسید. نمودار

f^{-1} را رسم و دامنه و برد f^{-1} را معلوم کنید.

$$y = \sqrt{x - 2}$$

$$y^2 = x - 2$$

$$y^2 + 2 = x \Rightarrow f^{-1}(y) = y^2 + 2$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

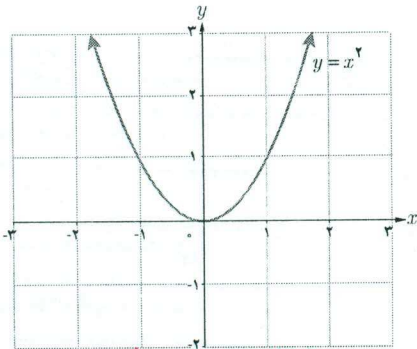
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز

ربع اول و سوم) به دست آوریم.

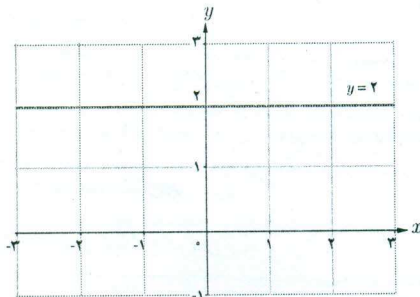
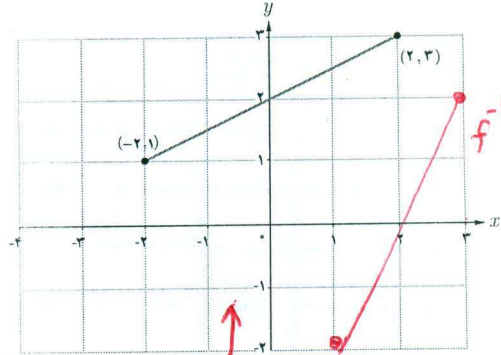
$$D_{f^{-1}} = [0, \infty)$$

$$R_{f^{-1}} = [2, \infty)$$

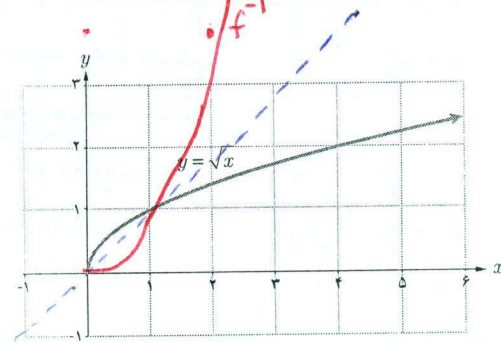
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک در همان دستگاه مختصات رسم کنید.



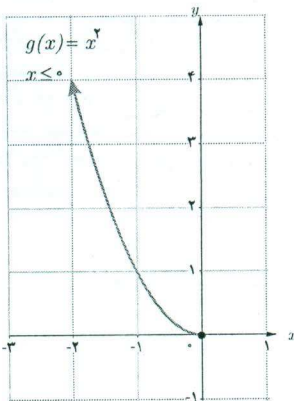
وارون پذیر نیست



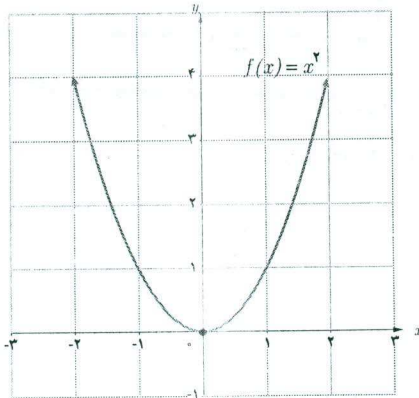
وارون پذیر نیست



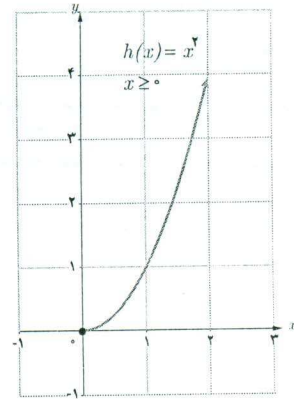
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازه $[0, \infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ تابعی یک به یک به دست می‌آید.



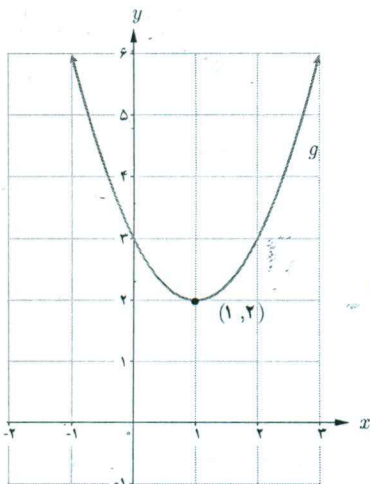
g یک به یک و وارون پذیر است.



f یک به یک نیست، وارون پذیر هم نیست.



h یک به یک و وارون پذیر است.



❖ مثال: نمودار تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. به طور مثال $g(0) = g(2)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.
در مورد تابع g داریم:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R} \text{ و } R_g = [2, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

دامنه f را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم.
بنابراین تابع جدید به صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون پذیر است.

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x-1)^2 + 2 \end{cases}$$

$$D_f = [1, +\infty) \quad , \quad R_f = [2, +\infty)$$

اکنون سعی می‌کنیم x را بر حسب y به دست آوریم:

$$y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = y - 2 \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y - 2}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین:

$$x - 1 = \sqrt{y - 2} \Rightarrow x = \sqrt{y - 2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1$$

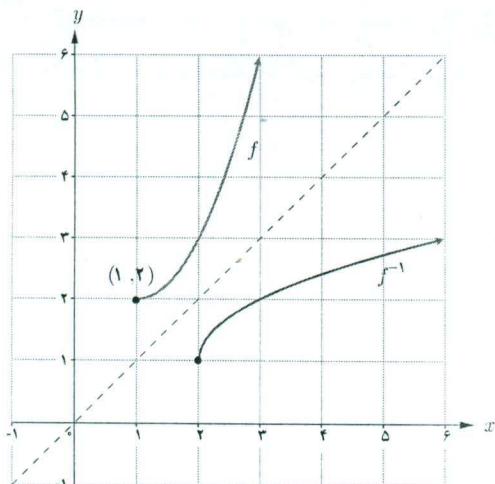
در حقیقت داریم:

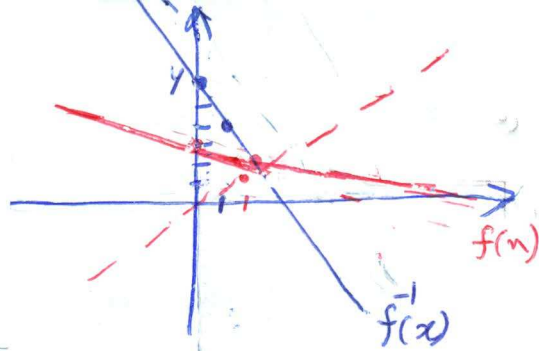
$$\begin{cases} f^{-1}: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1 \end{cases}$$

$$D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

$$R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

نمودار f و f^{-1} در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.





نقطه برخورد f و f^{-1}

$[1,1]$

۶۲

تمرین

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال یزنید که یک به یک نباشد. ارتباط بین معلم و شاگردان تمام شاگردان یک کلاس یک معلم را می

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{2}$ است؟ خیر چون $f(g(x)) \neq x$ و $g(f(x)) \neq x$

۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست

آورید:

با سطح هاد در معنی بعد

الف) $f(x) = (x+5)^2$, $x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$, $x \geq 2$

پ) $f(x) = (x-3)^2$

ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست

می آید.

الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟ چون در ارتفاع از تیزر زمان منحصر جزری از دامنه خطی می سوز

پ) تابع وارون h را به دست آورید.

$y = 100 - 5x^2 \rightarrow y - 100 = -5x^2 \rightarrow \frac{y-100}{-5} = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{100-y}{5}}$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 + 1$



۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

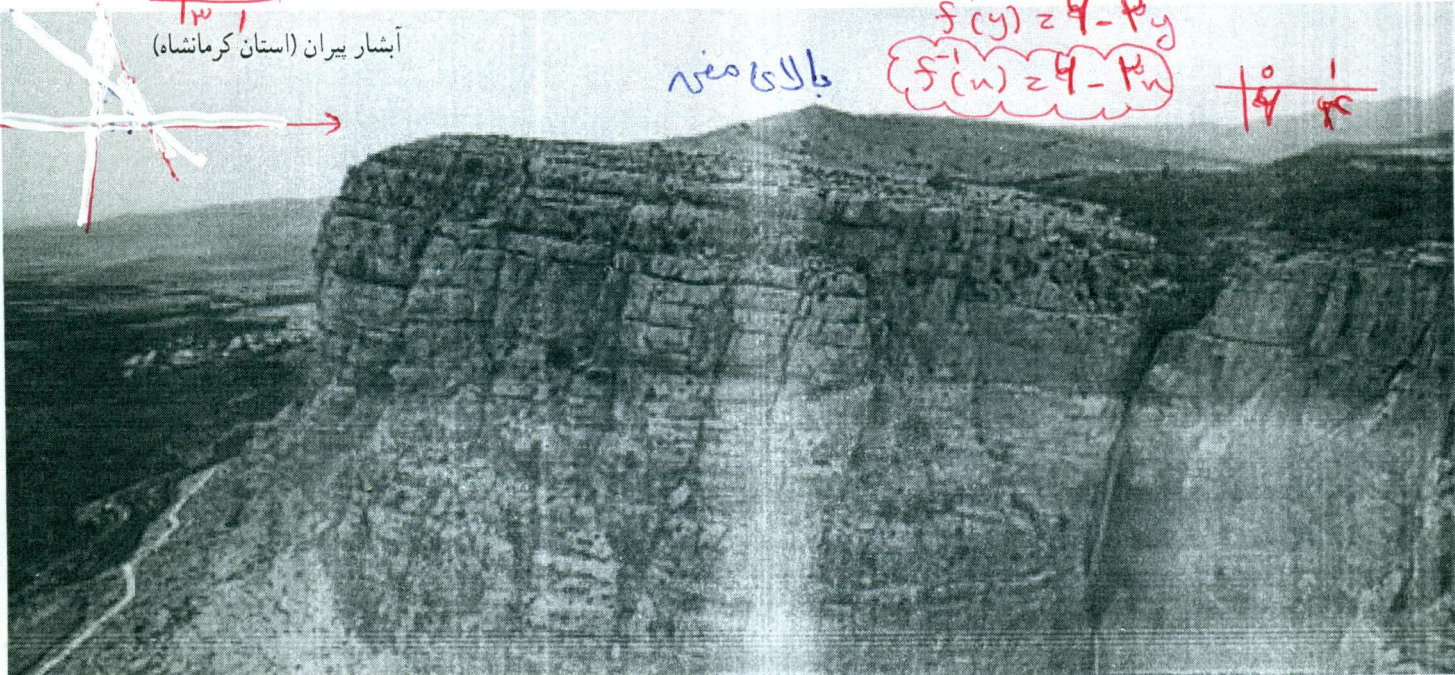
$y = -\frac{1}{3}x + 3 \rightarrow y - 3 = -\frac{1}{3}x \rightarrow \frac{y-3}{-1/3} = x \rightarrow x = 3 - 3y$
 $f^{-1}(y) = 3 - 3y$
 $f^{-1}(x) = 3 - 3x$

آبشار بیران (استان کرمانشاه)

بالای منزه

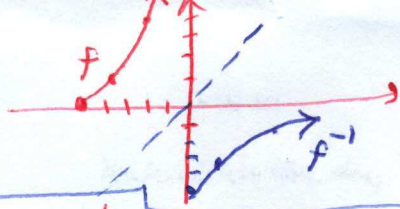
$f^{-1}(x) = 3 - 3x$

$\frac{1}{3} \frac{1}{3}$



الف) $f(x) = (x + A)^r$

-A	-r	-r
0	1	r

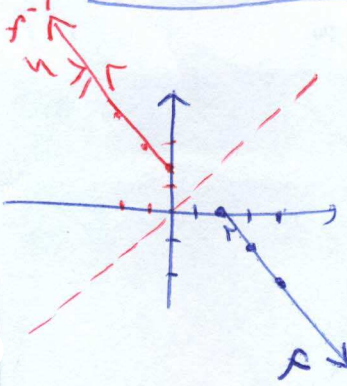


$y = (x+A)^r$
 $y^r = x+A$
 $y^r - A = x$
 $f^{-1}(y) = y^r - A$

$f^{-1}(x) = x^r - A$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$

1	2	3
0	-1	-2



$y = -|x-1| + 1$

$y-1 = -|x-1|$

$1-y = |x-1|$

$1-y = x-1$

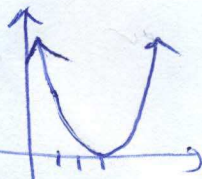
$2-y = x$

$f^{-1}(y) = 2-y$

$f^{-1}(x) = 2-x$

ج) $f(x) = (x-3)^2$

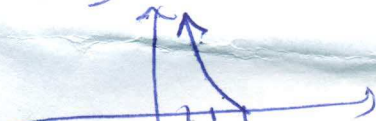
این تابع وارون پذیر نمی باشد چون یک به یک نیست



این نمودار وارون پذیر نمی باشد زیرا با یک خط عمودی



تقریباً در $[3, \infty)$ وارون پذیر

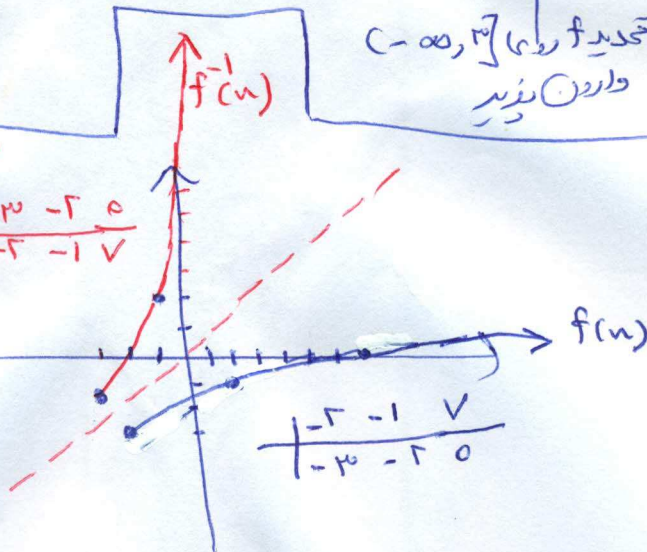


تقریباً در $(-\infty, 3]$ وارون پذیر

د) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

-3	-2	0
-5	-1	2

این تابع یک به یک وارون پذیر است



-2	-1	2
-3	-2	0

$y = \sqrt{x+2} - 3$

$y+3 = \sqrt{x+2} \rightarrow (y+3)^2 = x+2 \rightarrow x = (y+3)^2 - 2$

$f^{-1}(y) = (y+3)^2 - 2$

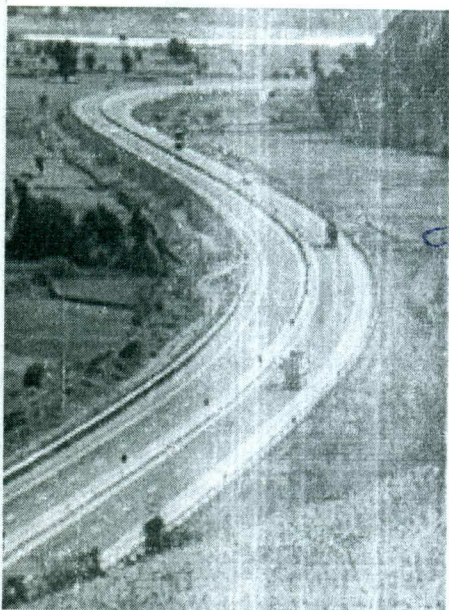
$f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2$

۴

درس

همان گونه که عمل های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چند جمله ای انجام پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر مثالی واقعی از این موضوع بررسی می شود.

فاصله زمانی لحظه ای که راننده با یک مانع روبرو می شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس العمل» می نامند.

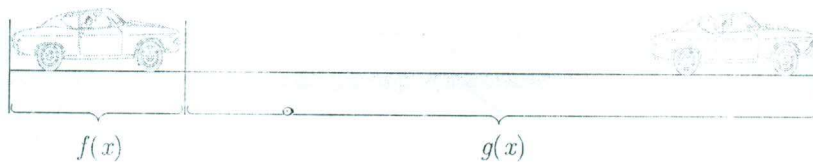


فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی در حال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس العمل» طی می کند از تابع $f(x) = \frac{1}{100}x$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است. همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می کند از تابع $g(x) = \frac{1}{1000}x^2$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است و x سرعت اتومبیل بر حسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می شود؟
 ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.

مسافت طی شده پس از دیدن مانع + مسافت طی شده پس از ترمز کردن = مسافت طی شده تا توقف کامل

$$h(x) = f(x) + g(x)$$



مجموع فاصله طی شده در طول زمان عکس العمل و فاصله طی شده پس از ترمز کردن را «فاصله دیدن توقف» می نامند. این فاصله در طراحی جاده ها و بزرگراه ها کاربرد دارد.

پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی در حال حرکت بوده است؟

$$40 = \frac{1}{100}x + \frac{1}{1000}x^2$$

$$40000 = 100x + x^2 \rightarrow x^2 + 100x - 40000 = 0$$

$$\Delta = 10000 + 160000 = 170000$$

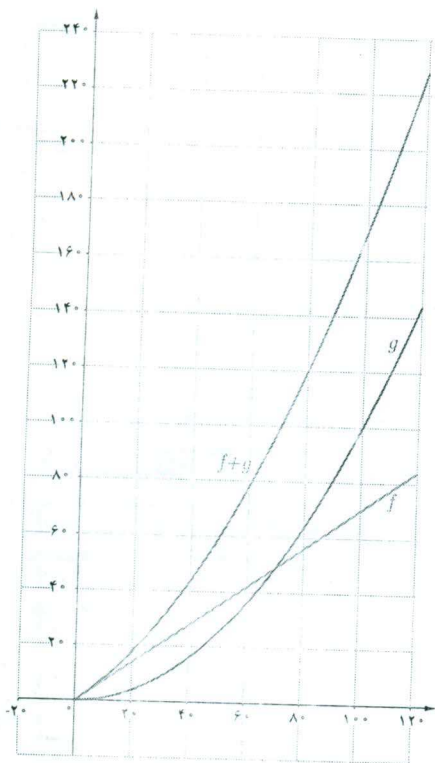
$$x_1 = \frac{-100 + \sqrt{170000}}{2} \approx \frac{-100 + 412}{2} = 156 \text{ m/s}$$

$$x_2 = \frac{-100 - \sqrt{170000}}{2} \approx \frac{-100 - 412}{2} = -256 \text{ m/s}$$

۱- برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب مانع ۲۶۲ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می گیرد.

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنه آن مجموعه $D_f \cap D_g$ است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g در حالت کلی مجموعه \mathbb{R} است، ولی در این مسئله واقعی دامنه تابع مجموعه ای مانند $[0, 120]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است. نمودارهای سه تابع f ، g و $f+g$ ، فعالیت قبل، در شکل روبه رو رسم شده است. رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

$$(f+g)(x) = x + 2 + \sqrt{x-1}$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R} \cap [1, \infty) = [1, \infty)$$

$f+g$

اگر $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را محاسبه کنید. دامنه تابع $f+g$ را به دست آورید.

اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 4), (0, -1)\}$

ابتدا دامنه $f+g$ را به دست آورید و سپس $f+g$ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نمایش دهید.

$$D_{f+g} = \{0, 1, 2\} \quad f+g = \{(0, 4), (1, 7)\}$$

به طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ و $h(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ توابع $f+g$ ، $g-h$ ، gh و $\frac{f}{g}$ را محاسبه کنید و دامنه آنها را به دست آورید. کدام یک از مقادیر $(f+g)(2)$ و $(f+g)(5)$ وجود دارند؟

حل: ابتدا دامنه هریک از توابع را به دست می آوریم:

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$D_g = (-\infty, 3]$$

$$D_f = [-2, \infty)$$

$(f+g)(2) = 3$ ولی $(f+g)(5)$ وجود ندارد.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 3]$$

$$(g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = (\sqrt{3-x}) \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)$$

$$D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = (-\infty, 3]$$

$$(g-h)(x) = g(x) - h(x) = \sqrt{3-x} - \frac{x+2}{2x+1}$$

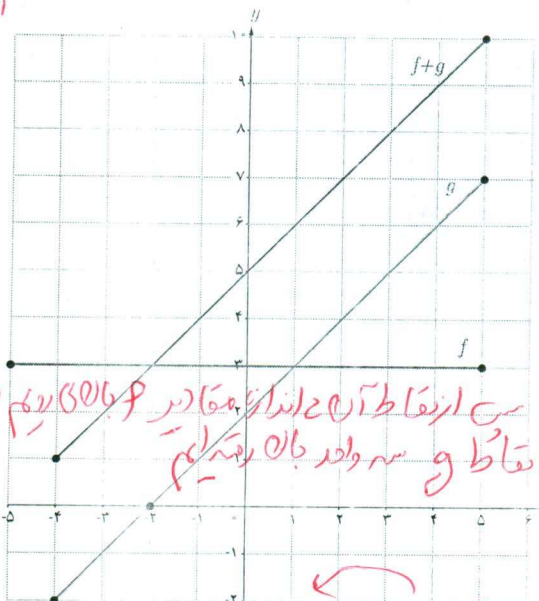
$$D_{g-h} = D_g \cap D_h = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 3]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [-2, 3] - \{3\}$$



x_1, y_1
 $(0, -1)$
 $(-2, 0)$
 $m_2 = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$
 $z = -\frac{1}{2}$



فصلت
 $D_f = [-2, \infty)$ $f(x) = \sqrt{x+2}$
 $D_g = (-\infty, 3]$ $g(x) = \sqrt{3-x}$

در شکل رویه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنه f و دامنه g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم. ابتدا نام f و g را رسم کردیم. تب نقاط f و g را رسم کردیم و با هم جمع کردیم. تب نقاط $f+g$ را رسم کردیم.

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.

$$f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$$

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$$

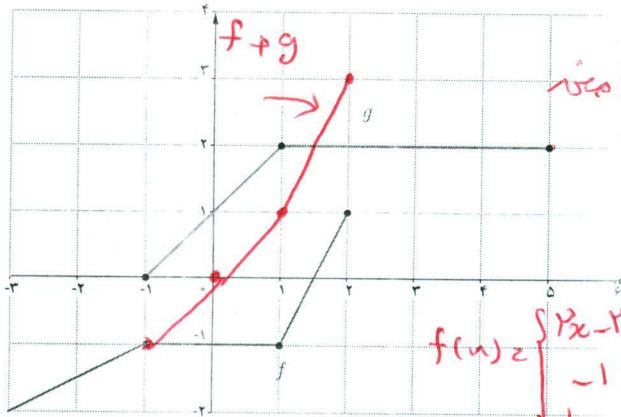
$$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{(x+2)(3-x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

$D_{f+g} = [-2, 3]$
 $D_{f-g} = [-2, 3]$
 $D_{f \cdot g} = [-2, 3]$
 $D_{\frac{f}{g}} = [-2, 3] - \{3\}$
 $D_f \cap D_g = [-2, 3]$
 $(D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 2 = 1$$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 0 = -1$$



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به دست آورید. **بالا مستر**

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را

در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ ، f ، g را به دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با

ب) مقایسه کنید.

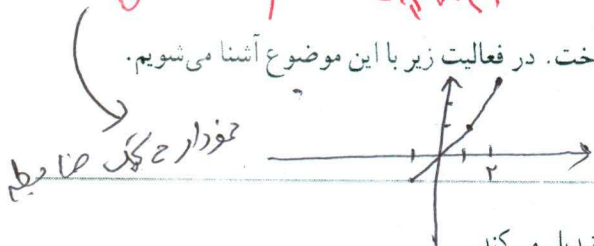
$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} & \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ x+1 & -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

ترکیب توابع

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.



حقیقاً نمودار مجموع تابع‌ها با نمودار یکی از آن‌ها متفاوت است. ملاحظه کنید $f+g$ یکی می‌شود.

تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

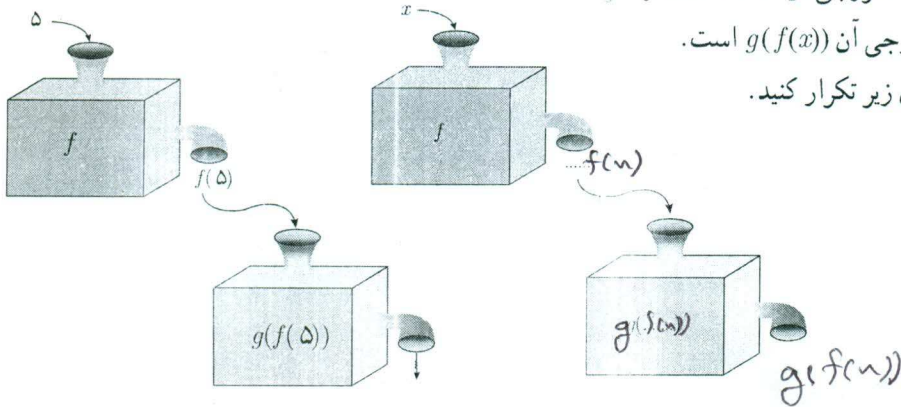
الف) $f(32) = 0$ به چه معنی است؟ 50° درجه فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟
 ب) تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلون تبدیل می‌کند. $g(0) = 273$ به چه معنی است؟ یعنی 0 درجه سانتی‌گراد برابر 273 درجه کلون می‌باشد.

پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین در نظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلون تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که 5 درجه فارنهایت معادل چند درجه کلون است؟

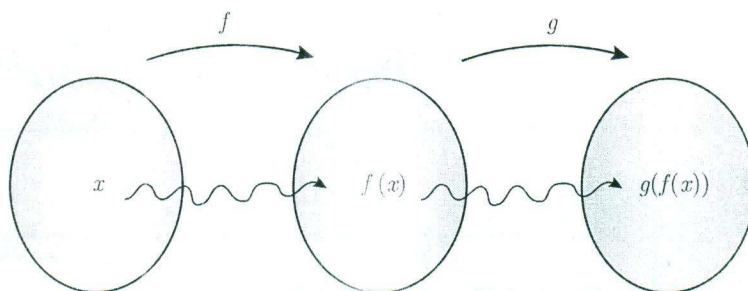
$$f(5) = -1A^\circ$$

$$g(f(5)) = g(-1A^\circ)$$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر ورودی تابع g ، $f(x)$ باشد خروجی آن $g(f(x))$ است. (ت) را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



نمودارهای صفحه قبل را به صورت زیر هم می توان نمایش داد:



$$g(f(x)) = g\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right)$$

اما $g(f(x))$ را چگونه می توان محاسبه کرد؟ داریم:

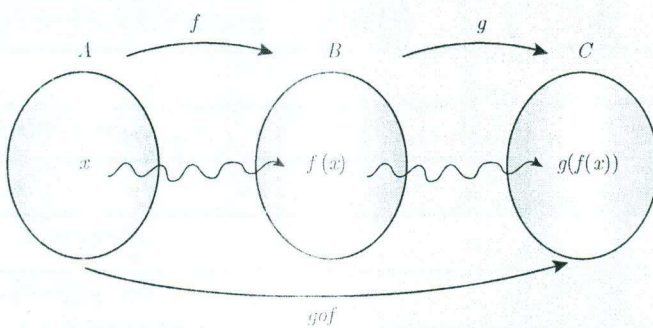
$$g(f(x)) = \frac{5}{9}(x - 32) + 273$$

و می دانیم تابع g به هر ورودی 273 واحد اضافه می کند. پس:

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلون تبدیل می کند و به دلیل شیوه محاسبه آن با gof (بخوانید جی او اف) نمایش داده می شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم: به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



به عبارت دیگر اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ آن گاه:

$$gof: A \rightarrow C$$

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می توان تعریف کرد.

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

۶۸

$$g \circ f(x) = 2(x^2+1) + 3 = 2x^2 + 5$$

$$f \circ g(x) = (2x+3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10$$

$$g(x) = 2x+3 \text{ و } f(x) = x^2+1 \text{ اگر}$$

الف دامنه و ضابطه تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

ب) آیا تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ مساوی اند؟ **خیر چون**

$$\forall x \quad f(g(x)) \neq g(f(x)) \text{ و } D_f = D_g$$

❖ مثال: اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2+3$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

حل: داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \text{ و } D_f = [1, \infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2+3) = \sqrt{x^2+3-1} = \sqrt{x^2+2}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [1, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+3 \geq 1\} = \{x \mid x^2 \geq -2\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, \infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, \infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 3$$

توجه کنید که $g \circ f$ برای اعداد کمتر از ۱ تعریف نشده است. به طور مثال $(g \circ f)(\frac{1}{2})$ یا $(g \circ f)(0)$ معنی ندارد. با این شرط $(g \circ f)(x)$ را به صورت زیر هم می توان نمایش داد:

$$(g \circ f)(x) = x - 1 + 3$$

$$(g \circ f)(x) = x + 2 \quad x \in [1, \infty)$$

کاردر کلاس

اگر $f = \{(1, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 1), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ ابتدا $D_{f \circ g}$ و سپس توابع

$$D_{f \circ g} = \{2, 4, 6, 3\}$$

$$D_{g \circ f} = \{1, 2\}$$

$$f \circ g(x) = f(2, 1), f(4, -2), f(6, 3), f(3, 2)$$

$$g \circ f(x) = g(1, 7), g(2, -5)$$

$$\frac{f}{g}(u) = \frac{5u}{2-u} \quad (D_f \cap D_g) \setminus \{u \mid g(u) = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(f-g)(u) = 5u - (2-u) = 6u - 2 \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(u) = 4(2-u) = 8 - 4u \quad D_{f \circ g} = \{u \in D_g \mid g(u) \in D_f\} = \{u \in \mathbb{R} \mid 2-u \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

فصل دوم: تابع ۶۹

$$f \circ g(u) = \frac{1}{\frac{5}{u} - 3} = \frac{1}{\frac{5-3u}{u}} = \frac{u}{5-3u}$$

$$D_{f \circ g} = \{u \in D_g \mid g(u) \in D_f\} = \{u \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{5}{u} \in \mathbb{R} - \{3\}\} = \mathbb{R} - \{2, \frac{5}{3}\}$$

۱ اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2-x$ ، توابع f/g ، $f-g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه آنها به دست آورید. بالای معنی

۲ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید. بالای معنی

۳ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$f \circ g(e) = f(g(e)) = f(v) = \Delta$$

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 25$ ← درست

$$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{4} = 1$$

ب) اگر $f(x) = x+4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$ ← درست

پ) اگر $g(x) = 2x-1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$ ← درست

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$ ← نادرست

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$ ← نادرست

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$ ← درست

۴ فرض کنیم $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ و $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\}$ که در آن:

$$(f+g)(u) = \{(1,4), (2,7), (3,11), (4,15)\}$$

$$g(n) = 2n$$

$$g \circ f(u) = \{(1,4), (2,6), (3,10), (4,14)\}$$

توابع $f+g$ و $g \circ f$ را به دست آورید. $A = \{1,2,3,4\}$

۵ اگر $f = \{(-4,13), (-1,7), (0,5), (\frac{5}{3}, 0), (3,-5)\}$ و $g = \{(-4,-7), (-2,-5), (0,-3), (3,0), (5,2), (9,6)\}$

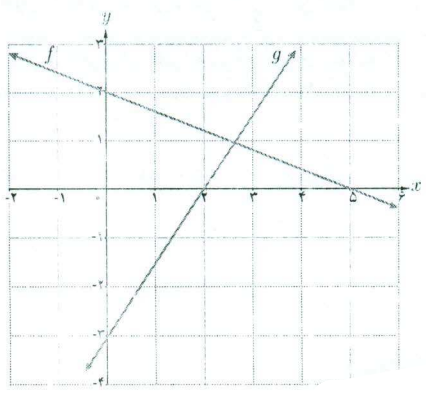
$$(f+g)(u) = \{(-4,6), (-2,2), (3,-5)\}$$

$$(f-g)(u) = \{(-4,20), (0,8), (3,-10)\}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ و $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید. صحنه بعد

۷ اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x+3$ ، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟ دامنه تقسیم قبل از ساده شدن محاسبه می‌شود

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$



۸ اگر $f(x) = 2x+5$ ، $f^{-1}(x)$ و $f \circ f^{-1}$ را به دست آورید.

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و $f \circ g$ را محاسبه کنید.

$$D_f = \mathbb{R} \quad \sqrt{r-x} \geq 0 \quad D_g = [-1, 1]$$

(4)

$$f \circ g(x) = \sqrt{(\sqrt{r-x})^2 + \Delta} = \sqrt{r-x+\Delta}$$

$$D_{f \circ g}(x) = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in [-1, 1] \mid \sqrt{r-x} \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{r - (\sqrt{x^2 + \Delta})^2} = \sqrt{r - x^2 - \Delta} = \sqrt{-x^2 - 1}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + \Delta} \in [-1, 1]\} = \emptyset$$

$$\sqrt{x^2 + \Delta} \in [-1, 1] \iff -1 \leq \sqrt{x^2 + \Delta} \leq 1 \iff \sqrt{x^2 + \Delta} \leq 1$$

$$f(x) = rx + \Delta$$

$$y = rx + \Delta \rightarrow y - \Delta = rx$$

$$x = \frac{y - \Delta}{r} \quad f^{-1}(y) = \frac{y - \Delta}{r}$$

(1)

$$f \circ f^{-1} = r \left(\frac{y - \Delta}{r} \right) + \Delta = y - \Delta + \Delta = y$$

$$f^{-1} \circ f = \frac{(rx + \Delta) - \Delta}{r} = x$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} x_1, \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} x_2 \quad m = \frac{-r}{\Delta} \quad y - r = \frac{r}{\Delta} x$$

$$y = \frac{r}{\Delta} x + r$$

f خط

$$\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} x_1, \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix} x_2 \quad m = \frac{-r}{-r} = \frac{r}{r} \quad y = \frac{r}{r}(x - r)$$

$$y = \frac{r}{r} x - r$$

g خط

$$(f+g)(x) = -\frac{r}{\Delta} x + r + \frac{r}{r} x - r = \frac{11}{10} x - 1$$

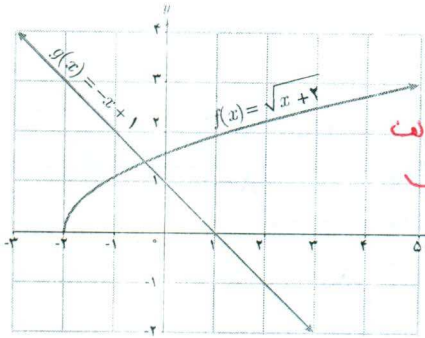
$$(f-g)(x) = \frac{r}{\Delta} x + r - \frac{r}{r} x + r = \frac{11}{10} x + \Delta$$

$$(f \times g)(x) = \left(-\frac{r}{\Delta} x + r\right) \left(\frac{r}{r} x - r\right)$$

$$y = ax + b \quad \frac{y-b}{a} = n \quad f^{-1}(n) = \frac{n-b}{a} = \frac{1}{a}n - \frac{b}{a} \quad -11$$

۷۰

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارات‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



- الف) $(f+g)(2)$ ب) $(f+g)(-3)$ پ) $(fg)(\frac{1}{2})$
 ت) $(f \circ g)(-4)$ ث) $(\frac{f}{g})(0)$ ج) $(g \circ f)(-1)$

الف) $f(2) + g(2) = 2 + 1 = 3$
 ب) $f(-3) + g(-3) = -3 + 1 = -2$ *تکریف نشده و وجود ندارد*
 پ) $f(\frac{1}{2}) \times g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{5}{2}}$
 ت) $f(g(-4)) = f(0) = 1$
 ث) $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{0}$
 ج) $g(f(-1)) = g(2) = 2$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است. *بالای صند*

۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

$$\frac{9}{5}F = n - 32 \Rightarrow x = \frac{9}{5}F + 32$$

$$g(n) = \frac{9}{5}n + 32$$

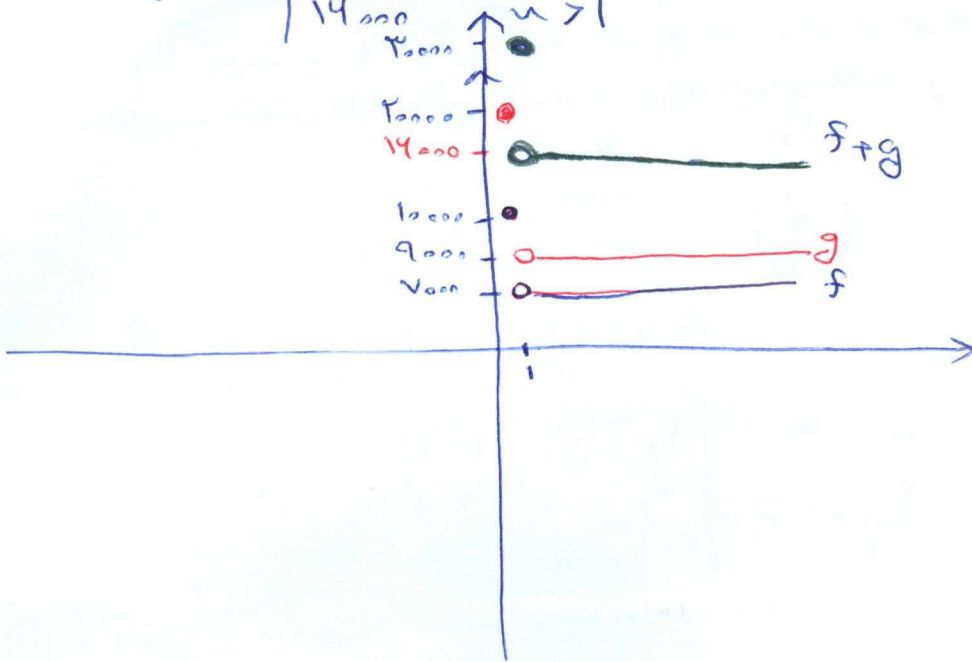
۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پر فروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

- یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.
 کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.
 الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهند.
 ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد. *صند روی*
 ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



$$f(u) = \begin{cases} 10000 & u \leq 1 \\ 10000 & u > 1 \end{cases} \quad g(u) = \begin{cases} 10000 & u \leq 1 \\ 9000 & u > 1 \end{cases}$$

$$f(u) + g(u) = \begin{cases} 20000 & u \leq 1 \\ 14000 & u > 1 \end{cases}$$



تابع نمایی

آیا تاکنون با خود فکر کرده‌اید که دانشمندان چگونه قدمت یک شیء باستانی یا یک فسیل را پیدا می‌کنند؟ در بدن هر موجود زنده کربن ۱۴ موجود است که با مرگ آن موجود، کربن ۱۴ شروع به از بین رفتن می‌کند. بنابراین با اندازه‌گیری مقدار کربن باقی مانده، می‌توان سن آن شیء یا موجود را پیدا کرد. در حل این گونه مسائل از تابع نمایی استفاده می‌شود.

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(0)=1$ ، آن‌گاه با توجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

جدول (۱)

t زمان (ساعت)	$m(t)$ جرم باکتری‌ها
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲
۶	۶۴
۷	۱۲۸
۱۰	۱۰۲۴

الف) در زمان‌های $t=5$ و $t=6$ جرم باکتری‌ها را به دست آورید.

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به دست آورد؟



تقسیم دوتایی نوعی تولید مثل است که به تولید زاده‌هایی یکسان منجر می‌شود.

$$m(t) = 2^t$$

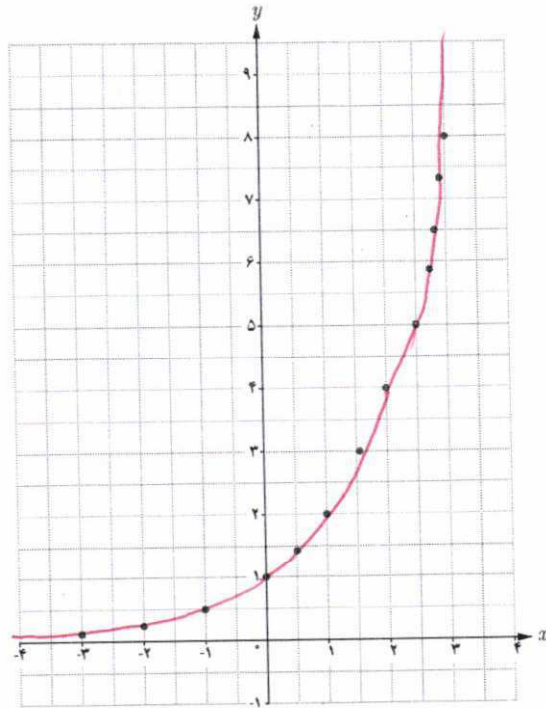
(ب) نقاط به دست آمده را در یک صفحه شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).

خواندنی

2
↓
 x^y
↓
(
↓
2
↓
 $\sqrt{\quad}$
↓
 $31-\sqrt{5}$ و $31+\sqrt{2}$
↓
)
↓
=
↓
2/6

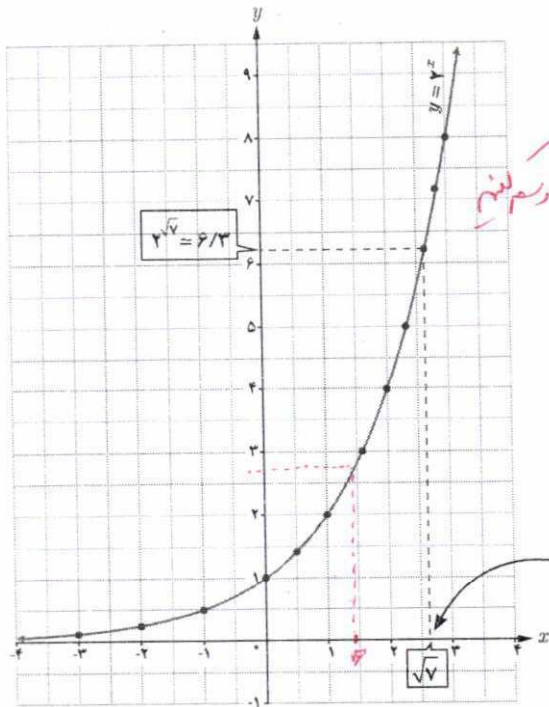
به دلیل افزایش حجم محاسبات در زندگی روزمره، بیش از گذشته به ماشین حساب نیاز مندیم. برای محاسبه $2^{\sqrt{2}}$ مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم:

اکنون مقادیر $2^{\sqrt{5}}$ ، $2^{\sqrt{2}}$ و $31+\sqrt{2}$ و $31-\sqrt{5}$ را تا دو رقم اعشار با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنه تابع $y = 2^x$ همه اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روبه‌رو حاصل می‌شود.



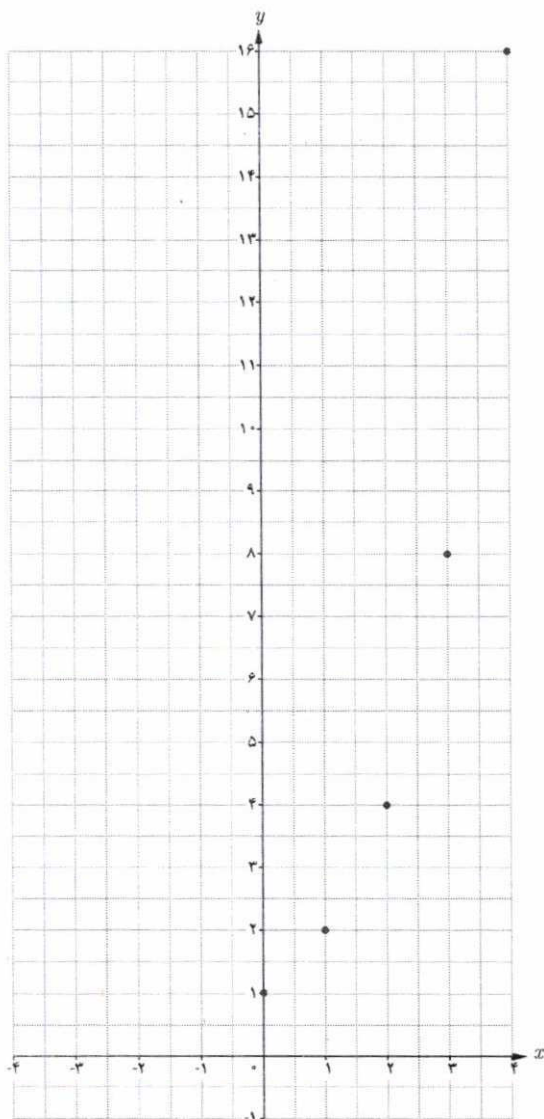
(ب) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟ *اگر خطی موازی محور y بکشیم و با نمودار برخورد کند، در آن نقطه فقط یک نقطه قطع می‌کند.*

(ت) نقطه $x = \sqrt{2}$ را روی محور x ها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید. **۲٫۸**

(ث) کدام یک از اعداد زیر، بین دو عدد 2^2 و 2^3 قرار دارد؟
 2^{-1} 2^5 $2^{\frac{3}{2}}$ $2^{\frac{5}{2}}$

(ج) چرا نمودار تابع $y = 2^x$ محور x ها را قطع نمی‌کند؟
بعضی نقاط فقط به محور y برخورد می‌کنند.

توجه کنید دامنه $y = 2^x$ شامل اعداد اصم مثل $\sqrt{7}$ است.



اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحله یازدهم یا مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را بر اساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سؤال‌ها اعداد مناسب قرار دهید.

جدول (۲)

t	$m(t)$
۰	$2^0 = 1$
۱	$2^1 = 2$
۲	$2^2 = 4$
۳	$2^3 = 8$
۴:	$2^4 = 16$
۹?	$2^9 = 512$

نمودار روبه‌رو رابطه بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به فعالیت صفحه قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و m ام از دنباله زیر به دست می‌آید:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n.$$

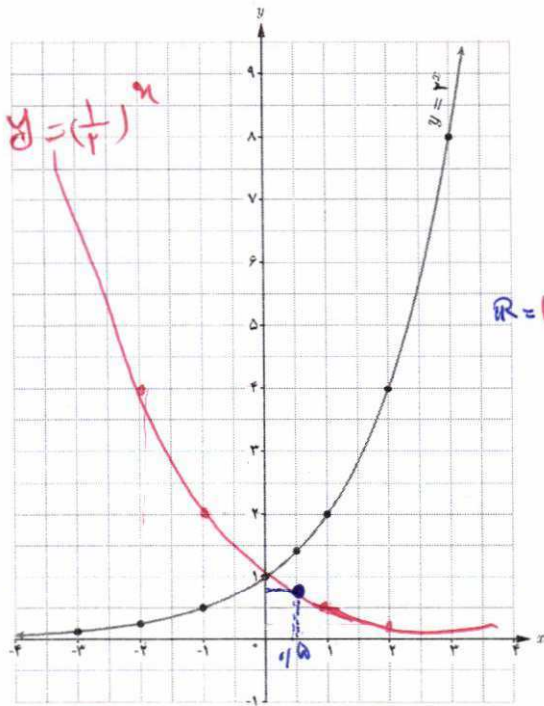
به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها برحسب زمان t ، از رابطه $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید.

فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	$2^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{2}{3}}$	2^1	$2^{\frac{3}{2}}$	2^2	2^3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\sqrt[3]{2} = 1/26$	$\sqrt{2} = 1/4$	$\sqrt[3]{4} = 1/56$	۲	$\sqrt{8} = 2/13$	۴	۸



الف) نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y = 2^x$ مقایسه کنید. *نقطه برخورد آنها تقارن دارند*

ب) دامنه و برد تابع را به دست آورید. *دامنه هر دو $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ و برد هر دو $(0, +\infty)$ است.*

هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ ، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

ب) نقطه $\left(\frac{1}{5}, \left(\frac{1}{2}\right)^{1/5}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

❖ مثال: توابع زیر همگی نمایی هستند:

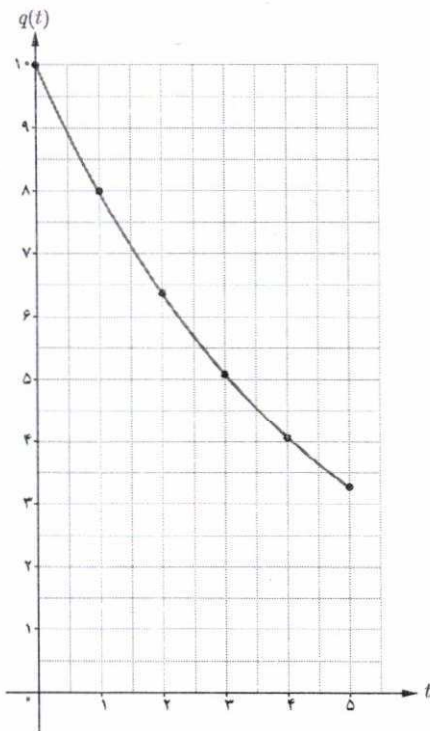
$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x, f(x) = (3/14)^x$$

❖ تذکر: در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x) = ka^x$ ($k \neq 0, a > 0, a \neq 1$) رفتار نمایی دارد. به عنوان مثال، توابع $f(x) = 3 \times 2^x$ یا $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$ رفتار نمایی دارند.

❖ مثال: اگر 10° گرم نمک را به مقدار کمی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه از رابطه $q(t) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$ به دست می‌آید. بنابراین پس از مثلاً 4 دقیقه، مقدار نمک حل نشده در آب برابر است با:

$$q(4) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 41.096 \text{ gr}$$

نمودار این تابع برای $0 \leq t \leq 5$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



مثال: فرض کنید Q جرم یک مقدار کربن ۱۴ برحسب گرم با نیمه عمر 5730 سال باشد (یعنی پس از 5730 سال نصف

مقدار معینی از آن از بین می‌رود). مقدار این کربن بعد از t سال از رابطه $Q(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به دست می‌آید.
الف) در لحظه $t=0$ داریم $Q(0) = 10 \text{ gr}$ و بعد از 2000 سال داریم

$$Q(2000) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}} = 7.85 \text{ gr}$$

ب) اگر $t = 5730$ ، آن‌گاه $Q(5730) = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ gr}$ یعنی بعد از 5730 سال، مقدار کربن ۱۴ نصف می‌شود.

کاردرکلاس

۱ نمودارهای سه تابع $f(x) = 2^x$ ، $g(x) = 3^x$ و $h(x) = 5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن

بنویسید.

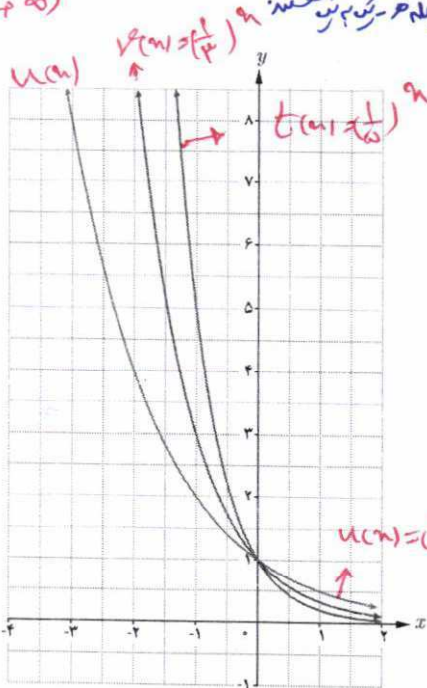
۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید $D = (-\infty, +\infty)$ و $R = (0, +\infty)$

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟
بله زیرا هر خطی موازی محور x صواب رسم شود سطح را هداست برید
نقطه قطع می‌کند

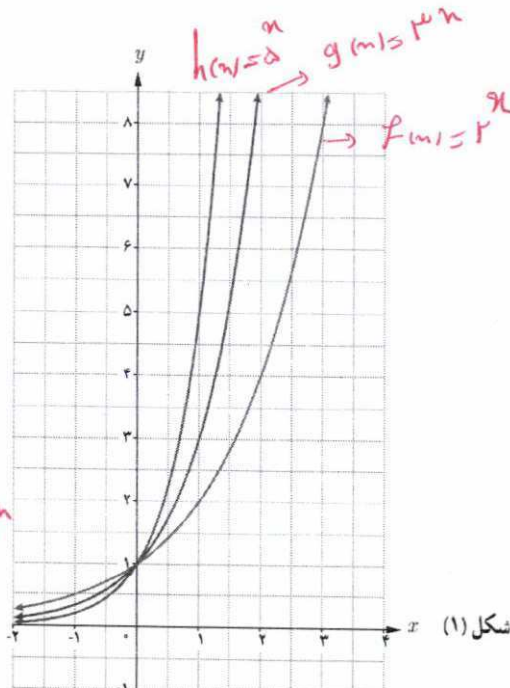
۴ نمودارهای توابع $u(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، $v(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $t(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی

$D = (-\infty, +\infty)$
 $R = (0, +\infty)$

نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟
بله زیرا هر خطی موازی محور x صواب رسم شود سطح را هداست برید



شکل (۲)



شکل (۱)

۵

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$2^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 2^2, 2^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

ب) جاهای خالی را پر کنید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 2^2 < 2^3 < 2^4$$

در تابع $f(x) = a^x$,

اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر f ... می یابند.

اگر $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع f ... می یابند.

در سال های قبل، توان های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی را تعریف کرده و با ویژگی های مقدماتی آنها آشنا شده ایم. این قوانین برای توان های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم:

۱) $a^0 = 1$

۲) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

۳) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

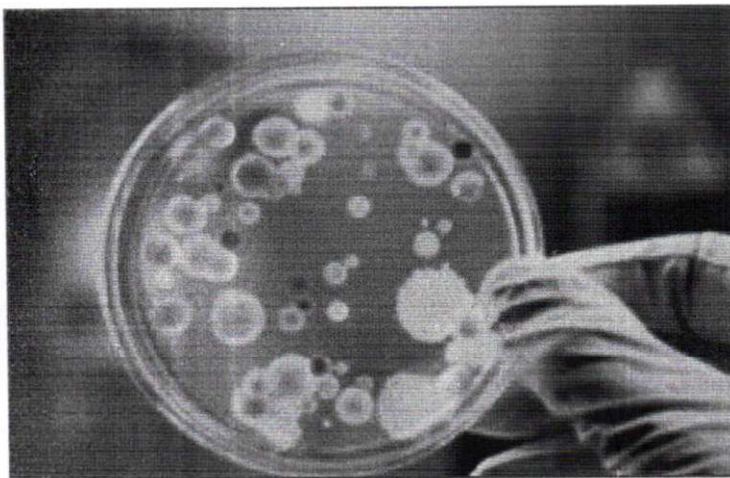
۴) $(a^x)^y = a^{xy}$

۵) $(ab)^x = a^x b^x$

۶) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

۷) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

تمرین



۱) تحت شرایط ایده آل، جرم یک توده معین

از باکتری ها در هر ساعت دو برابر می شود.

فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود

دارد. $m(t) = 2^{\frac{t}{100}} \cdot 100$

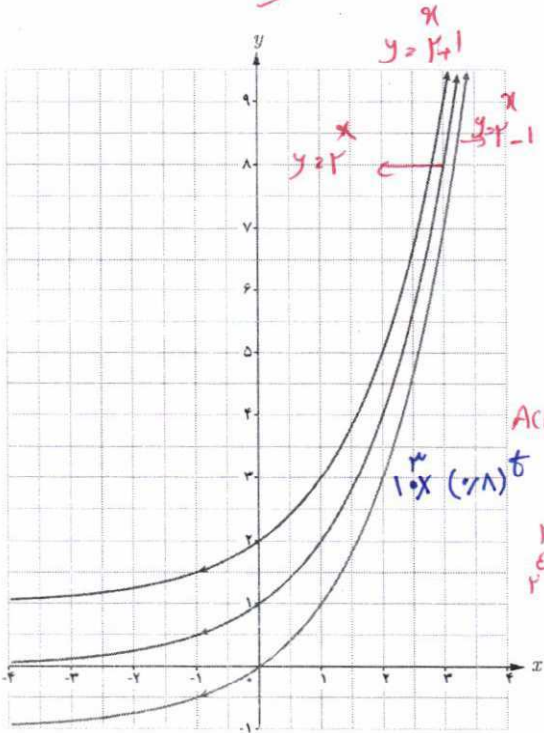
الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت

یک تابع نمایی بنویسید. $m(t) = 2^{\frac{t}{100}} \cdot 100$

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد

کنید. $m(20) = 2^{\frac{20}{100}} \cdot 100 = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 100$

ابتدا نمودار $y = a^x$ را رسم کنید و سپس اول نمودار $y = a^{x+2}$ و بعد $y = a^{x-2}$ را رسم کنید. $y = a^x$ را رسم کنید و سپس نمودار $y = a^{x+2}$ و $y = a^{x-2}$ را رسم کنید. $y = a^x$ را رسم کنید و سپس نمودار $y = a^{x+2}$ و $y = a^{x-2}$ را رسم کنید.



نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^{x+1}$ و $y = 2^{x-1}$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$ ، $y = a^{x+2}$ و $y = a^{x-2}$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$)

داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید 1° میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \cdot (0.8)^t$ به دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟
ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

الف) سه عدد بین اعداد $3^{\sqrt{10}}$ و $3^{2/5}$ پیدا کنید.

ب) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

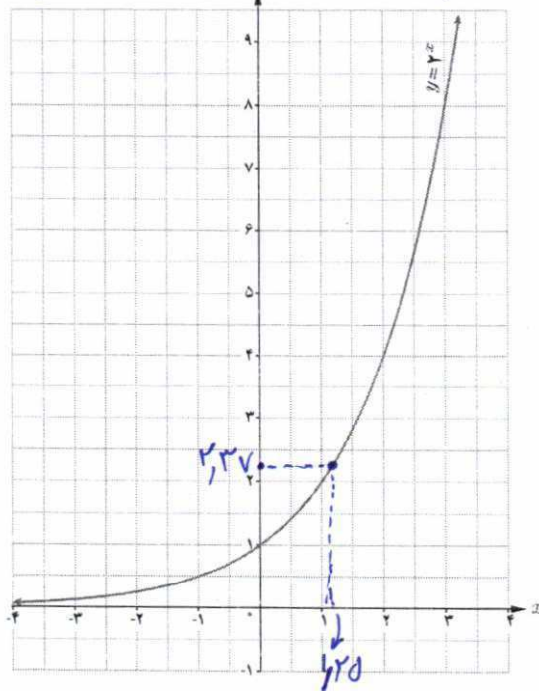
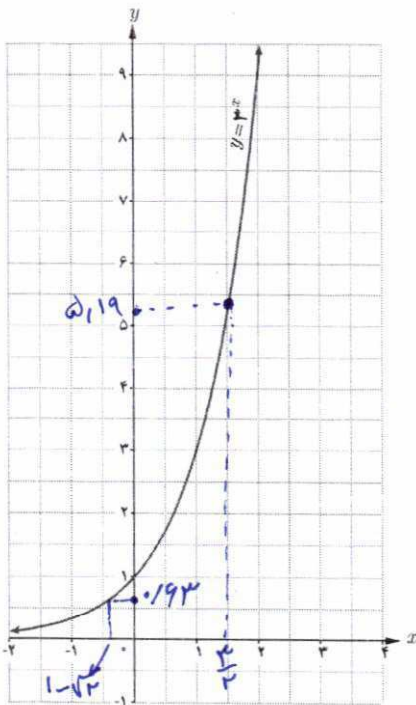
پ) اگر x ، y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a > 1$)

۵) ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

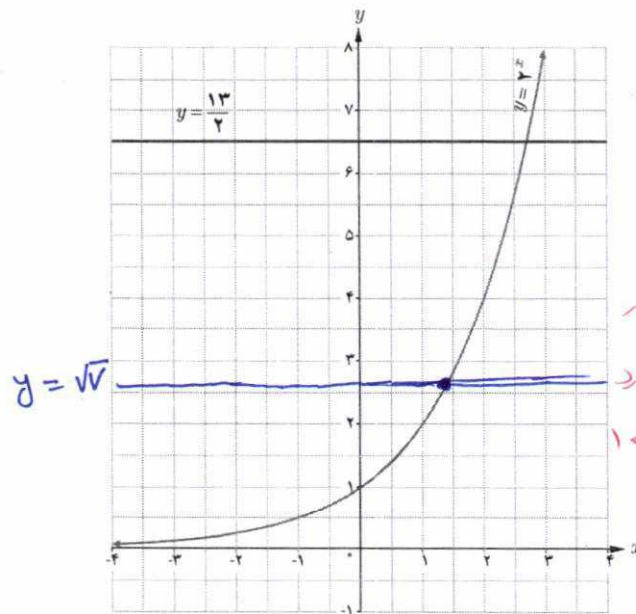
ب) $3^{\frac{3}{2}}$
 ≈ 5.19

ب) $2^{1/25}$
 ≈ 2.37

الف) $3^{1-\sqrt{2}}$
 ≈ 0.23



الف) در شکل زیر خط $y = \frac{13}{2}$ نمودار $y = 2^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟
 ب) خط $y = \sqrt{7}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y = 2^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) $2 < x < 3$
 $\rightarrow 2^2 < y < 2^3$
 ب) $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$
 $2 < \sqrt{7} < 3$
 بین $\sqrt{4}$ و $\sqrt{9}$ قرار دارد
 در حالت اول طول نقطه برخورد
 خط و منحنی بین $1 < x < 2$
 است.

۷ در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $0.7 \times 0.7 = 0.49$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به دست می‌آید؟ $\frac{v^n}{100 \times 10^{n-2}}$
 ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

۱۰۰٪ $\rightarrow 1$
 ۷۰٪ $\rightarrow (0.7)^2 \rightarrow 49\%$
 ۱۰۰٪ $\rightarrow (0.7)^n \rightarrow \frac{v^n}{100}$

$$\frac{v^n}{100 \times 10^{n-2}} < \frac{4}{100} \Rightarrow$$

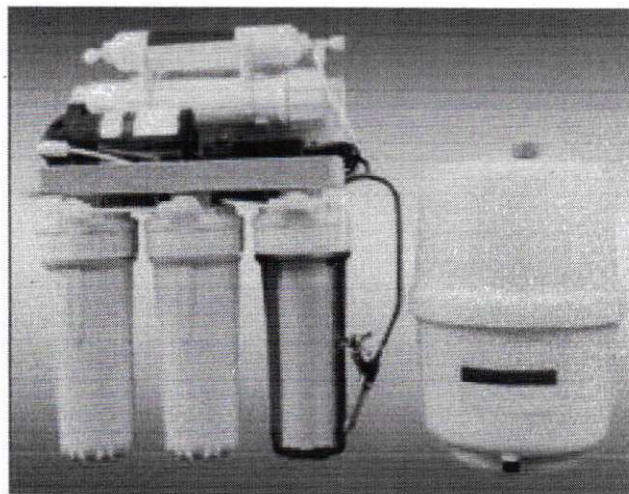
$$\frac{v^{n-2}}{10} \times v^2 < 4 \rightarrow$$

$$\frac{v^{n-2}}{10} < \frac{4}{v^2} \xrightarrow{\text{طرفین } \log_{10}}$$

$$\log_{10} \frac{v^{n-2}}{10} > \log_{10} \frac{4}{v^2}$$

$$n-2 > \log_{10} \frac{4}{v^2} \rightarrow$$

$$n > \log_{10} \frac{4}{v^2} + 2 \rightarrow n > 2 + 2 \log_{10} \frac{4}{v}$$



تابع لگاریتمی و لگاریتم

بار دیگر، مسئله افزایش جرم توده باکتری در محیط کشت را که در ابتدای این فصل مطرح شد، در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری‌ها ۵۱۲ گرم است، یعنی اگر $m(t) = 512$ ، می‌خواهیم t را بیابیم. چون تابع $m(t) = 2^t$ یک تابع یک به یک است، پس وارون پذیر است و از این رو $t = m^{-1}(512)$. به جدول‌های زیر نگاه کنید:

t (زمان)	$m(t) = p$ ، جرم باکتری‌ها در زمان t
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

⇒

t (زمان)	$m^{-1}(p)$ ، زمان رسیدن به جرم p
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

خواندنی

جان نپیر (John Napier)

جان نپیر ریاضیدان اسکاتلندی مفهوم لگاریتم را پایه‌ریزی کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و در قرن ۱۶ و ۱۷ بزرگ‌ترین پیشرفت در علم حساب بود. لگاریتم در علوم زیادی کاربرد دارد. مثلاً در زلزله‌شناسی برای اندازه‌گیری شدت زلزله برحسب ریشتر کاربرد دارد. لگاریتم در حسابداری و مسائل مالی نیز کاربردهای زیادی دارد.

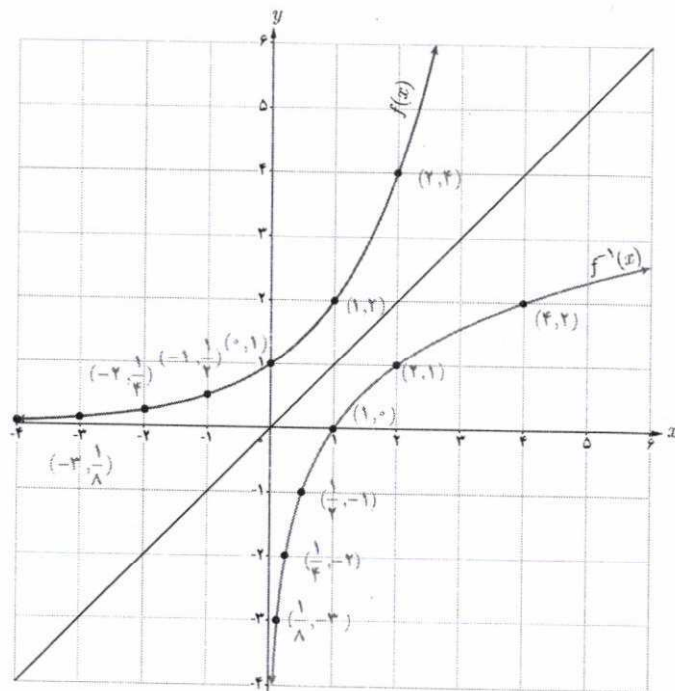
نمودارهای تابع $y = f(x) = 2^x$ و تابع وارون آن در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. دقت کنید که برای رسم تابع وارون $y = 2^x$ کافی است قرینه نقاط روی تابع را نسبت به خط $y = x$ پیدا کنیم. به عنوان مثال، نقطه $(2, 4)$ روی تابع نمایی $y = 2^x$ و نقطه $(4, 2)$ که قرینه آن نسبت به خط $y = x$ است، روی تابع وارون آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. می‌توان دید:

$$D_f = (-\infty, +\infty), R_f = (0, +\infty)$$

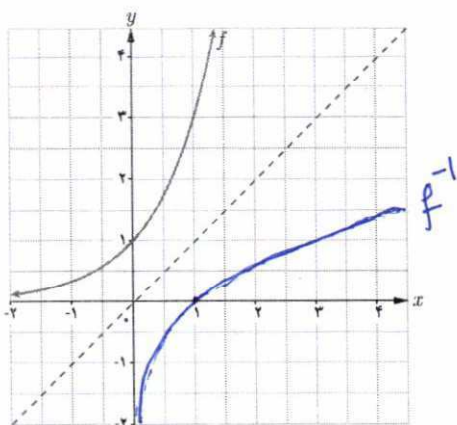
$$D_{f^{-1}} = (0, +\infty), R_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$$

توجه کنید که دامنه f با برد f^{-1} برابر است و برد

f با دامنه f^{-1} .



۱ با توجه به نمودار تابع $f(x) = 3^x$ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = -2$
$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -1$
$f(0) = 3^0 = 1$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(1) = 0$
$f(1) = 3^1 = 3$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(3) = 1$
$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3^{\frac{2}{3}}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(3^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}$
$f(2) = 3^2 = 9$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(9) = 2$

۲ گزینه درست را با \checkmark و گزینه غلط را با \times علامت بزنید.

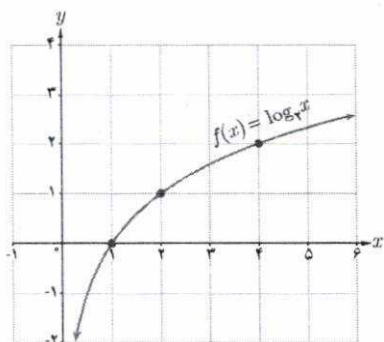
- نقطه $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$ روی نمودار f قرار دارد. \checkmark
- نقطه $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ و $(-1, \frac{1}{3})$ روی نمودار f^{-1} قرار دارد. \times
- نقطه $(0, 1)$ و $(1, 0)$ روی نمودار f قرار دارد. \times
- نقطه $(1, 0)$ و $(-2, \frac{1}{9})$ روی نمودار f^{-1} قرار دارد. \checkmark
- تابع f^{-1} یک به یک است. \checkmark

فرض کنید داریم $f(x) = 3^x$ و $y = f^{-1}(x)$. در این صورت y را لگاریتم x در پایه ۳ می‌خوانیم و آن را با نماد $y = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در پایه ۳.

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون f^{-1} است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a x$ نشان داده می‌شود.

♣ مثال: وارون تابع $f(x) = 5^x$ تابع $f^{-1}(x) = \log_5 x$ است.

همچنین وارون تابع $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ تابع $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ است.

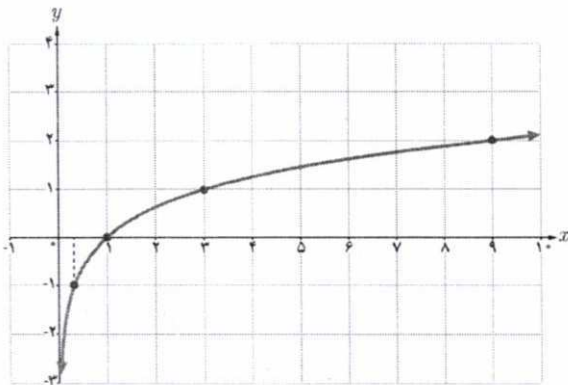


♣ مثال: با توجه به نمودار $f(x) = \log_3 x$ ، می‌توان دید:

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 1$$

$$f(9) = 2$$



❖ مثال: مقادیر زیر با استفاده از نمودار $f(x) = \log_2 x$ به دست آمده‌اند.

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f(4) = 2$$

به طور کلی

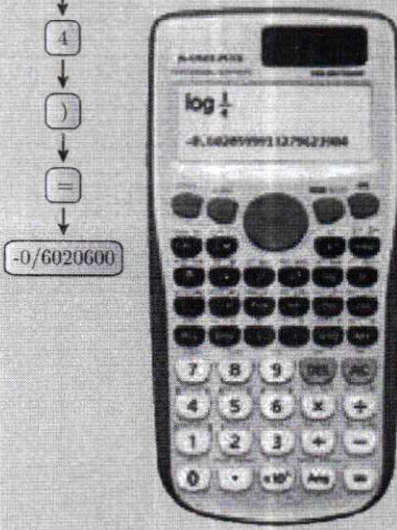
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

به عنوان مثال، $\log_2 8 = 3$ زیرا $2^3 = 8$ و یا $\log_{10} 1000 = 3$ ، زیرا $10^3 = 1000$.

همچنین $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ ، زیرا $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

خواندنی

برای محاسبه لگاریتم در ماشین حساب کافی است از دکمه \log استفاده کنیم. مثلاً برای محاسبه $\log_{10} 10$ ابتدا دکمه \log سپس عدد ۱۰ و در نهایت دکمه $=$ را می‌زنیم. همچنین برای محاسبه $\log_{10} \frac{1}{4}$ به صورت روپرو عمل می‌کنیم: و ماشین حساب مقدار آن را به صورت زیر نشان می‌دهد.



❖ مثال: فرض کنید $f(x) = \log_{10} x$. مقدار تابع f را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود، حساب کنید.

الف) $x = 10$ ب) $x = 100$

پ) $x = -2$ ت) $x = 1000$

❖ حل:

الف) $f(10) = \log_{10} 10 = 1$ زیرا $10^1 = 10$.

ب) $f(100) = \log_{10} 100 = 2$ زیرا $10^2 = 100$.

پ) $f(-2)$ موجود نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ت) $f(1000) = \log_{10} 1000 = 3$ زیرا $10^3 = 1000$.

❖ مثال: با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم:

$2^5 = 32$	$6^2 = 36$	$5^3 = 125$	$2^{10} = 1024$	$3^2 = 81$
$\log_2 32 = 5$	$\log_6 36 = 2$	$\log_5 125 = 3$	$\log_2 1024 = 10$	$\log_3 81 = 4$

❖ مثال: تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

(ب) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

(الف) $\log_7 1 = 0$

❖ حل:

(الف) اگر $\log_7 1 = 0$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $1 = 7^0$.

(ب) اگر $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $\frac{1}{27} = 3^{-3}$.

❖ مثال: مقادیر زیر را محاسبه کنید:

(ب) $\log_4 1$

(ب) $\log_6 6$

(الف) $\log_2 8$

❖ حل:

(الف) اگر $a = \log_2 32$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $2^a = 32$ و از این رو $a = 5$.

(ب) اگر $b = \log_6 6$ ، آن‌گاه $6^b = 6$ و در نتیجه $b = 1$.

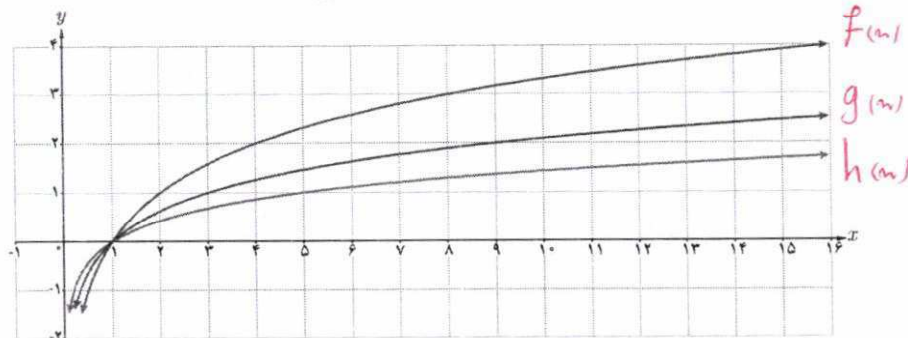
(ب) اگر $c = \log_4 1$ ، آن‌گاه $4^c = 1$ و در نتیجه $c = 0$.

کاردرکلاس

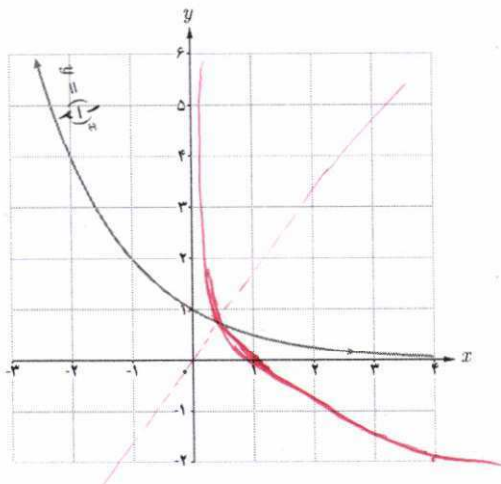
۱ الف) نمودار سه تابع $f(x) = \log_2 x$ ، $g(x) = \log_3 x$ و $h(x) = \log_5 x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید.

(ب) محل دقیق هر یک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

$(5, 1)$ و $(9, 2)$ و $(16, 4) \in f(x)$
 ب. $g(x)$ متعلق به $h(x)$



پ) با توجه به نمودار $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید. **نقطه به خط $y=x$ قرمز هم بر**



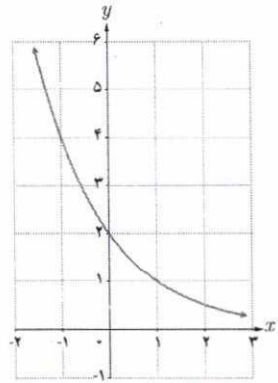
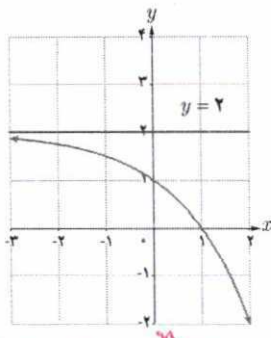
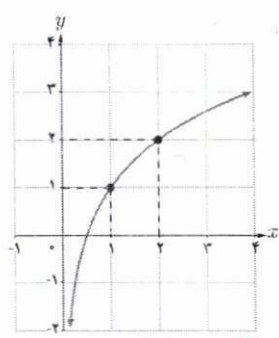
۲ مشخص کنید هر یک از نمودارهای زیر به کدام یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

با بررسی نقاط کار مشخص کنیم ضابطه نمودار ساده تر است.

پ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

ب) $y = \log_2(x+1)$

الف) $y = -2^x + 2$



شکل ب را نمی‌دهد زیرا جانب تمام آن باید $x=0$ باشد نه $x=1$. معادله جانب تمام فرجه اهداف نیست.

الف) $y = -2^x + 2$

پ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

۲ حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

پ) $\log_2 8$

ب) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}$

الف) $\log_2 81$

$\log_2 8 = 3 \log_2 2 = 3$

$= 1$

$\log_2 81 = 4 \log_2 3 = 4$

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

$$\log_{10} 0.01, \log_6 \frac{1}{6}, \log_2 \sqrt{2}, \log_3 \sqrt[3]{27}$$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ با هم مقایسه کنید.

۳ الف) خط $y = 27$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با \checkmark و عبارت غلط را با \times علامت بزنید.

– لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. \times *میان اعداد کمتر از ۱*

– لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. \checkmark

– تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است. \checkmark

– تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند. \times

– اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد. \checkmark

– اگر $a > b > 0$ آنگاه $\log_a a < \log_a b$. \times *در مبنای کمتر از ۱ تابع لگاریتم صعودی است*

$$a > b \rightarrow \log_a a > \log_a b$$

۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

ب) $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ب) $y = -3^x - 2$

الف) $y = 1 + \log_2 x$

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

ویژگی‌های لگاریتم

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم. برخی از ویژگی‌های ساده لگاریتم به صورت زیر هستند:

❖ مثال: الف) $\log_a 1 = 0$ ، زیرا $a^0 = 1$
ب) $\log_a a = 1$ ، زیرا $a^1 = a$

❖ مثال: نشان دهید برای اعداد حقیقی مثبت a, b, c ، که $c \neq 1$ ، همواره داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

❖ حل: فرض کنیم $x = \log_c a$ و $y = \log_c b$. پس طبق تعریف، $a = c^x$ و $b = c^y$. از این رو $c^{x+y} = c^x \cdot c^y = ab$ و طبق تعریف لگاریتم داریم $\log_c ab = x + y$. در نتیجه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$.

❖ مثال: با توجه به مثال قبل، $\log_a b^2 = \log_a (b \times b) = \log_a b + \log_a b = 2 \log_a b$. به طور مشابه $\log_a b^3 = \log_a (b^2 \times b) = (\log_a b + \log_a b) + \log_a b = 3 \log_a b$ اگر $a, b > 0$ ، $a \neq 1$ و n یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

به خصوص $\log_a a^n = n$.

قرار داد: همواره منظور از $\log a$ عبارت است از $\log_{10} a$. همچنین، لگاریتم در پایه 10 را لگاریتم اعشاری می‌نامیم.

❖ مثال: فرض کنیم $a = \log_2 5$. نشان دهید $1 - a = \log_5 2$.

❖ حل: می‌دانیم $1 = \log_{10} 10$ ، پس طبق مثال بالا، $1 = \log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + a$ و در نتیجه $1 - a = \log_2 10 - \log_2 2 = \log_2 5 = 1 - a$.

الف) $\log_{\frac{1}{5}} 2^{n-1} = \log_{\frac{1}{5}} 5^n$ ابتدا دامنه را تقریباً کم کنیم $n > 0$ و $2^{n-1} > \frac{1}{5}$ $\frac{1}{5} > \frac{1}{2}$ $\frac{1}{5} > \frac{1}{2}$

حل $2^{n-1} = 5 \rightarrow n=1$ در دامنه قرار نگیرد

ب) $\log_{\frac{1}{3}} (n-1) \left(\frac{n}{2} + 1\right) = 2 \rightarrow (n-1) \left(\frac{n}{2} + 1\right) = 9$ در آنجا $(n-1)(n+2) = 18 \rightarrow n^2 + n - 2 - 18 = 0 \rightarrow$

$n^2 + n - 20 = 0 \rightarrow (n+5)(n-4) = 0$ $\begin{cases} n = -5 \\ n = 4 \end{cases}$

۸۸

ب) $n(n+3) = 10 \rightarrow n^2 + 3n - 10 = 0 \rightarrow (n+5)(n-2) = 0$ $\begin{cases} n = -5 \\ n = 2 \end{cases}$

فعالیت

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید:

ب) $\log x + \log(x+3) = 1$

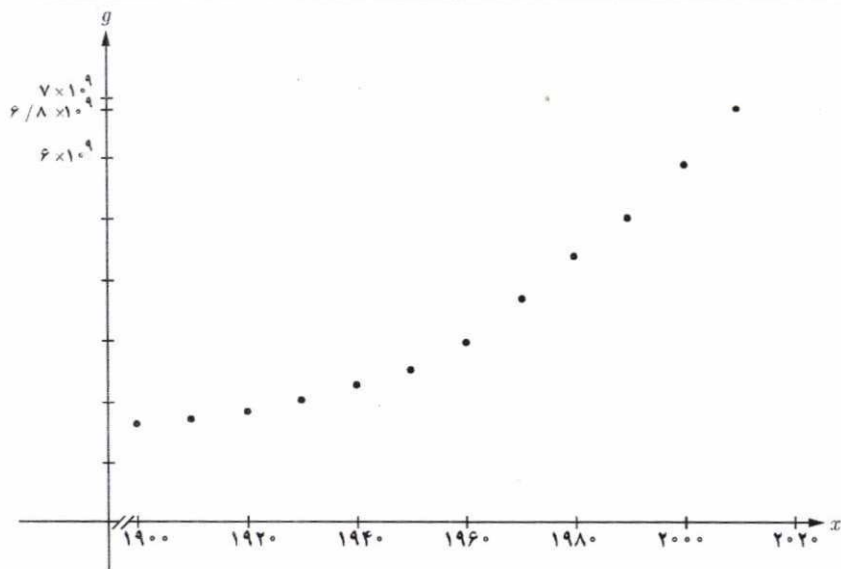
ب) $\log_2(x-1) + \log_2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$

الف) $\log_5(2x-1) = \log_5 x$

کاربردهای لگاریتم

مثال: جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست و یکم نشان می‌دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰



الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است:

ب) اگر محور x های بیانگر سال و محور g های بیانگر جمعیت باشد، تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x) = 0.008(1.01376)^x$ برآورد می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با:

$g(2016) = 0.008(1.01376)^{2016} \approx 7,385,074,512$

در اینجا می‌توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم:

$g(x) = 8 \times 10^9 = 0.008(1.01376)^x = 8 \times 10^9$

$\Rightarrow (1.01376)^x = 10^{12} \Rightarrow x \log 1.01376 = \log 10^{12} \Rightarrow x = \frac{12}{\log 1.01376} = 2021$

$(\log 1.01376 = 0.0005935)$

۱- دقت کنید که نقطه ابتدای دامنه تابع $g(x)$ نقطه ۱۹۰۰ است.

❖ مثال: ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M.$$

از این رابطه می‌توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $6/6$ ریشتری برابر است با:

$$\log E = 11/8 + 1/5 (6/6) = 21/7 \Rightarrow E = 10^{21/7} Erg.$$

خواندنی

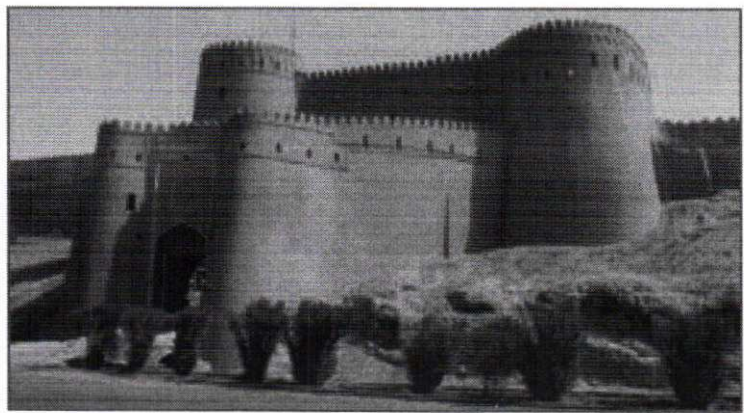
جالب است بدانید که:

در زلزله $6/6$ ریشتری بم (1382) 90 درصد از سازه‌های این شهر که بیش از 2500 سال قدمت داشت از بین رفت. با

توجه به اینکه انرژی آزاد شده در یک زلزله 8 ریشتری معادل انفجار یک میلیارد تن TNT است. بنابراین انرژی آزاد

$$\frac{6/6 \times 10^9}{8} = 825 \times 10^6 = 825 \text{ میلیارد تن انفجار TNT بوده است.}$$

شده در زلزله بم معادل انفجار 825×10^6 تن TNT بوده است.



❖ مثال: نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود 25 سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، 24 میلی‌گرم باشد جدول زیر

تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t) = \frac{1}{2^{t/25}} (24) = 24 \times 2^{-t/25}$ به دست می‌آید.

بنابراین، به عنوان مثال جرم باقی مانده پس از 40 سال برابر است با:

$$m(40) = 24 \left(2^{-40/25} \right) = 7/90 \text{ میلی‌گرم}$$

t (زمان بر حسب سال)	$m(t)$ (جرم بر حسب میلی‌گرم)
0	24
25	$\frac{1}{2}(24) = 12$
50	$\frac{1}{2^2} \times 24 = 6$
75	$\frac{1}{2^3} \times 24 = 3$
100	$\frac{1}{2^4} \times 24 = 1/5$

الف) $2 \log_{\epsilon}^m - \log_{\epsilon}^m - 2 = 0 \rightarrow \log_{\epsilon}^m = 2 \rightarrow m = 4 = 2^2$

ب) $\log_r \frac{12b-21}{b^2-3} = 2 \rightarrow \frac{12b-21}{b^2-3} = \epsilon \rightarrow 12b-21 = \epsilon b^2 - 12 \rightarrow \epsilon b^2 - 12b + 9 = 0 \rightarrow (b-3)^2 = 0$
 $\Rightarrow b = \frac{3}{\epsilon} = 3$

ج) $x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$ ✓

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\epsilon} m^2 - \log_{\epsilon} m - 3 = 0$

ب) $\log_{\epsilon} (12b - 21) - \log_{\epsilon} (b^2 - 3) = 2$

ب) $\log_{\epsilon} (x^2 - 1) = -1$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ بدست می‌آید. معکوس $t = m(t)$ را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ ، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟
 $m(t) = 2^t = 5000 \rightarrow \log_2 5000 = t \Rightarrow \log_{10} 5000 = t \log_{10} 2 \Rightarrow t = \frac{\log_{10} 5000}{\log_{10} 2} = \frac{3.699}{0.301} \approx 12.3$

۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید:
 الف) $a^{\log_b a} = a$ (الف) $(b \neq 1, a, b > 0)$ ✓
 ب) $\log x \log y = \log x + \log y$ (ب) ✗
 ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است. ✗

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.
 الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.
 ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۱ گرم کاهش می‌یابد؟
 $m(t) = 1 \times 2^{-\frac{t}{4}} = 0.1 \rightarrow \log_2 0.1 = -\frac{t}{4} \rightarrow \log_2 10 = \frac{t}{4} \rightarrow t = 4 \log_2 10 \approx 13.29$

۵ عبارات زیر را ساده کنید. ($\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.4771$)

الف) $\log_2 (18 \times 375)$
 $\log_2 18 \times 375 = \log_2 2 \times 3^2 \times 5 \times 3 \times 5^3 = \log_2 2 + 2 \log_2 3 + 3 \log_2 5 = 1 + 2(0.585) + 3(0.906) = 1 + 1.17 + 2.718 = 5.488$
 ب) $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$
 $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\log_{10} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}}{\log_{10} \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_{10} 10 - \log_{10} 2)}{\frac{1}{2} \log_{10} 2} = \frac{1 - 0.301}{0.301} = \frac{0.699}{0.301} \approx 2.32$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با ✗ علامت بزنید.

✗ $\log 5 = \log 3 + \log 2$ ✓ $\log_b a \times \log_a b = 1$

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

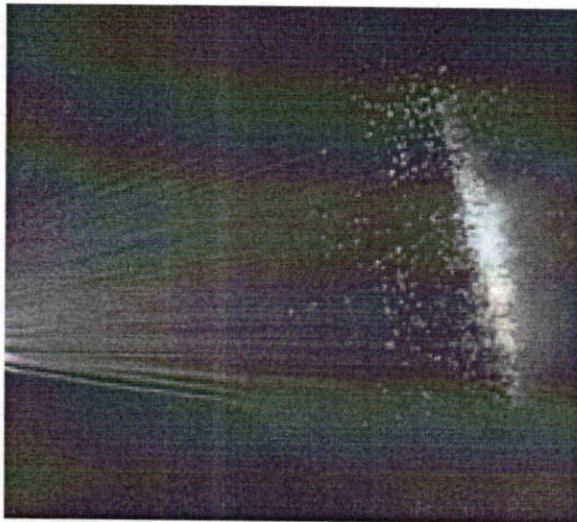
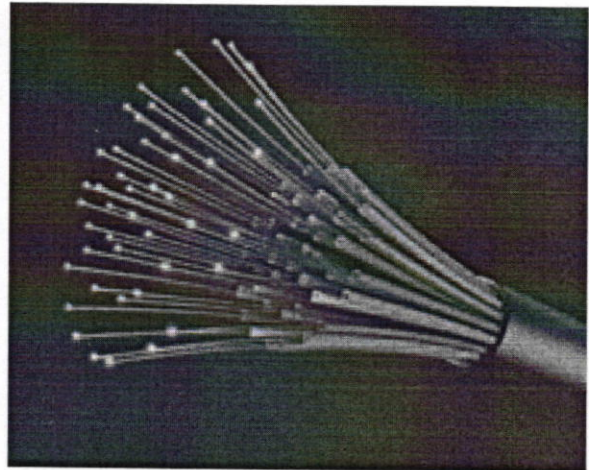
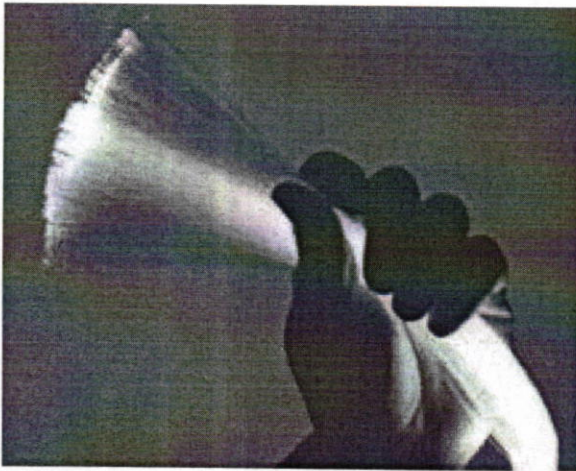
$m(t) = 128 \times 2^{-\frac{t}{30}}$
 $m(300) = 128 \times 2^{-\frac{300}{30}} = 128 \times 2^{-10} = 128 \times \frac{1}{1024} = \frac{128}{1024} = \frac{1}{8}$

مثلثات

۴

- ۱ رادیان
- ۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
- ۳ توابع مثلثاتی
- ۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

فصل



فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا به‌ویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه‌سازی شوند. معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

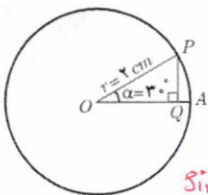


رادیان

درس ۱

تاکنون زاویه‌ها را برحسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

فعالیت



۱ دایره‌ی مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر داده شده است.

اندازه ضلع PQ در مثلث OPQ را با استفاده از نسبت‌های

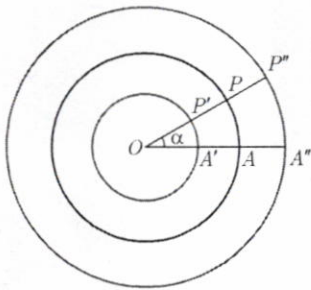
مثلثاتی سال گذشته به دست آورید.

$$\sin \alpha = \frac{PQ}{OP} \rightarrow \sin 3^\circ = \frac{PQ}{2} \rightarrow PQ = 2 \times \frac{1}{40} = \frac{1}{20}$$

۲ با توجه به اینکه کمان 3° برابر $\frac{1}{40}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبه‌رو به زاویه α (یعنی \widehat{PA}) را به صورت زیر به دست آورد.

$$\hookrightarrow \frac{1}{40} \times 360 = \frac{9}{10}$$

$$\widehat{PA} = \frac{1}{40} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{40} \times 2\pi \times 2 = \frac{4}{40}\pi = \frac{\pi}{10} \text{ cm}$$



اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳

سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P''A''}$ را

که روبه‌رو به زاویه $\alpha = 3^\circ$ هستند به دست آورید.

$$\widehat{P'A'} = \frac{1}{40} \times 2\pi \times 1 = \frac{\pi}{20} \text{ cm}$$

$$\widehat{P''A''} = \frac{1}{40} \times 2\pi \times 3 = \frac{3\pi}{20} \text{ cm}$$

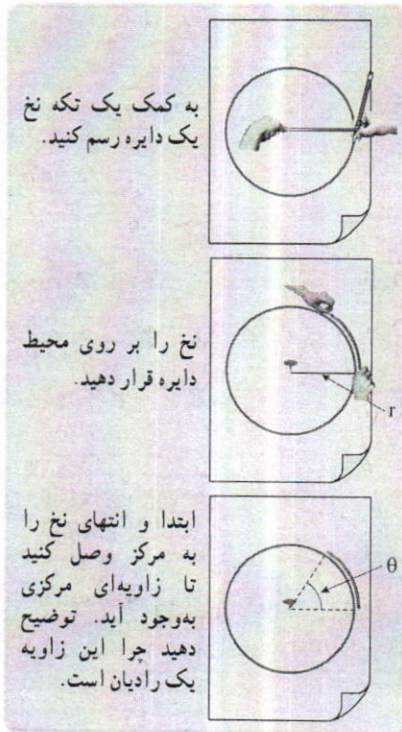
ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم

چه رابطه‌ای دارند؟

$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \frac{\frac{\pi}{10}}{2} = \frac{\pi}{20}$$

$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \frac{\frac{\pi}{20}}{1} = \frac{\pi}{20}$$

$$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \frac{\frac{3\pi}{20}}{3} = \frac{\pi}{20}$$

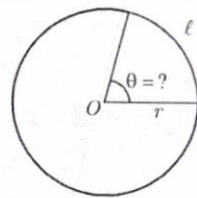


ب) اگر در شکل صفحه قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{1}{12} \times 2\pi \times r}{r} = \dots \frac{\pi}{6} \dots$$

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه 30° به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت $\frac{\pi}{6}$ است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

۲) در یک دایره به شعاع r ، مانند شکل زیر، طول کمان روبه‌رو به زاویه θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازه زاویه θ تقریباً چند درجه است؟ (از مقاله استفاده کنید) $\frac{\ell}{r} = 1 \text{ rad}$

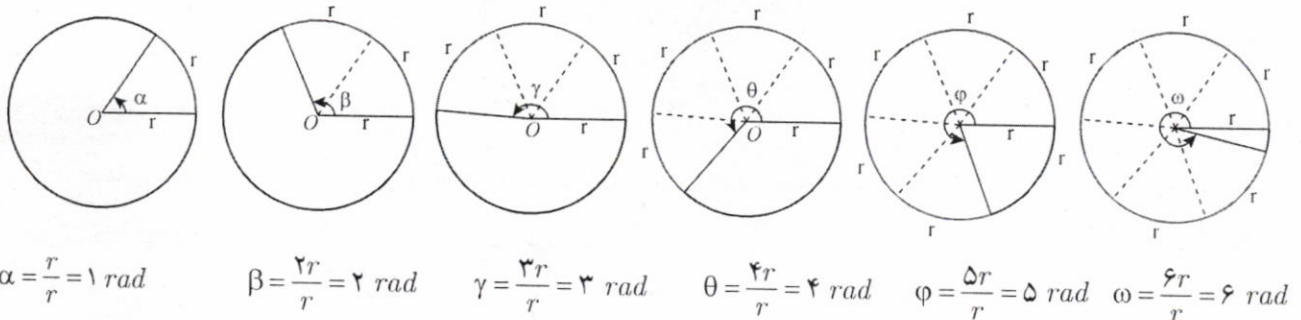


$$1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای بیان اندازه زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازه زاویه θ برابر ۱ رادیان است.

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان روبه‌رو به هر زاویه به شعاع دقت کنید.



❖ مثال : اندازه یک زاویه نیم صفحه (180°) و نیز یک زاویه قائمه (90°) برحسب رادیان چقدر است؟

❖ حل : می دانیم که طول کمان روبه‌رو به زاویه نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم :

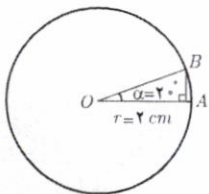
$$\frac{2\pi r}{2} = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ rad}$$

پس یک زاویه 180° برابر π رادیان می‌باشد. به‌طور مشابه طول کمان روبه‌رو به یک زاویه قائمه، ربع محیط دایره است. پس :

$$\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$



❖ مثال : در شکل مقابل اندازه زاویه α را برحسب رادیان به دست آورید، سپس طول \widehat{AB} را پیدا کنید.

❖ حل : از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویه 180° برابر π رادیان است. بنابراین داریم :

$$\frac{2^\circ}{\alpha \text{ (برحسب رادیان)}} = \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{2^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{9}$ رادیان است. اکنون برای به دست آوردن طول \widehat{AB} داریم :

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه :

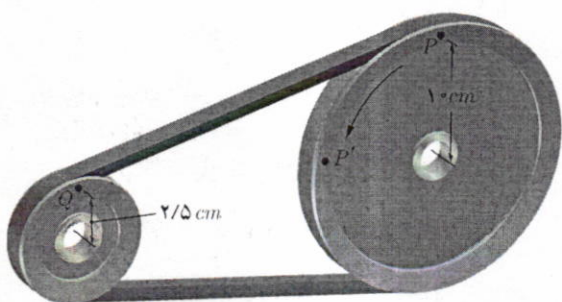
❖ مثال : در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های 1 cm و

$\frac{2}{5} \text{ cm}$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{4}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد. ($\pi \text{ rad} = 3.14 \text{ rad}$)

❖ حل : ابتدا مسافتی را که نقطه P بر روی محیط قرقره بزرگ‌تر طی

می‌کند به دست می‌آوریم.

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = r\theta = 1 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ cm} = 0.785 \text{ cm}$$



چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقره کوچک تر نیز 5π cm حرکت می کند. برای این قرقره داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = \frac{5\pi}{\frac{2}{5}} = 2\pi \text{ rad}$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ تر ربع دور می چرخد، قرقره کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطه Q به مکان خود بازمی گردد.

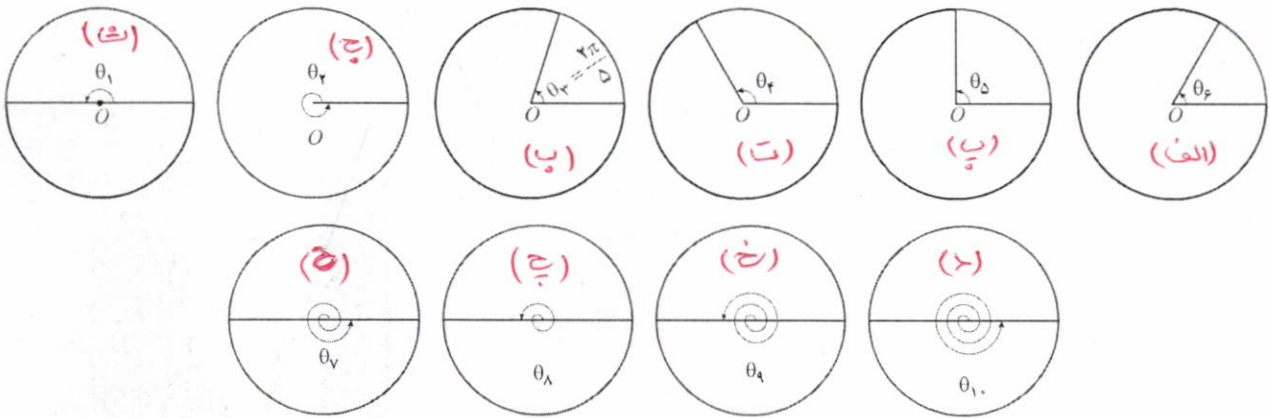
کاردر کلاس

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی را پر کنید.

زاویه بر حسب درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	390°	420°
زاویه بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$

۲ در زیر، اندازه برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زاویای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{2\pi}{6}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ پ) $\frac{2\pi}{4}$ ت) $\frac{2\pi}{3}$ ث) $\frac{2\pi}{2}$ ج) 2π ج) 3π ح) 4π خ) 5π د) 6π



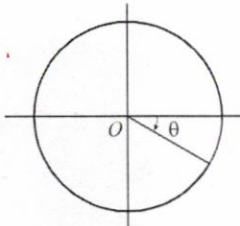
۲ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید، مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را در جاهای خالی بنویسید.

نسبت \ θ (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinθ	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	-۱	۰
cosθ	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۱
tanθ	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	بزرگ نشده	بزرگ نشده	۰
cotθ	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	۰	بزرگ نشده

مساویت است به این جدول زاویه‌ی هر رادیان هم اضافه شود.

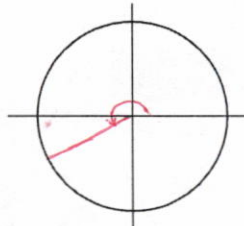
تمرین

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



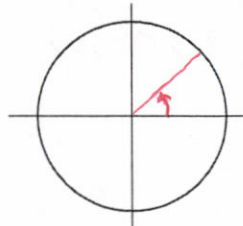
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



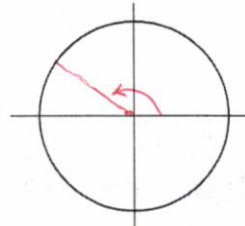
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3}$$

انتهای کمان در ربع سوم است.



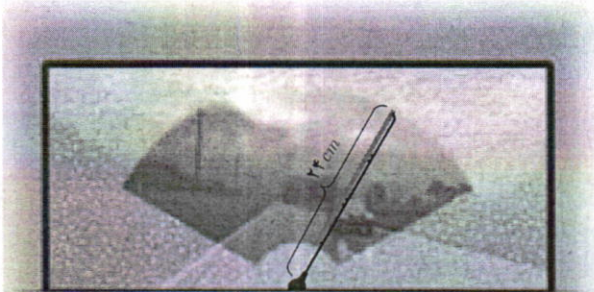
$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

انتهای کمان در ربع اول است.



$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع دوم است.

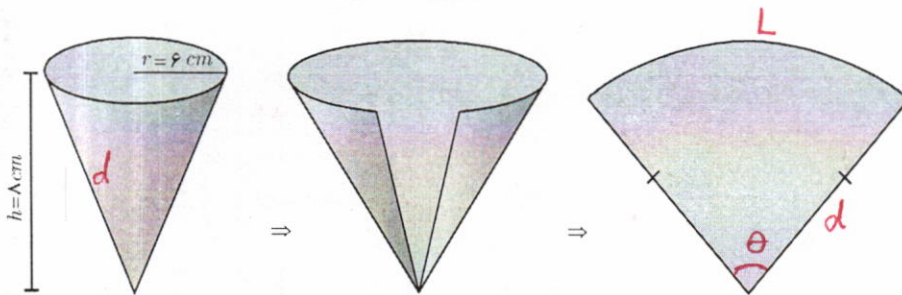


۲ طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند. ($\pi = 3/14$)

الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

$$\theta = \frac{L}{r} \quad \text{ب) } \frac{120}{180} = \frac{L}{24} \rightarrow L = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \approx 50.24 \text{ cm}$$

۳ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8 \text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

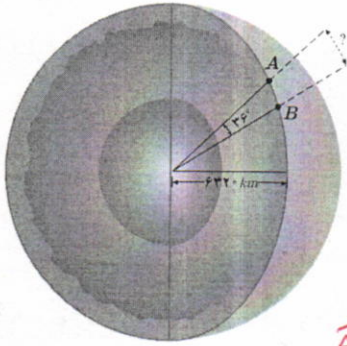


۱- به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.

$$d^2 = r^2 + h^2 \rightarrow d^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow d = 10$$

طول کمان = محیط قاعده = $2\pi r = 12\pi$ مخروط

$$\theta = \frac{L}{d} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6}{5}\pi \text{ rad}$$



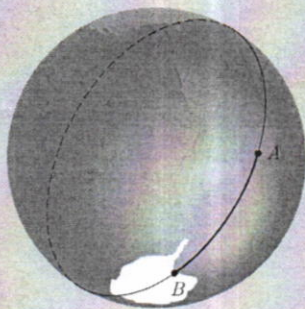
فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{34}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{\omega} \text{ rad}$$

اندازه زاویه در رادیان

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{r} \rightarrow \frac{\pi}{\omega} = \frac{\widehat{AB}}{4320} \rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{\omega} \times 4320 = 3948,96 \approx 3949 \text{ km}$$

خواندنی

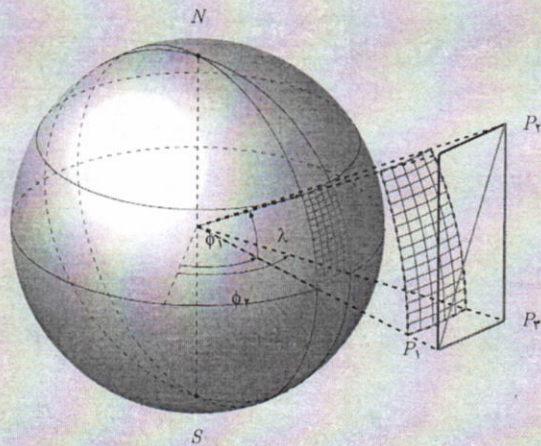


فاصله ژئودزیک دو نقطه از کره زمین

به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (GPS) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را برحسب طول و عرض جغرافیایی آنها به دست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا برحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایره عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



نصف النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

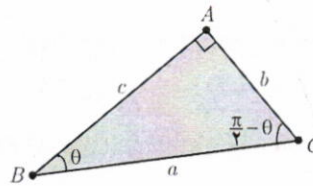
در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند 30° ، 45° ، 60°) و نیز زوایای مرزی (0° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطه بین آنها می‌پردازیم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازه آنها 90° باشد زاویه‌های متمم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$\sin \theta = \frac{b}{a}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{c}{a}$
$\cos \theta = \frac{c}{a}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{b}{a}$
$\tan \theta = \frac{b}{c}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{c}{b}$
$\cot \theta = \frac{c}{b}$	$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{b}{c}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sin \theta$$

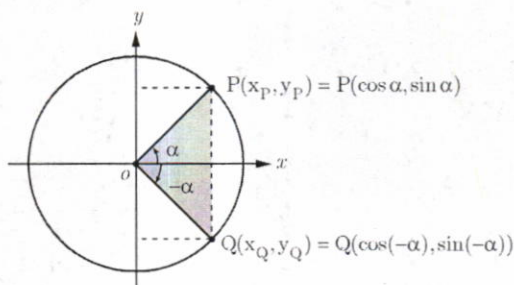
$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \tan \theta$$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط به‌دست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به‌طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{4} - \theta$ همواره روابط روبه‌رو برقرار است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور x ها نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.

الف) با توجه به رابطه بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

دو زاویه α و $-\alpha$ قرینه یکدیگرند. برای دو زاویه قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

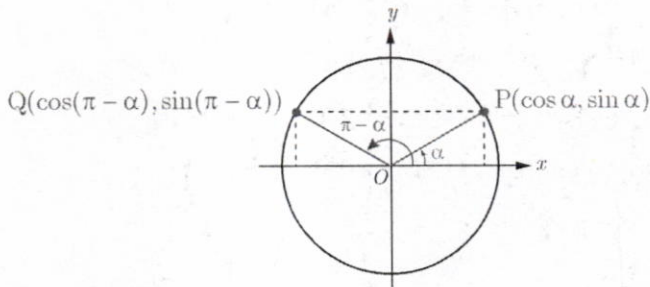
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوئیم اگر مجموع آنها 180° باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را به‌دست خواهیم آورد.



در دایره مثلثاتی زیر نقطه $P(x_P, y_P)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$ قرینه نقطه P نسبت به محور y ها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -x_P \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$y_Q = y_P \Rightarrow \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

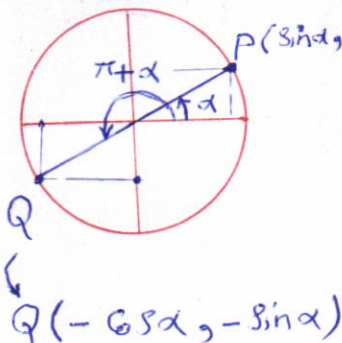
$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و $\pi - \alpha$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

زوایای α و $\pi + \alpha$ را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان‌های روبه‌رو به این دو زاویه را به ترتیب $P(x_P, y_P)$ و $Q(x_Q, y_Q)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و از این رو $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$. اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبه‌رو برقرار است. مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.



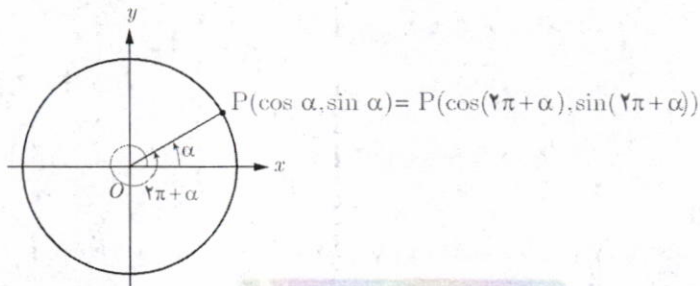
$$\sin\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

زاویه‌هایی مانند α و $2\pi + \alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.

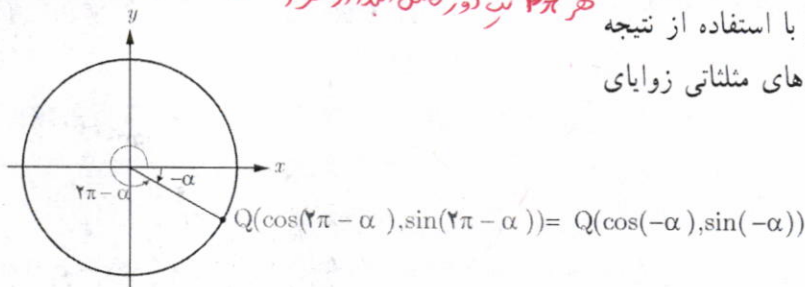


$$\begin{aligned}\sin(2\pi + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(2\pi + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(2\pi + \alpha) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(2k\pi + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2k\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(2k\pi + \alpha) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به صورت $2k\pi + \alpha$ ، نیز برقرار است. ($k \in \mathbb{Z}$)

هر 2π یک دور کامل است از هموراکت.



$$\begin{aligned}\sin(2k\pi - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(2k\pi - \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2k\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(2k\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi - \alpha$ به صورت زیر برقرارند.

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

الف) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

ب) $\sin(405^\circ) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(210^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

ب) $\tan(-\frac{7\pi}{4}) = \tan(-2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

پ) $\cot(135^\circ) = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$

ت) $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

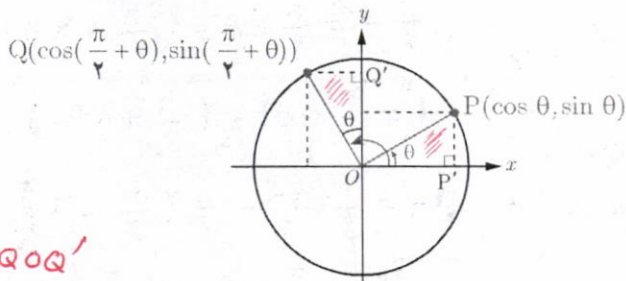
۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

نسبت زاویه	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	سوم	چهارم	اول
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت ها				
	نسبت + - sin α ✓ / cos α ✓ tan α ✓	نسبت + - sin α ✓ / cos α ✓ tan α ✓	نسبت + - sin α ✓ / cos α ✓ tan α ✓	نسبت + - sin α ✓ / cos α ✓ tan α ✓
sin α	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2k\pi - \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$
cos α	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(2k\pi - \theta) = \cos \theta$	$\cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$
tan α	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(2k\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$
cot α	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$	$\cot(2k\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(2k\pi + \theta) = \cot \theta$

۳ برای زوایای قرینه ($\alpha = -\theta$) از کدام ستون جدول بالا می توان کمک گرفت؟ چرا؟

$\alpha = 2k\pi - \theta \xrightarrow{k=0} \alpha = -\theta$
ستون سوم

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ رسم شده‌اند.



$$\begin{cases} OP = OQ \\ \angle POP' = \angle QOQ' \end{cases}$$

حالت θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ هم‌نهشت هستند. *هم‌نهشت هستند.*

الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث OQP' و OPQ' هم‌نهشت هستند. *برای دو مثلث OQP' و OPQ' هم‌نهشت هستند.*
ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_P \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$y_Q = x_P \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

به‌طور کلی برای دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(30^\circ) =$

ب) $\cot(75^\circ) =$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) =$

ث) $\sin(\frac{5\pi}{4}) =$

ج) $\tan(-84^\circ) =$

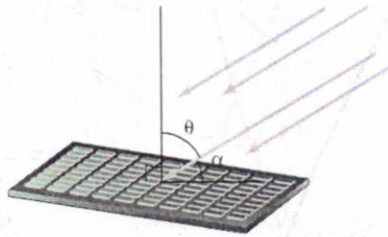
ح) $\tan(-15^\circ) =$

خ) $\cos(\frac{9\pi}{4}) =$

د) $\tan(\frac{10\pi}{3}) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا بر حسب رادیان است).

الف) $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

ب) $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta) + \cos \theta = 1$

ج) $\cos(7) = \cos(-7)$

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

حل کاردر کلاس صفحه ی ۹ (حسابان ۱)

: ۱

$$\text{الف) } \sin(300^\circ) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } \cot(75^\circ) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot(4\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$$

$$\text{پ) } \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ت) } \cos(-\frac{23\pi}{4}) = \cos(\frac{23\pi}{4}) = \cos(6\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ث) } \sin(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ج) } \tan(-84^\circ) = -\tan(84^\circ) = -\tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$\text{چ) } \tan(-15^\circ) = -\tan(15^\circ) = -\tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ح) } \cos(\frac{9\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{خ) } \tan(\frac{10\pi}{3}) = \tan(3\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

: ۲

$$\text{الف) } I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \cos \alpha = k \sin \theta$$

$$\text{ب) } I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \sin \theta \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow I = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = \frac{k}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = \frac{k\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{پ) } I = k \xrightarrow{I = k \sin \theta} \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

د) درست

ج) درست

ب) نادرست

۳: الف) درست

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به دست آوردیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات $\sin 3$ یا $\cos 3$ چه مفهومی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سؤالات را بیابید.

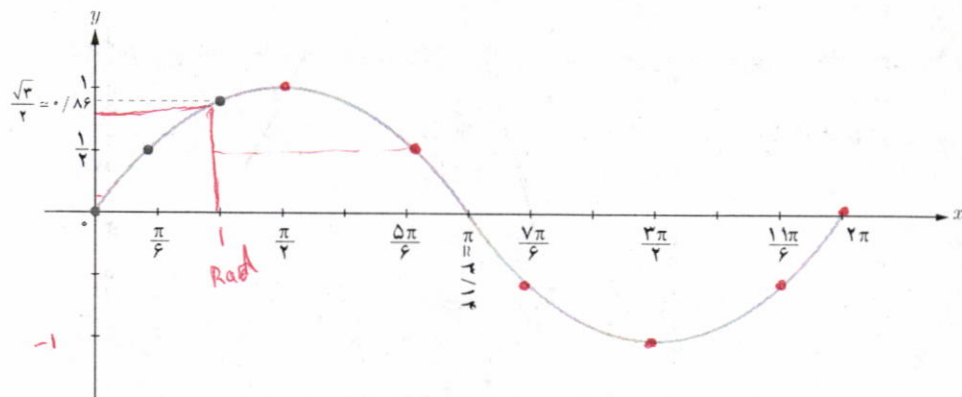
فعالیت

۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[0, 2\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

۲ جدول بالا به صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. با توجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور y ‌ها بررسی کنید).

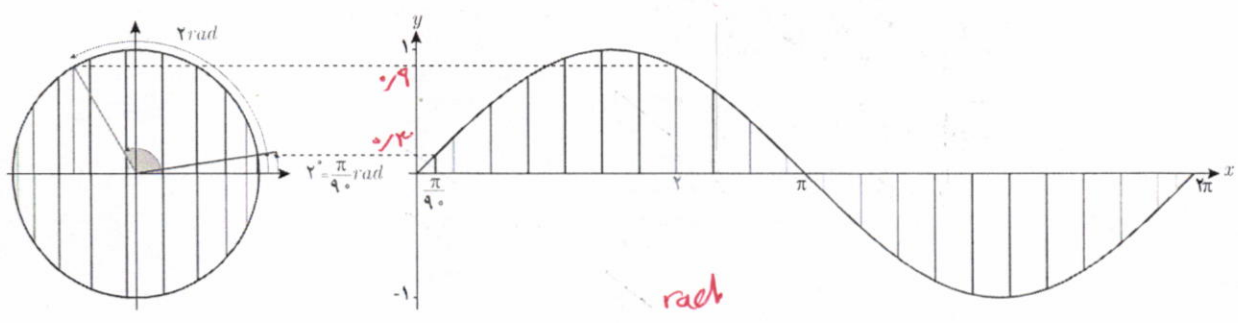
$$f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (\pi, 0), \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), (2\pi, 0) \right\}$$



۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin 1$ کجای محور y ‌ها قرار می‌گیرد؟ بالای محور y ‌ها در سمت مثبت بین صفر و یک و نزدیک به یک

$$\sin 1 \approx 0.86$$

۴ در تابع $y = \sin x$ ، همیشه x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد $^\circ$ استفاده شود. با توجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin 2^\circ$ و $\sin 2$ را بیان کنید.

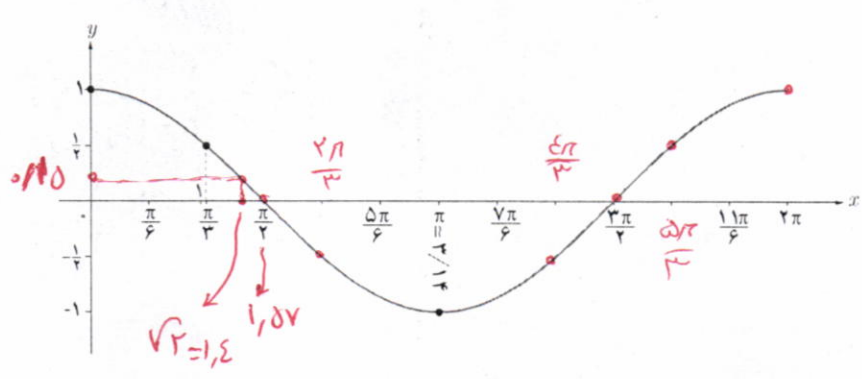


$\sin(2) = 0.9$ (rad)
 $\sin(2^\circ) = \sin(\frac{2\pi}{90}) = 0.03$

فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y = \cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط به دست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

$f = \left\{ (0, 1), (\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}), (\pi, -1), (\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 0), (\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}), (2\pi, 1) \right\}$



۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{2}$ رادیان را بر روی محور x ‌ها بیابید و سپس مکان $\cos \sqrt{2}$ را بر روی محور y ‌ها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

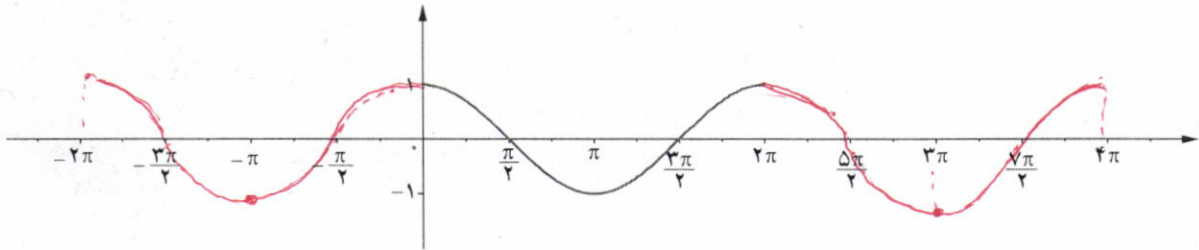
$\cos(\sqrt{2}) = \cos(1.4) = 0.1559$
 Rad Rad

خواندنی

در همه ماشین حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری بر حسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos \sqrt{2}$ را حساب کرده‌اند.



۲ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ و نیز $\cos(-x) = \cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y = \cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور x ها به دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ و $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ با هم متفاوت هستند؟
مغز: مقدار برای چه کند.



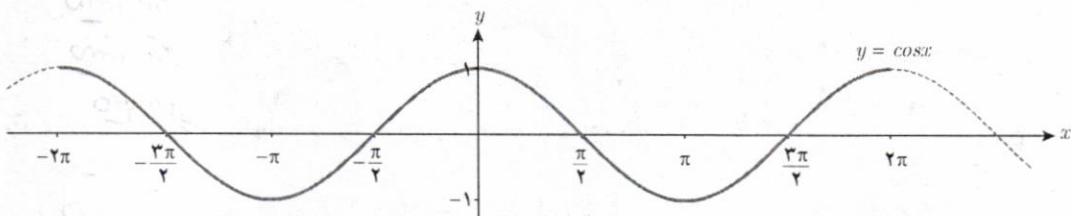
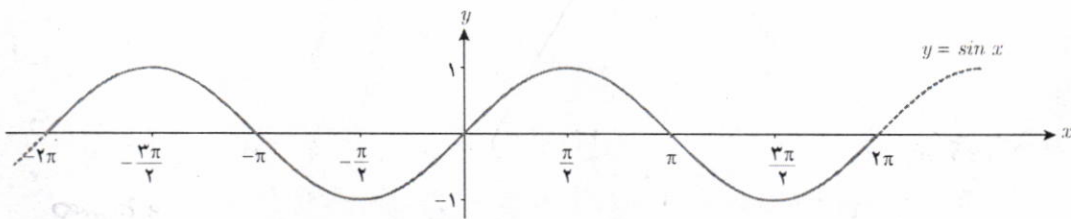
۴ با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 4\pi]$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

- الف) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد؟ *بله، وجود دارد.*
 ب) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = 2$ باشد؟ *خیر.*
 پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ در این بازه چقدر است؟
 $y_{\max} = 1$ $y_{\min} = -1$

تابع‌های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-1, 1]$ است. گاهی به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y = \cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y = \sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مثلثاتی بالا، می‌توان نمودار آنها را به صورت زیر رسم کرد.

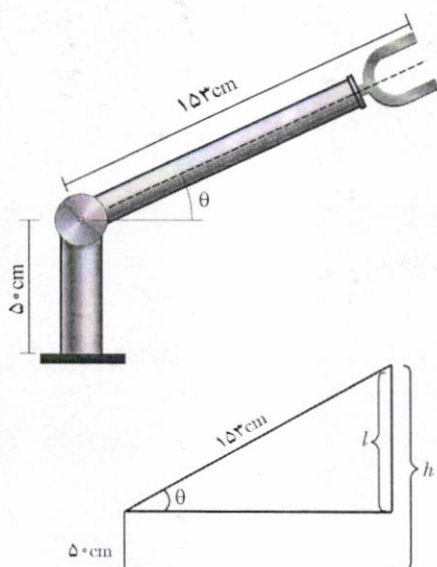
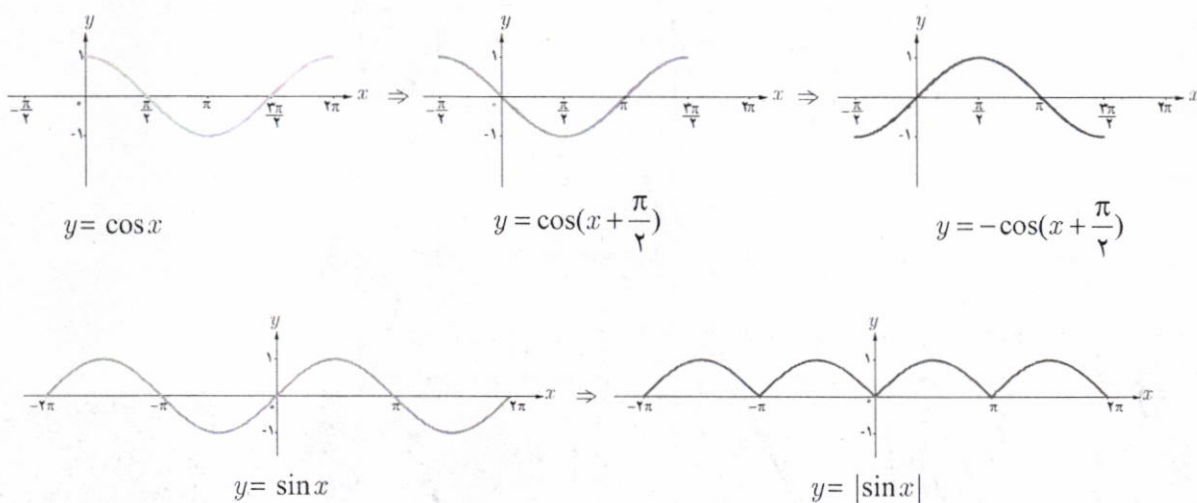
برای $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$



درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. **نادرست**
 ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است. **درست**
 پ) $\cos 3 = \cos 3^\circ$. **نادرست**
 ت) اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ آنگاه $-1 < \cos x < 0$ است. **نادرست**
 ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است. **نادرست**
 ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد. **نادرست**

♣ مثال: با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع $y = |\sin x|$ و $y = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$ در زیر رسم شده است.



♣ مثال: رویات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع رویات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبه‌رو یک رویات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. با توجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره رویات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

♣ حل: کافی است وضعیت رویات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sin \theta = \frac{l}{153} \rightarrow l = 153 \sin \theta$$

$$\Rightarrow h = 50 + l = 50 + 153 \sin \theta$$

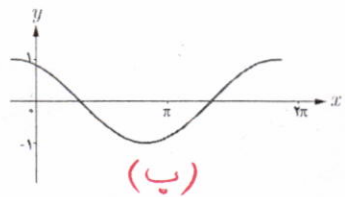
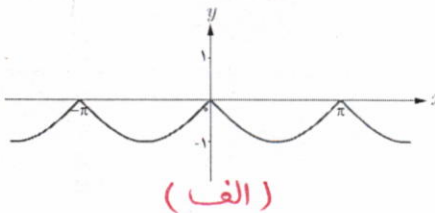
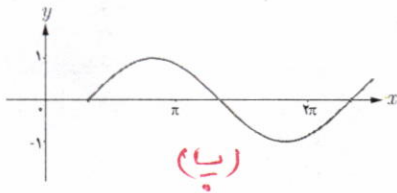
sin

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

$y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ (ب)

$y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ (ب)

$y = -|\sin x|$ (الف)

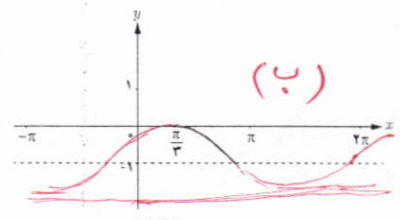
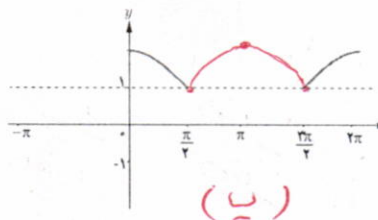
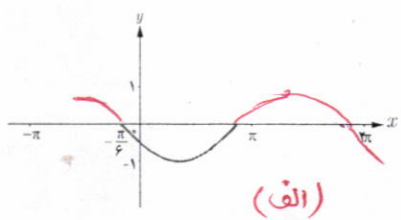


۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

$y = 1 + |\cos x|$ (پ)

$y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$ (ب)

$y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$ (الف)



$y_{\max} = 1$
 $y_{\min} = -1$

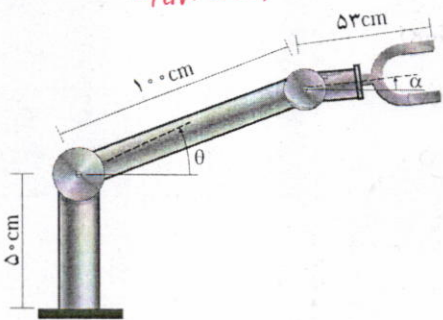
$y_{\max} = 2$
 $y_{\min} = 0$

$y_{\max} = 0$
 $y_{\min} = -2$

۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می دهد؟

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟

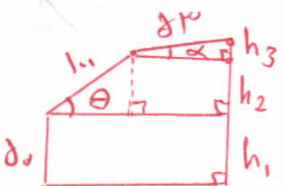
۵ در طراحی روبات های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه رو در نظر می گیرند.



(الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

(ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع 23.5 cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -3^\circ$ قرار داده است.

تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



$\sin \theta = \frac{h_2}{100} \rightarrow h_2 = 100 \sin \theta$ (الف)

$\sin \alpha = \frac{h_3}{53} \rightarrow h_3 = 53 \sin \alpha$

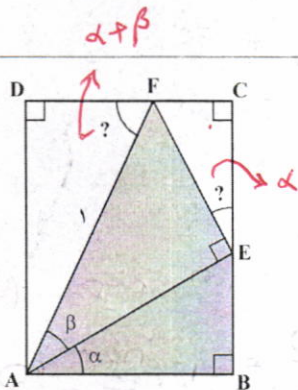
$h = h_1 + h_2 + h_3 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$

(ب)
 $23.5 = 50 + 100 \sin \theta + 53(-\frac{1}{3})$
 $\rightarrow 23.5 = 50 + 100 \sin \theta - 17.67 \rightarrow \sin \theta = \frac{8.83}{100} = \frac{1}{10} \rightarrow \theta = 3^\circ$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ و روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به کار رفته است فرا می‌گیرید.

فعالیت



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است. الف) با تکمیل روابط زیر اندازه \hat{FEC} و \hat{AFD} را برحسب α و β به‌دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{FEC} + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ \text{ : زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \alpha + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ \text{ : مجموع زوایای داخلی } ABE \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{FEC} = \dots \alpha$$

$\hat{AFD} = \alpha + \beta$ اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است.

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\triangle ADF$ را با توجه به اینکه $AF = 1$ ، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $\triangle DFA$ بنویسید.

$$\sin(\alpha + \beta) = AD$$

$$\cos(\alpha + \beta) = DF$$

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

$$\sin \beta = EF$$

$$\cos \beta = AE$$

ت) اندازه پاره خط‌های BE ، EC ، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{\cos \beta} \rightarrow BE = \sin \alpha \cos \beta$$

$$\triangle ABE: \left(\cos \alpha = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{\sin \beta} \rightarrow AB = \cos \alpha \sin \beta \right.$$

$$\left. \sin \alpha = \frac{FC}{EF} = \frac{FC}{\sin \beta} \rightarrow FC = \sin \alpha \sin \beta \right.$$

$$\triangle ECF: \left(\cos \alpha = \frac{EC}{EF} = \frac{EC}{\sin \beta} \rightarrow EC = \cos \alpha \sin \beta \right.$$

ث) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل صفحه قبل روابط زیر به دست می‌آید. آنها را با توجه به قسمت‌های الف تا ن کامل کنید.

$$AD = BE + EC \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$DF = AB - FC \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

۱ توضیح دهید چرا اگر اندازه پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است. *یا زینت به فرار کند.*

در فعالیت فوق زوایای به کار رفته همگی تند بودند. می‌توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌توان به دست آورد:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

پس همواره داریم:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

❖ مثال: مقدار $\sin 75^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

❖ مثال: درستی رابطه $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\cot \theta$ را نشان دهید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\sin 10^\circ = \sin(70^\circ + \varepsilon) = \sin 70^\circ \cos \varepsilon + \cos 70^\circ \sin \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 10^\circ = \cos(70^\circ + \varepsilon) = \cos 70^\circ \cos \varepsilon - \sin 70^\circ \sin \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\tan 10^\circ = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$1) \cos 15^\circ = \cos(70^\circ - \varepsilon) = \cos 70^\circ \cos \varepsilon + \sin 70^\circ \sin \varepsilon$$

$$2) \tan 10^\circ = \dots$$

$$3) \sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

الف مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟
ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۲ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$$

$$= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \left(\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65} \end{aligned}$$

حد و پیوستگی

۵

فصل

- ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی
- ۲ حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)
- ۳ قضایای حد
- ۴ محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
- ۵ پیوستگی

مفهوم حد و فرایندهای حدی

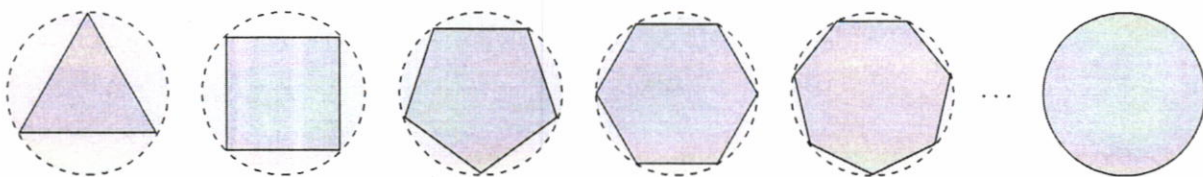
درس

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به صورت یک تابع درمی‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟ **دایره**

$$\pi(1)^2 = \pi$$

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر $\pi = 3.14159$ در نظر بگیریم و مساحت n ضلعی منتظم واقع در درون دایره

را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد:

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون

دایره) به عدد π که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

خواندنی

عدد π (بی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. بی یکی از مشهورترین عددها در دنیای ریاضی است و با نماد π ، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی π این است:

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

π یک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبه به دست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پایپوسی نوشته شده است که در حال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی عدد π ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی درون و بیرون یک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد π پرداخت. او با ۶ ضلعی منتظم شروع و مرتباً تعداد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی مقدار π را تا ۱۷ رقم پس از ممیز بسیار خوبی ($3.1415926535 < \pi < 3.1415926536$) به دست آورد.



غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رسالهٔ محیطه π را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است.

اگر می‌خواهید عدد π را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد:

گر کسی از تو بپرسد ره دانستن π	باسخی ده که هنرمند تو را آموزد
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان	ره سرنزل مقصود بما آموزد
۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹	۲ ۶ ۵ ۳ ۵

$$\pi = 3.1415926535 \dots$$

فعالیت



یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را در نظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید

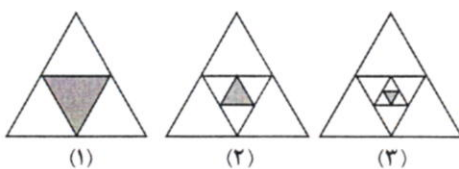
را x_1 و اندازه محیط آن را P_1 می‌نامیم.

در این صورت داریم: $x_1 = \frac{2}{3} = 1$ و $P_1 = \frac{4}{3} = 4$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله n ام طول ضلع مثلث به وجود

آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید:



x_n	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$...	$\frac{1}{2^n}$
P_n	۳	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$...	$\frac{3}{2^n}$

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ **صفر**

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ **صفر**

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x در نظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه

$$f(x) = 3x$$

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث‌ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر

تابع f ، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

❖ مثال: رفتار تابع f ، با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را در اطراف نقطه $a = 2$ بررسی نمایید.

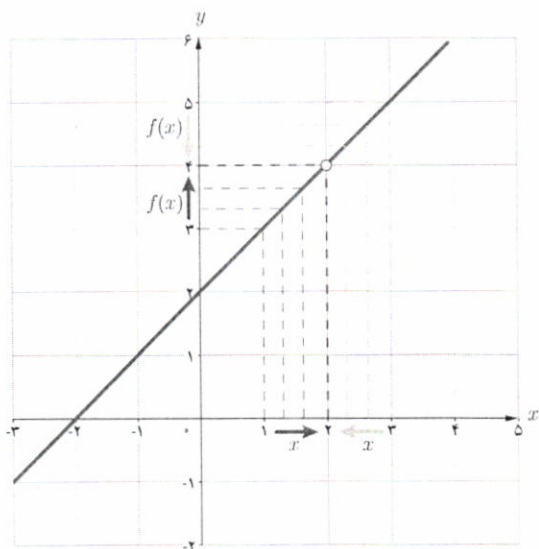
❖ حل: تابع f ، به ازای هر عدد حقیقی x به جز $x = 2$ تعریف شده است. به ازای هر $x \neq 2$ ، ضابطه تابع را می توان ساده کرد و به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک تر از ۲، که به تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ تر از ۲، که به تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می شوند، محاسبه کرده ایم:

	← از راست به عدد ۲ نزدیک می شود						→ از چپ به عدد ۲ نزدیک می شود				
x	۳	۲/۵	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲	۱/۹۹۹	۱/۹۹	۱/۹	۱/۵	۱
$f(x)$	۵	۴/۵	۴/۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۰۰۱	?	۳/۹۹۹	۳/۹۹	۳/۹	۳/۵	۳
	← $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می شود						→ $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می شود				

با توجه به جدول فوق، مشاهده می کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر $f(x)$ ، به عدد ۴ نزدیک می شوند.



درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می توان دید: نمودار تابع f ، خط راست $y = x + 2$ است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه $(2, 4)$ حذف شده است.

با وجود اینکه مقدار تابع در نقطه ۲ تعریف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی x را با مقادیر بزرگ تر و یا کوچک تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می شوند. به عبارت دیگر وقتی $x \rightarrow 2$ (یعنی x به سمت ۲ میل می کند)، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می شوند. در این صورت می گوئیم، حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می شود برابر ۴ است و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند f را در اطراف نقطه ای مانند a بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر x به a نزدیک می شود مقادیر تابع f نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع f در نقطه a می نامیم.

توابع f, g, h با ضابطه های $f(x) = x+3$ و $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ و $h(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید:

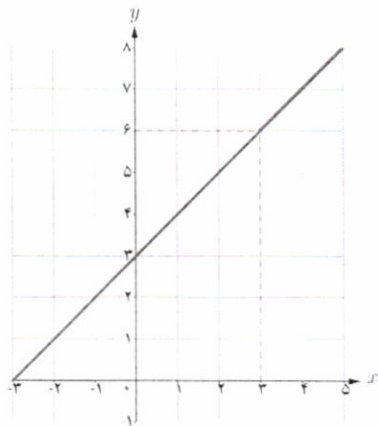
$f(3) = \dots 4$ $g(3) = \dots$ *نیز تعریف نشده* $h(3) = \dots 4$

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می کنیم، مقادیر توابع f, g, h هر کدام به چه عددی نزدیک می شوند؟
به عدد ۶ نزدیک می شوند.

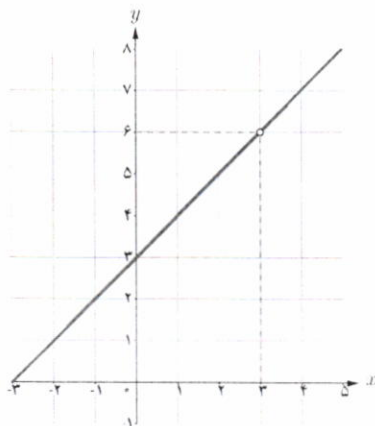
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	→ ۳	← ۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→ ?	← ۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	→ ?	← ۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱
$h(x)$	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	→ ?	← ۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱

۳ نمودارهای توابع f, g, h به صورت زیر رسم شده است.

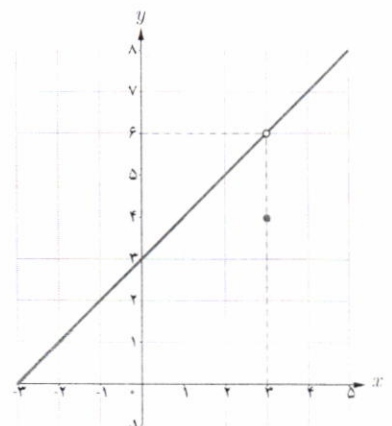
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می کنیم، مقادیر $f(x), g(x), h(x)$ هر کدام به چه عددی نزدیک می شوند.



نمودار f



نمودار g



نمودار h

همیشه تابع به عدد ۶ نزدیک می شوند.

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر $\frac{1}{6}$ است به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \frac{1}{6}$$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت در مقدار در نقطه $x=3$ و شباهت در برابر بودن حدها آنها در $x=3$
تفاوت در برابر بودن یا نبودن مقدار تابع با حد تابع در $x=3$

از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که:

الف) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی x به a نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع g در نقطه ۳)

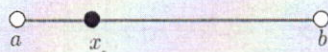
ب) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقدار این حد با مقدار تابع در a برابر نباشد. (مانند تابع h در نقطه ۳).

در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع g در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود برابر با $\frac{1}{6}$ است.

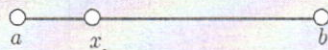
با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند a ، نزدیک نمود، کافی است تابع مورد نظر در یک بازه باز شامل a تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه a ، رفتار تابع در دو طرف نقطه a اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود a در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم:

تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم. بنابراین اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آن‌گاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 است.



اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.

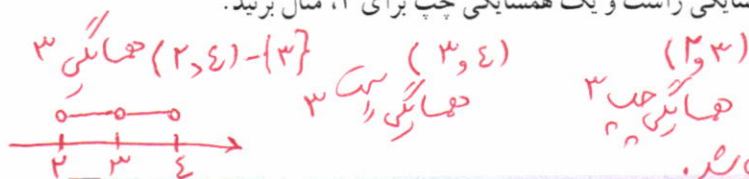


به همین ترتیب:

اگر $r > 0$ ، در این صورت بازه $(x_0, x_0 + r)$ را یک همسایگی راست و بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

کاردر کلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.



۲ آیا بازه (۲,۳) یک همسایگی ۲ می باشد؟ چرا؟

طبق تعریف بازه (۲,۳) همسایگی راست ۲ می باشد.

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می گوئیم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دو طرف) به قدر کافی به a ، نزدیک شود.

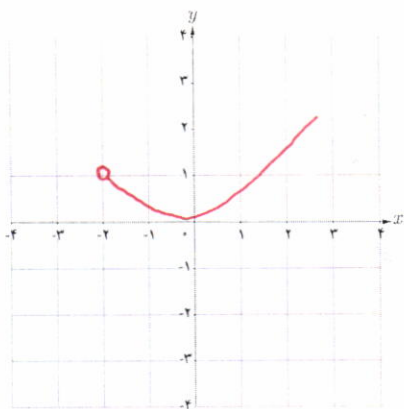
در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

عدد L را حد تابع f در a می نامیم.

کاردر کلاس

۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

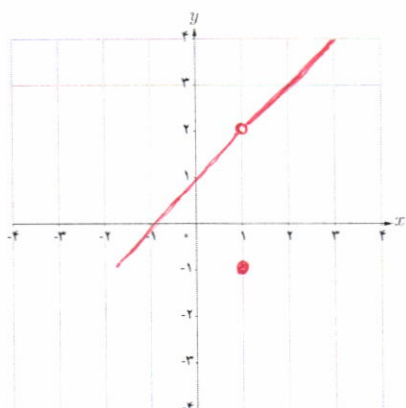


(۱)

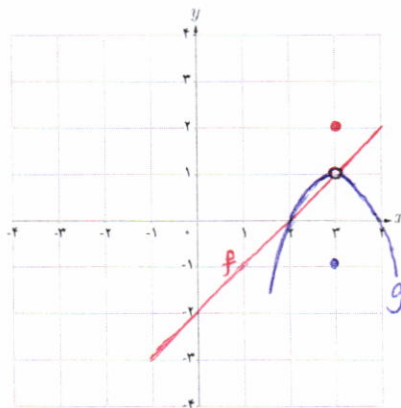
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(3) \neq g(3)$.

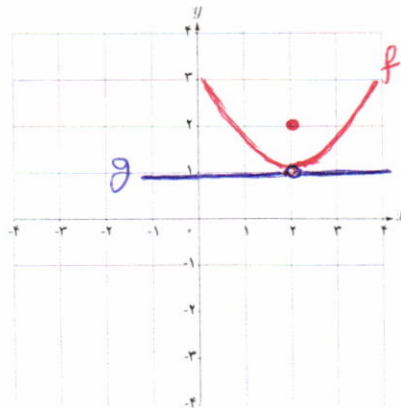
۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.



(۲)



(۳)

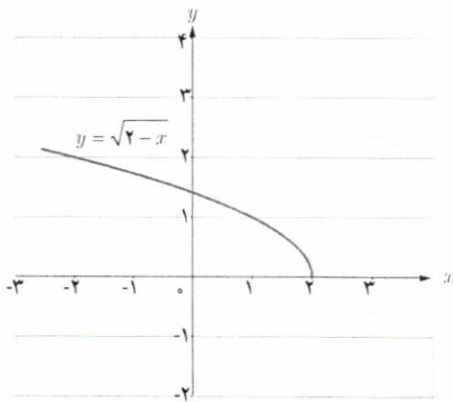
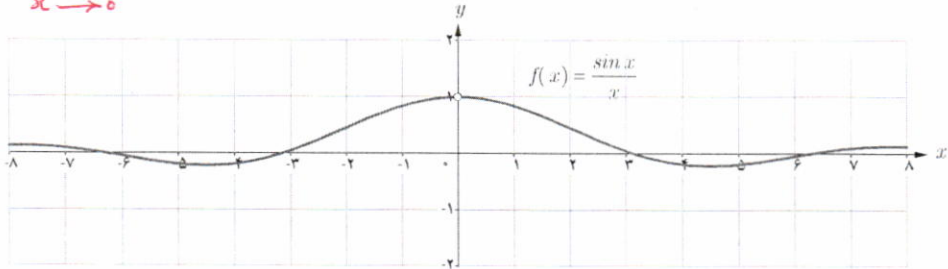


(۴)

x	$\frac{\sin x}{x}$
± 1	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
$\pm ۰/۵$	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
$\pm ۰/۴$	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
$\pm ۰/۳$	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
$\pm ۰/۲$	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
$\pm ۰/۱$	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
$\pm ۰/۰۵$	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
$\pm ۰/۰۱$	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
$\pm ۰/۰۰۵$	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
$\pm ۰/۰۰۱$	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

۵ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور x ها بر حسب رادیان است).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



♣ مثال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه $x=2$ حد دارد؟ چرا؟

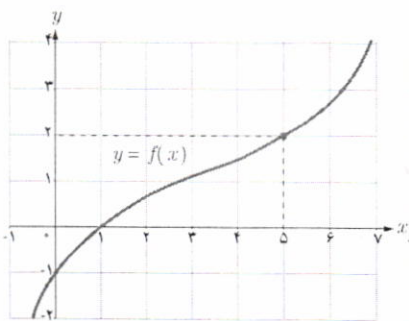
♣ حل: می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f = (-\infty, 2]$ می‌باشد.

چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر

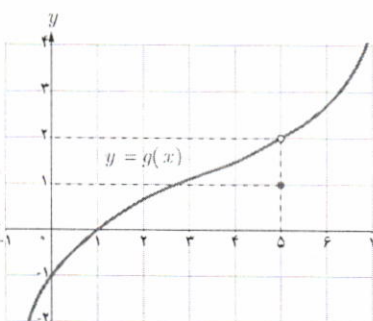
بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=2$ حد ندارد.

تمرین

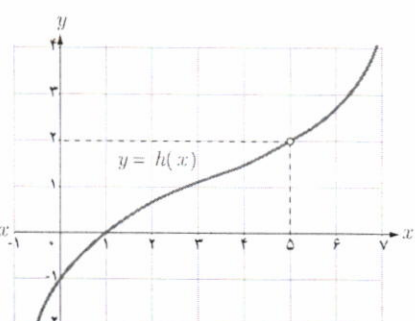
۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه $x=5$ ، مشخص کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2.$$

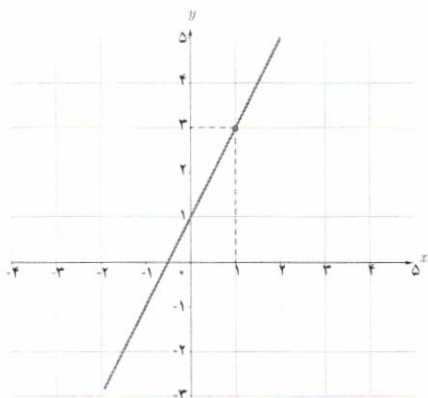


$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2.$$

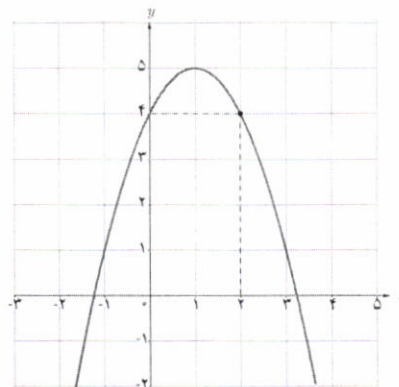


$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 2.$$

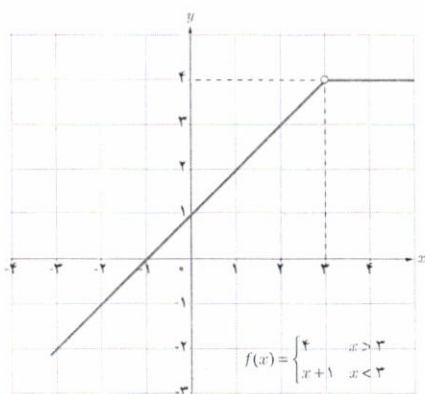
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



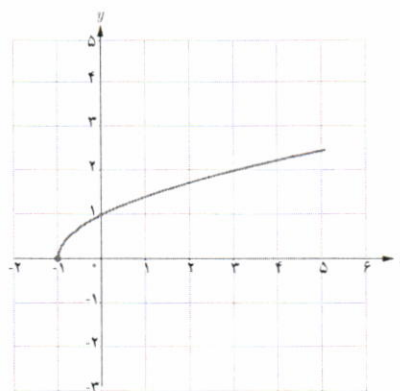
$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x + 4) = 6$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x + 1} = \text{محد ندارد}$$

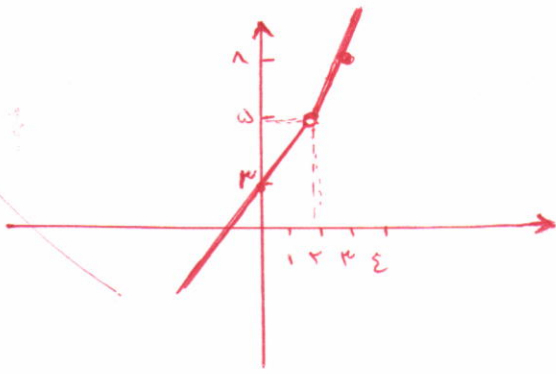
۲ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x + 4) = \dots 4$

x	-1	-0/9	-0/1	-0/01	$\rightarrow 0$	$0 \leftarrow$	0/001	0/01	0/1	0/5	1
$f(x)$	4	4,2	4,3	4,03	$\rightarrow ?$	$\leftarrow ?$	3,997	3,97	3,7	2,5	1

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots -5$, $f(x) = \begin{cases} x - 4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$

x	-2	-1/5	-1/1	-1/01	-1/001	$\rightarrow -1$	$-1 \leftarrow$	-0/999	-0/99	-0/9	-0/8
$f(x)$	-6	-5,8	-5,1	-5,01	-5,001	$\rightarrow ?$	$\leftarrow ?$	-2,999	-2,99	-2,9	-2,8

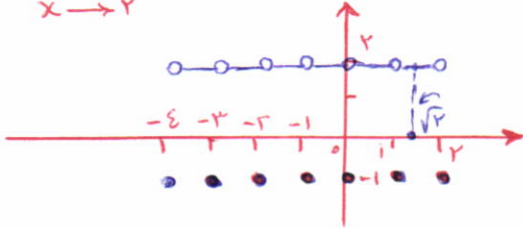


۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$ ، تعریف شده است؟ **خیر**

ب) با رسم نمودار f ، و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$



۵ تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار g را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = 2$

الف) $1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$D_f = [-1, 1] - \{0\}$



۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ **صفر**

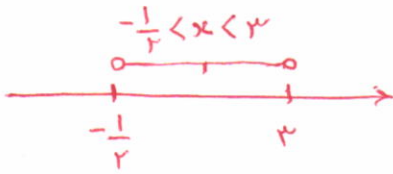
پ) آیا این تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟ **بله**

ت) آیا تابع f در همسایگی $x=1$ چپ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟ **خیر**

۷ اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$x-1 < 2 \rightarrow x < 3$

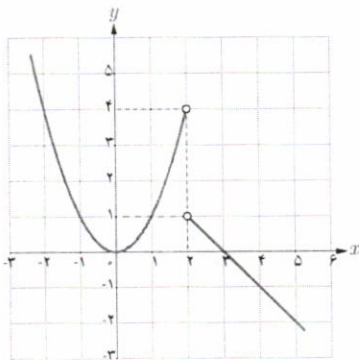
$2x+3 > 2 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$



حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.) ولی با توجه به اینکه دامنه این تابع بازه $(-\infty, 2]$ می باشد می توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر x با مقادیر بزرگتر از a به a نزدیک می شود یا وقتی متغیر x با مقادیر کوچکتر از a به a نزدیک می شود بررسی و توصیف نماییم.

فعالیت



نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت روبه رو است:

(الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگتر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می شوند.

(ب) اگر x با مقادیر کوچکتر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می شوند.

(پ) آیا تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد؟

مغز حد ندارد. زیرا رفتار تابع در همسایگی راست و همسایگی چپ ۲ متفاوت است.

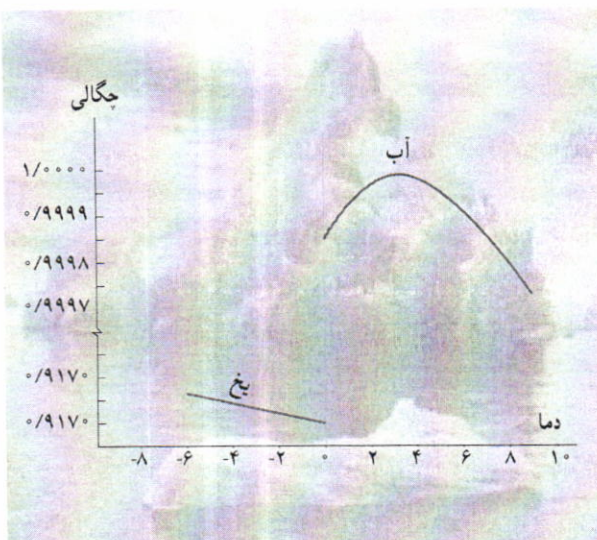
خواندنی

حتماً متوجه شده اید که یخ همیشه بر روی آب شناور است. توده یخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی شود؛ مانند کوه های بزرگ یخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس ها شناورند. آیا می دانید چرا یخ در آب غرق نمی شود؟

به طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی آید، منقبض می شود و مولکول هایش به هم نزدیک تر می شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می شود و جگالی آن افزایش می یابد. بنابراین مواد در حالت جامد سنگین تر از زمانی اند که به شکل مایع درآمده اند.

ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می شود؛ در نتیجه حجمش افزایش می یابد. تراکم یخ نه دهم آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر یخ به دست می آید. به همین جهت وزن یخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی یخ درون آب قرار می گیرد، تنها نه دهم آن در آب فرو می رود و ۱/۸ دیگرش بر روی آب شناور می ماند.

نمودار جگالی آب و یخ بر حسب دما به صورت روبه رو است:



در فعالیت صفحه قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگ تر از ۲) به ۲ نزدیک می شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیر کمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی x در یک همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود، مقادیر $f(x)$ به عدد مشخصی نزدیک نمی شوند و در نتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوئیم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \quad \text{در این صورت می نویسیم :}$$

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوئیم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2 \quad \text{در این صورت می نویسیم :}$$

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه ای مانند a ، تعریف شده باشد، آن گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می توان گفت :

حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

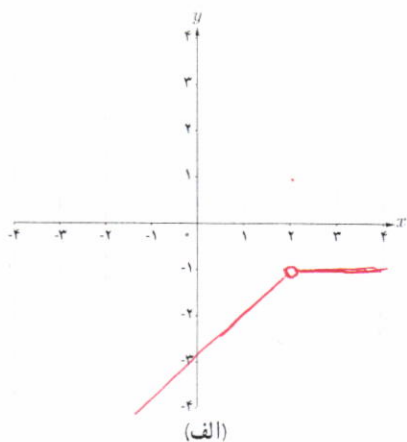
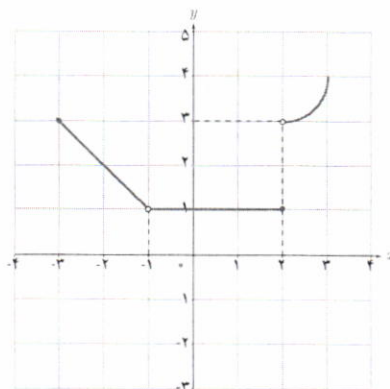
نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$ ، دو مقدار متمایز باشند آن گاه تابع f در نقطه $x=a$ ، حد ندارد.

۱ با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$ وجود ندارد.
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$
$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \dots$ وجود ندارد.	$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \dots$ وجود ندارد.
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

$x \rightarrow (-1)^+$
 $x \rightarrow (-1)^-$
 $x \rightarrow (-3)^+$
 $x \rightarrow (-3)^-$



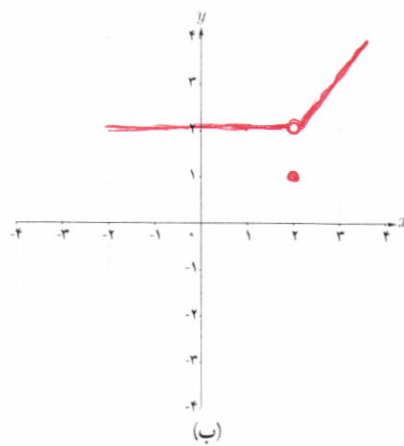
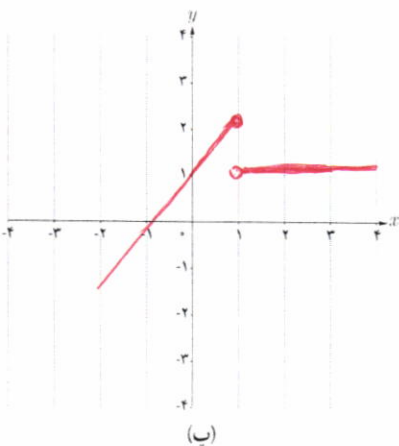
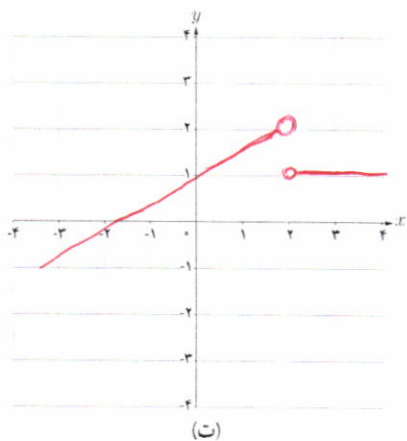
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که:

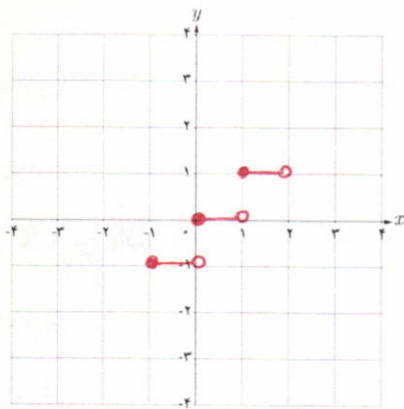
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.





۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-1, 2]$ رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آنگاه مقادیر

$f(x)$ به عدد \bullet نزدیک می‌شوند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \bullet$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=1$ را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

۴ آیا تابع f در نقطه $x=1$ حد دارد؟ چرا؟ *حد زبر*

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازه $(1, 2)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت

$$g(x)=1 \text{ منطبق است و داریم } \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$$

به همین ترتیب، در $(0, 1)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=0$ منطبق است و

$$\text{داریم } \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 0$$

اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی:

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ آن‌گاه } \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابعی که در یک همسایگی نقطه a (به جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

❖ مثال: مقدار حد راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{x}$ را در نقطه $x=0$ به دست آورید.

❖ حل: می‌دانیم روی بازه $(0, 1)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازه $(0, 1)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=0$ برابر است

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

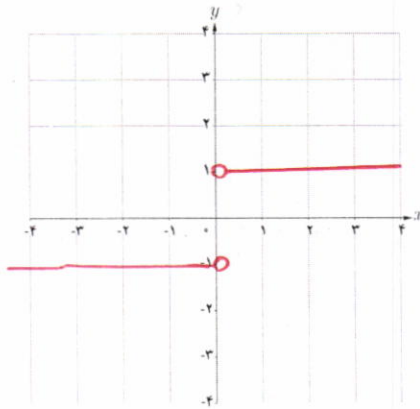
۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید:

الف) با استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار f ، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به دست آورید.

ت) آیا تابع f در نقطه صفر حد دارد؟ چرا؟



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$

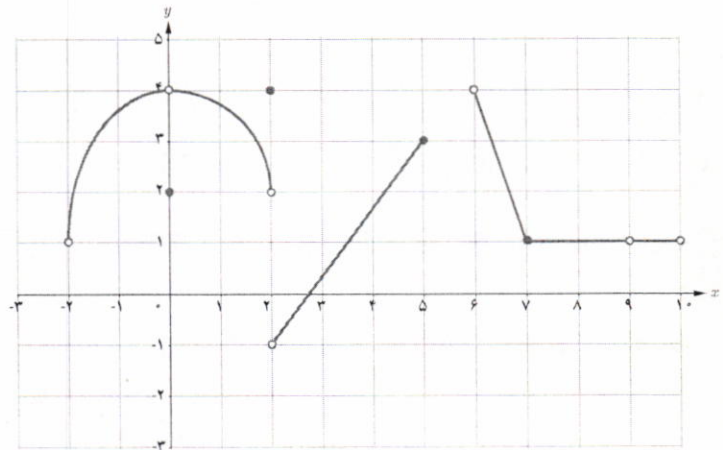
پ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \text{وجود ندارد}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 4$

ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 1$

ح) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 1$



۲ بارسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ x^2+2x & x < 0 \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن گاه مقادیر $f(x)$ به عدد 0 نزدیک می‌شوند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (0)^2 + 2(0) = 0$$

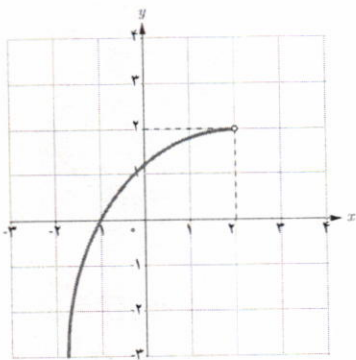
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2(0) + 1 = 1$$

ب) حد راست تابع f در نقطه $x=0$ را به دست آورید.

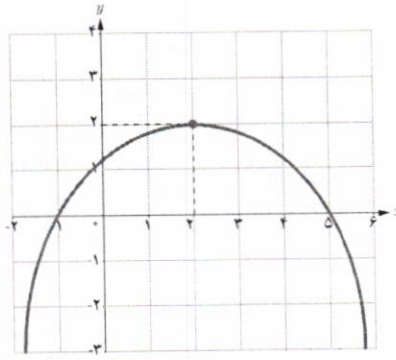
پ) آیا تابع f در نقطه $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ *خیر؛ زیرا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$*

۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟

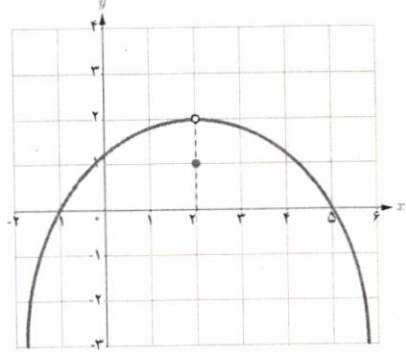
در هر مورد توابع را مشخص کنید.



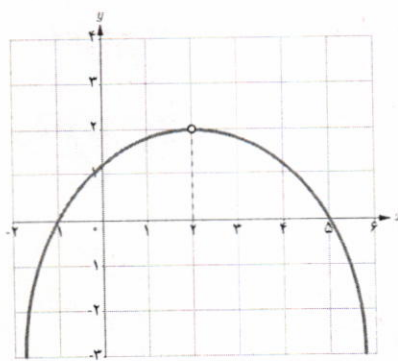
(ب)



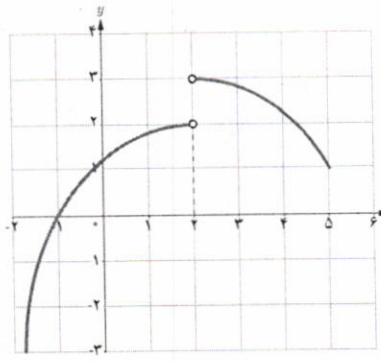
(ب)



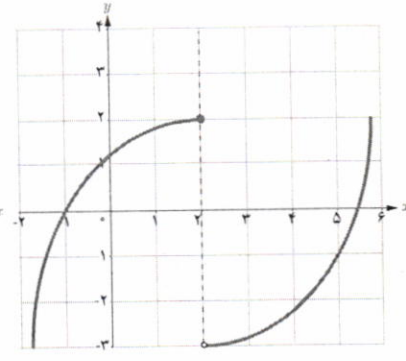
(الف)



(ج)



(ت)



(ت)

- تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (ج)

- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

- تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)

- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (ب)

- تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)

- تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت و ث)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x=1$ چه می توان گفت؟
 $x^2 - x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ تابع در $x=1$ از سمت چپ تعریف نشده است $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{(1)^2 - (1)} = 0$

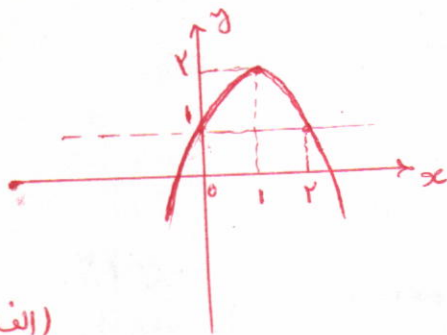
۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می توان گفت؟
 $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow [x] = 2$
 $\Rightarrow [x] - 2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{[x]-2} =$ وجود ندارد.

۶ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$

ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

([] نماد جزء صحیح است)



۷ با رسم نمودار تابع $f(x) = |x|$:

الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ را به دست آورید.

ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow a} |x| = a$ برقرار است؟

(الف)
 $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$

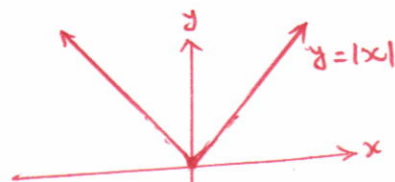
رنگین ۱ و در نزدیکی ۱

$1 < f(x) < 2$

$\rightarrow [f(x)] = 1$

(ب)
 $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right] = [2] = 1$

عدد نزدیک به ۲ است



(الف)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$f(x) = |x|$ (ب)

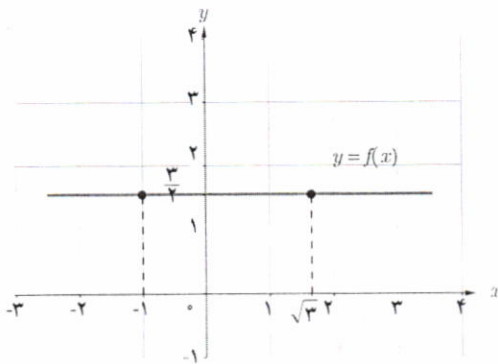
$a \geq 0 \rightarrow |a| = a$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = a = |a|$

$a < 0 \rightarrow |a| = -a$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = -a = |a|$

قضای حد

در بخش‌های قبل برای محاسبه حد توابع، با دو روش تکمیل جدول و رسم نمودار آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید تکمیل جدول زمان‌بر و رسم نمودار بعضی از توابع نیز مشکل است. در این بخش به بیان قضایایی درباره حد می‌پردازیم که با استفاده از آنها، حد بسیاری از توابع را می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

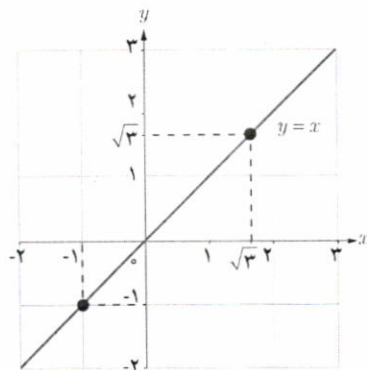
فعالیت



الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{3}{4}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \frac{3}{4}$$



ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x) = x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = \sqrt{3}$$

قضیه :

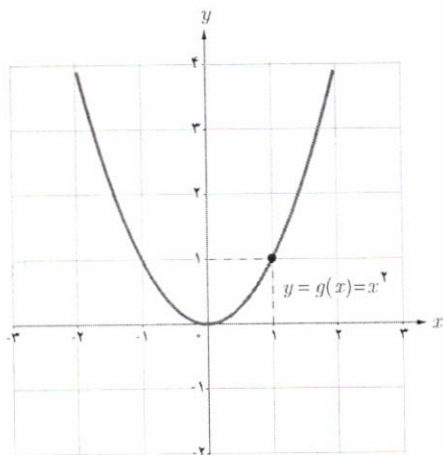
$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

الف) حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی،

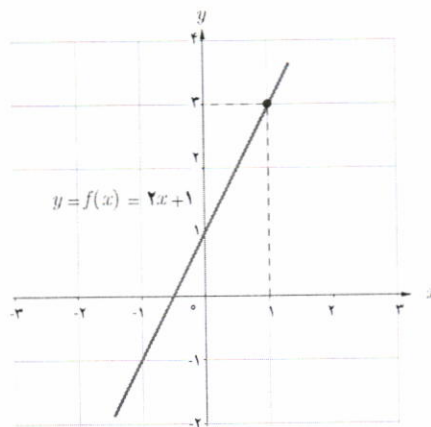
$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

ب) حد تابع همانی $g(x) = x$ در هر عدد دلخواه a برابر a است. یعنی،

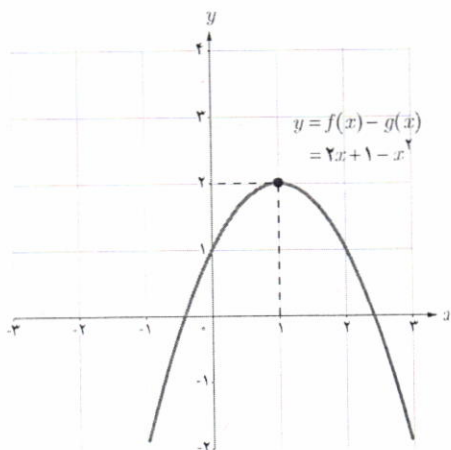
توابع $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.
الف) با توجه به نمودار توابع $f, g, f+g, f-g$ ، مقدار حدهای خواسته شده را بیابید.



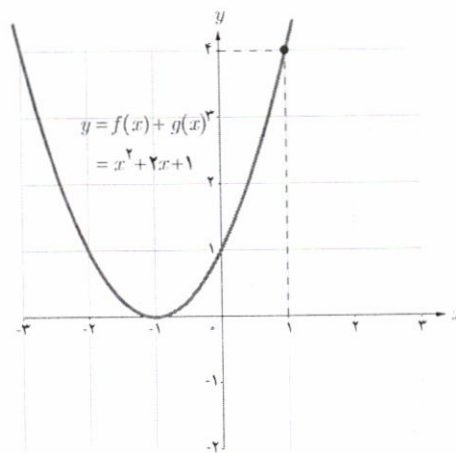
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots ۱$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots ۳$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \dots ۲$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \dots ۴$$

ب) با استفاده از قسمت الف)، درستی این تساوی‌ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن گاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

پ) (حد حاصل ضرب) حاصل ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2 \neq 0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

کاردر کلاس

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیه فوق، توضیح دهید چرا تساوی های زیر برقرارند؟

الف) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow a} c f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^2$

$$= c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

پ) $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times f(x))$$

ت) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

(به شرط آنکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$)

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^2$$

پ) $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (-1) f(x) = -1 \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

❖ تذکر: قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1, \dots, f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \times \dots \times f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \times \dots \times \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

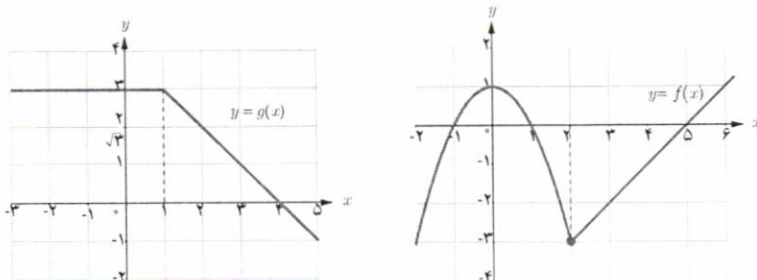
که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

❖ مثال: دو تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < 2 \\ x-5 & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 4-x & x \geq 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حد توابع $f+g, f-g, f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را در نقطه $x=2$ به‌دست آورید.

❖ حل: ابتدا حد دو تابع f و g را در نقطه $x=2$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها داریم: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$.

اکنون با استفاده از قضیه، به محاسبه حدهای مورد نظر می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 - 2 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right) = (-3)(2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{-3}{2}$$

❖ مثال :

$$\begin{aligned}
 ۱) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^4 + 3x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^4 + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 3x - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 \\
 &= (\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x)^4 + 3 \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x - \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 \\
 &= (\sqrt{2})^4 + 3(\sqrt{2}) - 1 = 4 + 3\sqrt{2} - 1 = 3 + 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3} x|x| = \left(\lim_{x \rightarrow 3} x \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 3} |x| \right) = 3 \times |3| = 9$$

$$\begin{aligned}
 ۳) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 7}{1-x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x^2 + 7)}{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1-x)} = \frac{4 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x \right)^2 + 7}{1 - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x} = \frac{4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 7}{1 - \frac{1}{2}} = 16
 \end{aligned}$$

قضیه :

هر چند جمله‌ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه a برابر است. یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_0$$

کاردرکلاسی

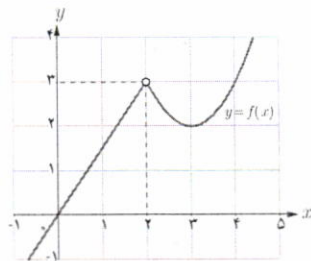
الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} x^4 = (-1)^4 = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1)^3 - 6|1| + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 4}{4x^3 - 7x + 1} = \frac{(2)^2 + 4(2) + 4}{4(2)^3 - 7(2) + 1} = \frac{16}{5}$$

$$\begin{aligned}
 ۴) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - [x]}{1-x} &= \frac{\frac{1}{2} - [\frac{1}{2}]}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

(ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است.مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} x f(x)$ را بیابید.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} x &= 2 \\
 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 3
 \end{aligned}$$

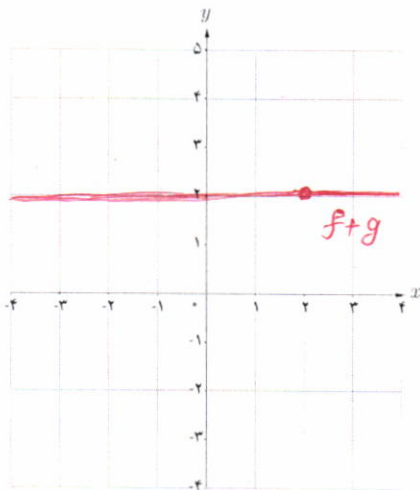
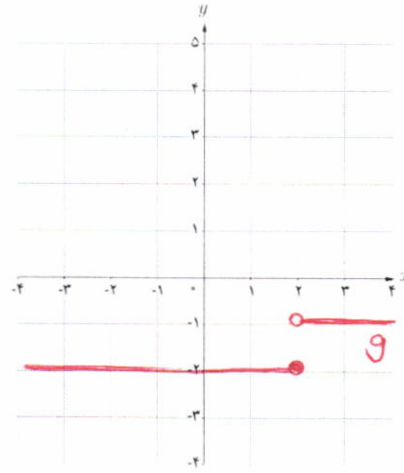
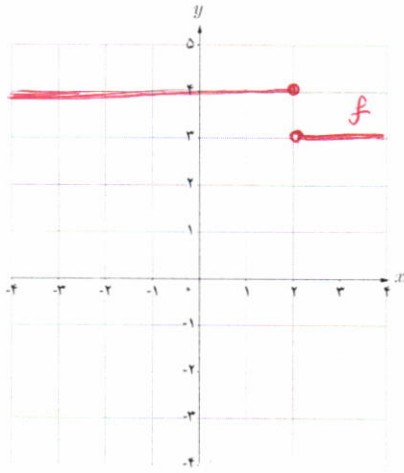
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 3 = 6$$

دو تابع $f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

ب) نمودار توابع f ، g و $f+g$ را رسم کنید.

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$



پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=2$ وجود دارد؟ *خیر*

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=2$ وجود دارد؟ *بله*

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد

$f+g$ در $x=2$ استفاده کرد؟ چرا؟

خیر

شرط استناد از این قضیه این است که توابع

f و g در $x=a$ حد داشته باشند.

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ... ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده اند.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد، آیا می توان نتیجه گرفت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

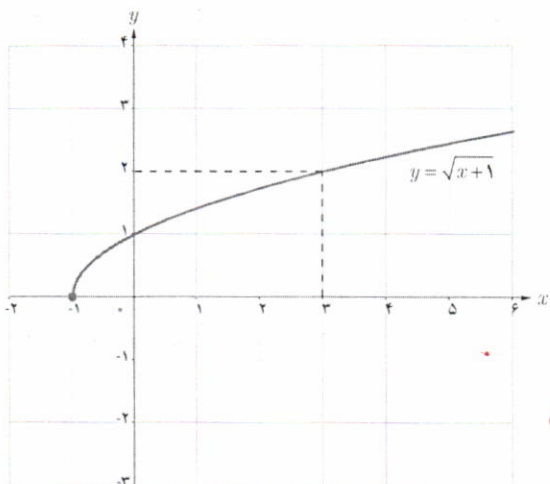
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 3 \\ 1 & x < 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ -1 & x < 3 \end{cases}$$

خبر؟ توابع زیر در $x=3$ حد ندارد ولی $f+g$ در این نقطه حد دارد.

ب) ثابت کنید اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشند، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ نیز وجود دارد.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

فعالیت



در شکل روبه رو نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$$

ب) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$ برقرار است؟

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$$

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن گاه داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

به طور کلی، برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن گاه داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

مثال :

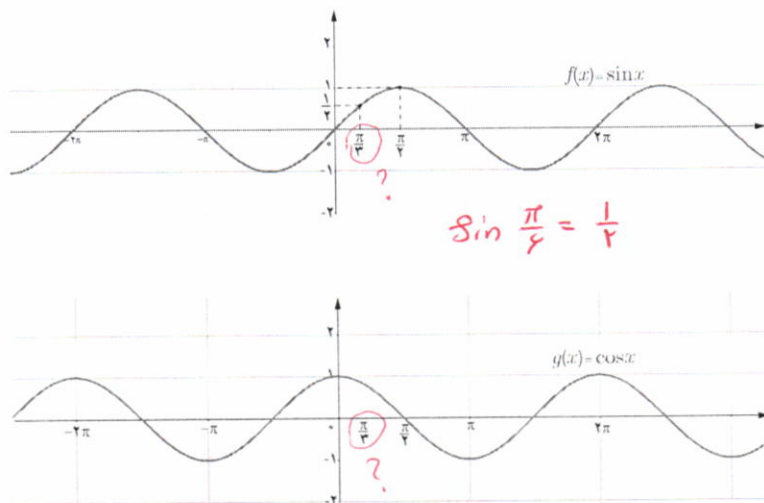
۱) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (برای n های زوج a باید مثبت باشد)

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}}{3x-4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x-4)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x-4)} = \frac{\sqrt{2(1)-1}}{3(1)-4} = -1$

حد توابع مثلثاتی

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در زیر رسم شده‌اند.



الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$

۲) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$

۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x) = \sin x$ در $\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟ **بله**

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

پ) آیا مقدار حد تابع $g(x) = \cos x$ در $\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟ **بله**

قضیه: برای هر عدد حقیقی a ,

$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ و $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

♣ مثال:

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \cos^2 x - \sin x) = 2 \cos^2(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{1}{2} = 2/5$

$$\pi \cos \pi = \pi \times (-1)$$

مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \pi \cos x}{\lim_{x \rightarrow -\pi} x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

❖ تذکر : همه قضایا و فعالیت‌های بیان شده دربارهٔ حد (دوطرفه)، برای حد چپ و حد راست نیز برقرارند. به عنوان مثال، اگر حد چپ توابع f و g در a موجود باشند، آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$$

❖ مثال :

$$۱) \lim_{x \rightarrow a^+} x^n = \lim_{x \rightarrow a^+} \overbrace{(x \times \dots \times x)}^{n \text{ بار}} = (\lim_{x \rightarrow a^+} x) \times \dots \times (\lim_{x \rightarrow a^+} x) = a \times \dots \times a = a^n$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [x]}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x])}{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} x - \lim_{x \rightarrow 1^-} [x]}{\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} 2} = \frac{1 - 0}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x - \sin x) = \cos(0) - \sin(0) = 1$$

مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2}$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]+2} = \frac{0}{2+2} = 0$$

$$پ) = \frac{(-\frac{5}{3} + \pi)(3(-\frac{5}{3}) + 5)}{(3(-\frac{5}{3}) + 6)((-\frac{5}{3})^3 + 1)} = 0$$

فصل پنجم: حد و پیوستگی ۱۳۹

$$ت) = \frac{1 - (\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2 - 4} = \frac{1 - x}{x - 4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیاید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = (\sqrt{9} - 9)^3 = -216$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} (-6x^5 - 4x^2 + 5) = -6(-1)^5 - 4(-1) + 5 = 15$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^3 + 1)}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4})^2 + 6(\frac{1}{4})} = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{\sin 0}{0 + \cos 0} = \frac{0}{0 + 1} = 0$ ح) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{|\cos \frac{\pi}{4}|}{\frac{\pi}{4} - \pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{4}}$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟



به تابع زیر توجه کنید که شرایط داده شده را دارد ولی ثابت نیست.

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)} = 4 \rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{3} = 4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12$$

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0$$

عکس $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0$$

$$\xrightarrow{+L} \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L + L = 0 + L$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



$\lim_{x \rightarrow 1} 3x+2 = 5$ / $\lim_{x \rightarrow 1} x^2-1 = 0$ / $\lim_{x \rightarrow 1} [x]-1 = 0$ و مورد ندارد / $y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ تابع
 در $x=1$ مورد ندارد / $\lim_{x \rightarrow 1} 3x+2 = 5 \neq 0$ / $\lim_{x \rightarrow 1} x^2-1 = 0$ / $\lim_{x \rightarrow 1} [x]-1 = 0$ و مورد ندارد / $y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ تابع
 ۱۴۰

$y = 3x+2$, $y = x^2-1$, $y = [x]-1$ $y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.
 ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$f(x)+g(x) = \dots$	$g(x) = x^2-1$	$f(x) = 3x+2$	هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.
$f(x)g(x) = \dots$	$g(x) = x^2-1$	$f(x) = [x]-1$	تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+2}{[x]-1}$	$g(x) = [x]-1$	$f(x) = 3x+2$	توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f'(x) = 3$		$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$	تابع f' در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{3x+2}$		$f(x) = x^2-1$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع \sqrt{f} در ۱ حد ندارد.

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می توان گفت؟ مورد ندارد.

این تابع به روش پاره‌ها خلف گرفته که تابع $f+g$ حد دارد. لذا؟

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-1$ حد داشته باشد:

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)+g(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
 مورد دارد / مورد دارد

$= \lim_{x \rightarrow a} (f(x)+g(x) - f(x))$

$= \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ *مورد ندارد*
 پس وقتی خلف باقی بماند در $x=a$ حد ندارد.

$f(x) = \begin{cases} x^2 + [x] & x < -1 \\ |x| & x > -1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -2 + b$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-2}{-x} = \frac{1-2}{1} = -1$

$-2 + b = -1$
 $\rightarrow b = 2$

$\lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x)) = 2(2) - 0 = 4$

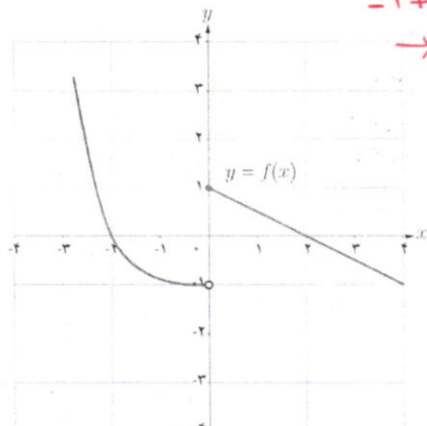
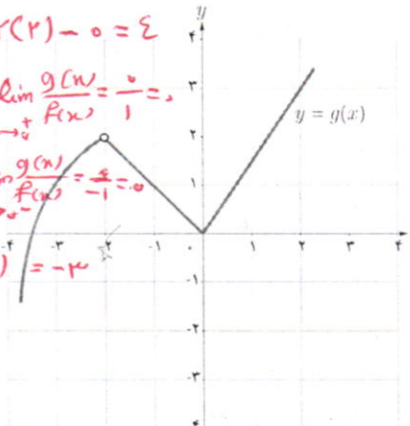
$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{f(x)} = \dots$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{-1} = -1$

$\lim_{x \rightarrow -2} -2\sqrt{g(x)} = -2(1) = -2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\Lambda g(x)}$

$= \sqrt[3]{\Lambda(2)} = 2\sqrt[3]{2}$



محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ می پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a ، هر دو برابر صفر است. در این گونه موارد، نمی توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می کنیم با تجزیه صورت و مخرج کسر به عامل های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحاد های جبری و مثلثاتی استفاده می کنیم.

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ را بیابید.

❖ حل: با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ ، پس نمی توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در

واقع از $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$ عبارت $\frac{0}{0}$ حاصل می شود. در این گونه موارد، سعی می کنیم کسر را ساده کرده و

سپس حد را محاسبه نماییم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

کاردرکلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$$

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله ای های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به صورت $x+b$ یا $2x+b$ خواهند

بود.

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ را بیابید.

❖ حل: حد صورت و مخرج کسر در $x=1$ ، برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+8}-3$ وجود دارد. در این گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+8}+3$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - (3)^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

کاردر کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{3x-5}-2} \times \frac{\sqrt{3x-5}+2}{\sqrt{3x-5}+2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3x-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3(x-3)} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3} \quad \text{مثال: } \clubsuit \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos x}{x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} ۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{(\cos x - \sin x)}}{\cancel{(\cos x - \sin x)}(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

توجه:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را بیابید.

❖ حل: قرار می‌دهیم: $t = \sqrt{1+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x = t^2 - 1$ و بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد مورد نظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$ را بیابید.

❖ حل: قرار می‌دهیم: $t = x - \frac{\pi}{2}$. پس اگر x به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شود، t به صفر نزدیک می‌شود و داریم $x = t + \frac{\pi}{2}$.

پس،

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t+\frac{\pi}{2})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{-\sin t} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = -2 \times 1 = -2$$

مقدار حد زیر را بیابید.

$$x - \frac{\pi}{2} = t \rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = 2t \rightarrow 2x = 2t + \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \varepsilon x - \pi = \varepsilon t$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x - 1}{2x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{\varepsilon t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{\varepsilon t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{\varepsilon t} \times \frac{\cos 2t + 1}{\cos 2t + 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \times \frac{\sin 2t}{\cos 2t + 1} \times \frac{-1}{2} = 1 \times \frac{\sin(0)}{\cos(0) + 1} \times \frac{-1}{2} = 0$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{2x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{2x(x+1)}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 8$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{16}$

ن) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{2x+1}} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{2x+1}}{2 + \sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+\sqrt{x})(2+\sqrt{2x+1})}{(2-x)(2+\sqrt{x})(2+\sqrt{2x+1})} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \text{بالا}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$

۲ اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x^2 - x - 1}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{|1 - \cos x|}$

ن) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos^2 x)}{x \sin x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi}$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{6x - 2\pi}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2\sqrt{x+1}}{x-1}$

$x < 0 \rightarrow 0 < \cos x < 1$
 $-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \rightarrow -1 < -\cos x < 0 \rightarrow 0 < 1 - \cos x < 1 \rightarrow |1 - \cos x| = 1 - \cos x$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x} \times (1 + \cos x)$

$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\sin^2 x} (1 + \cos x) = 1 \times (1+1) = 2$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t - \pi) + 1}{t} \times \frac{\cos(t - \pi) - 1}{\cos(t - \pi) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2(t - \pi) - 1}{t} \times \frac{1}{\cos(t - \pi) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 t}{t} \times \frac{1}{\cos(t - \pi)}$
 $= 0$

حل كارد ركلاس صفحه ی ۱۴۴ (حسابان ۱)

تمرین ۳:

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x+\pi=t} \frac{\cos(t-\pi) + 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t \cos \pi + \sin t \sin \pi + 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\cos t \cos \pi}^{-\cos t} + \overbrace{\sin t \sin \pi + 1}^0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \frac{\sin t}{1 + \cos t} = 1 \times \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x-a=t} \frac{\sin(t+a) - \sin a}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \sin a$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} \times \sin a$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} \times \sin a$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \cos a - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \frac{\sin t}{1 + \cos t} \times \sin a$$

$$= 1 \times \cos a - 1 \times \frac{0}{1+1} \times \sin a = \cos a$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6(x - \frac{\pi}{3})} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x - \frac{\pi}{3} = t} \frac{1}{6} \times \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1 - 3\sqrt{x}}{x - 1} \times \frac{2x + 1 + 3\sqrt{x}}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 1)^2 - (3\sqrt{x})^2}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

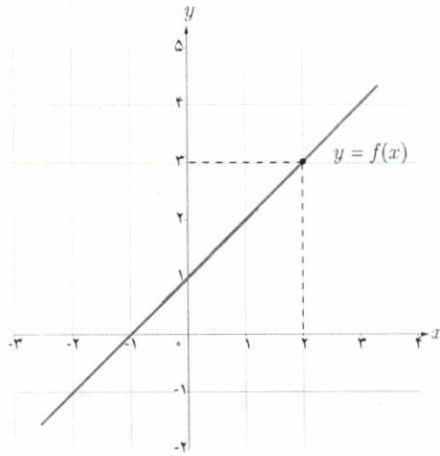
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 4x + 1 - 9x}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}}$$

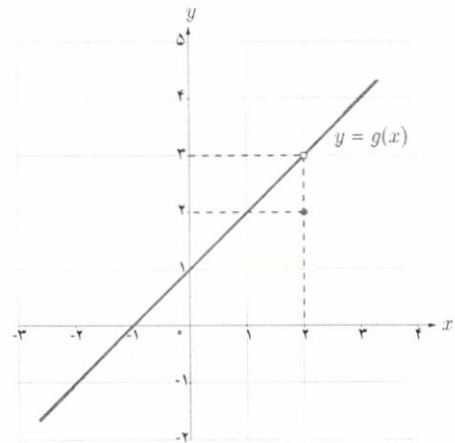
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(4x - 1)}{x - 1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{1} \times \frac{1}{2x + 1 + 3\sqrt{x}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

122,2

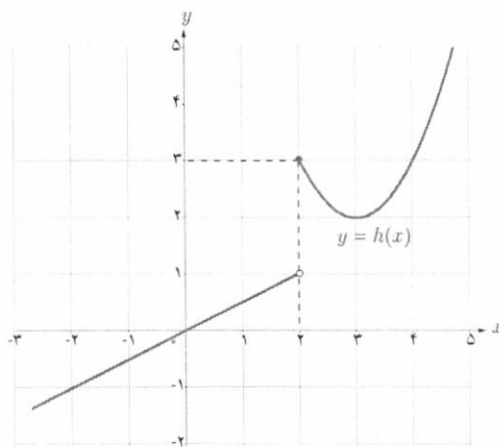
الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



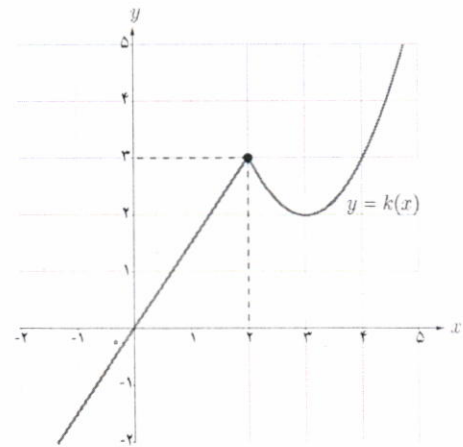
$$f(2) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$



$$g(2) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$



$$h(2) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \text{وجود ندارد}$$



$$k(2) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 3$$

f, k

f, k

ب) برای کدام یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟
پ) در نمودار کدام یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟

همان طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید نمودار تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه $x=2$ پیوسته است».

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a ، باید شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

(ب) حد تابع f در a موجود باشد.

(پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

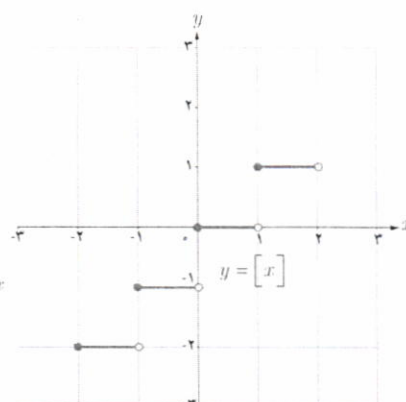
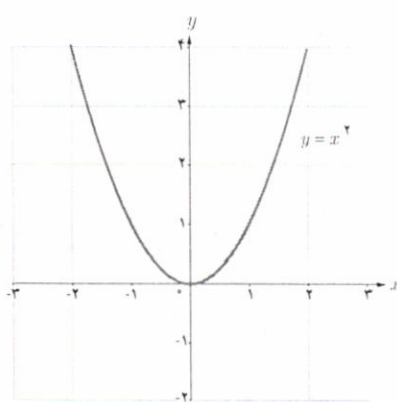
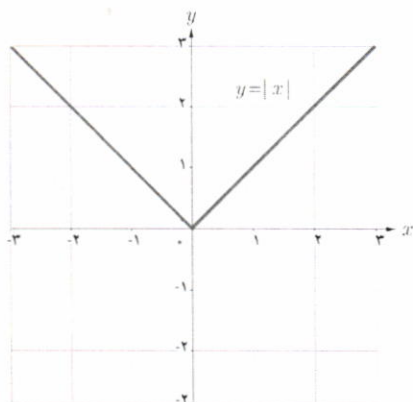
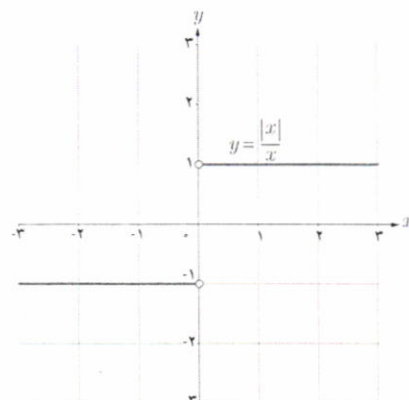
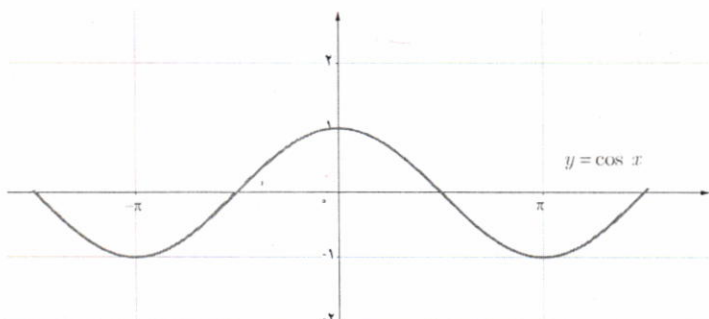
هنگامی که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست، گوییم f در $x=a$ ناپیوسته است.

مثال: در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a ، $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ و $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. پس توابع $y = \sin x$ و $y = \sqrt{x}$ در

هر عدد a ، پیوسته‌اند.

همچنین توابع $y = \cos x$ ، $y = |x|$ و $y = x^2$ و نیز چند جمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y = [x]$ و $y = \frac{|x|}{x}$

این چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.



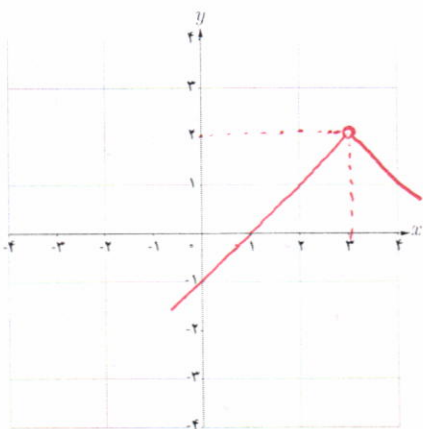
♣ مثال: توابع $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ داده شده‌اند. درباره پیوستگی f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

♣ حل: از آنجایی که f در ۳ تعریف نشده است، پس تابع f در ۳ پیوسته نیست. در مورد تابع g داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6 = g(3)$$

پس تابع g در ۳ پیوسته است.

کارد کلاس



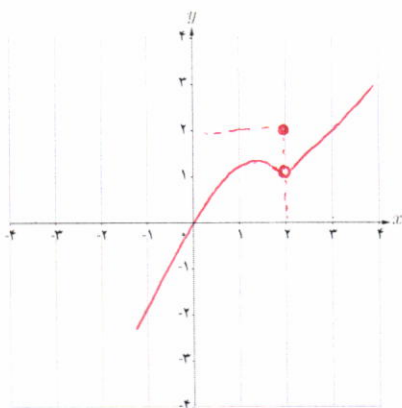
(۱)

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=3$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=3$ پیوسته نیست)

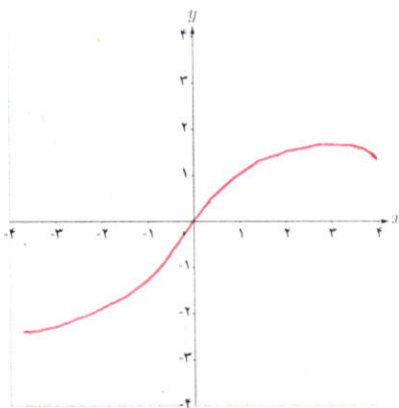
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

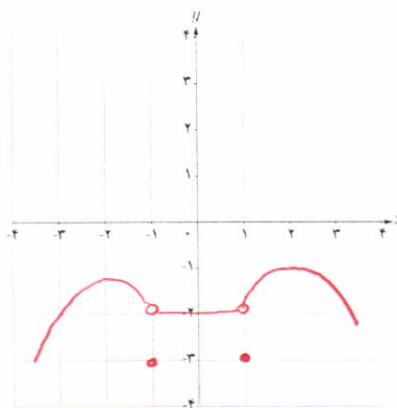
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به جز در دو نقطه.



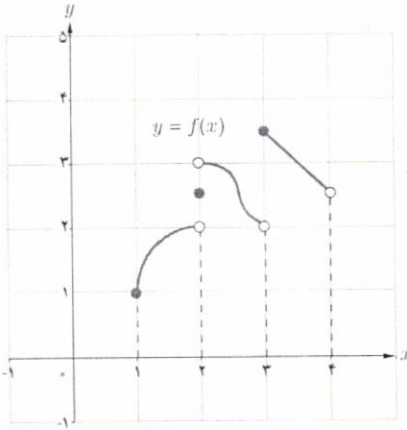
(۲)



(۳)



(۴)



نمودار تابع f به صورت روبه‌رو رسم شده است.
 الف) تابع f در کدام یک از نقاط مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ ناپیوسته است. ۲, ۳
 ب) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$ برقرار است؟ خیر
 پ) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ برقرار است؟ خیر
 ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ تساوی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟ ۱, ۳

تعریف

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه:

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد:

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

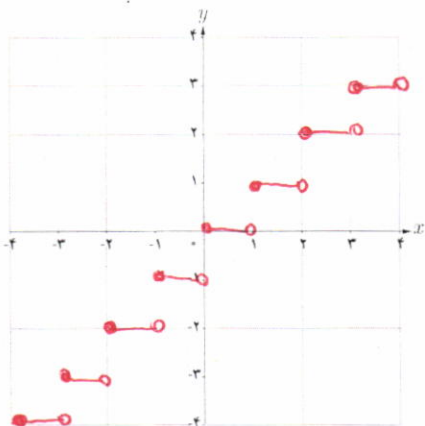
❖ مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2\cos x - \sin x & x > 0 \end{cases}$ داده شده است. پیوستگی تابع f در صفر را بررسی کنید.

❖ حل: داریم $f(0) = 2$. همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + x) = 0 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\cos x - \sin x) = 2\cos(0) - \sin(0) = 2 = f(0)$$

بنابراین f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.



الف) بارسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام یک از نقاط مجموعه $\{0, \frac{1}{3}, 2\}$

۱) تابع f پیوسته است. $\frac{1}{3}$

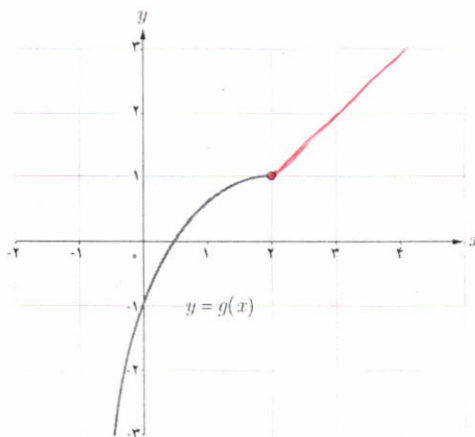
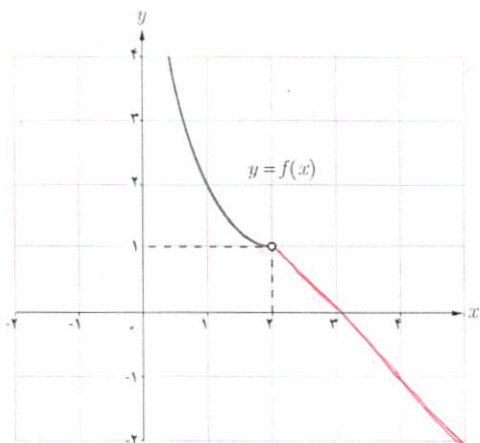
۲) تابع f پیوستگی راست دارد. $2, 0$

۳) تابع f پیوستگی چپ دارد. **هیچکدام**

ب) در شکل های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده اند. در نقطه $x=2$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

۱) تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲) تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.



تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازه باز (a, b) پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته گوئیم هرگاه تابع f در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته

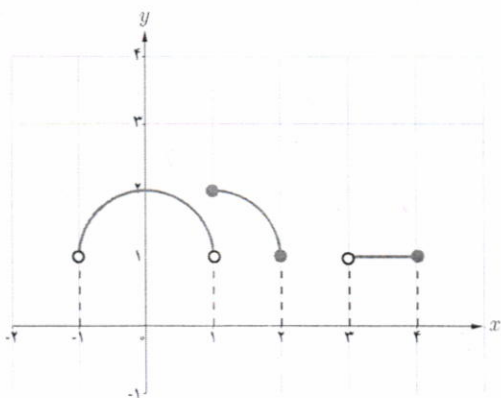
و در b از چپ پیوسته باشد.

پیوستگی روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به‌طور مشابه تعریف کنید.
 تابع f را در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a, b) پیوسته باشد و در a پیوستگی راست داشته باشد.
 تابع f را در بازه‌ی (a, b) پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a, b) پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال:

(۱) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بر بازه $[0, 2]$ پیوسته است.

(۲) تابع $f(x) = [x]$ بر بازه $(0, 1)$ پیوسته است، اما بر بازه بسته $[0, 1]$ پیوسته نیست.



در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟

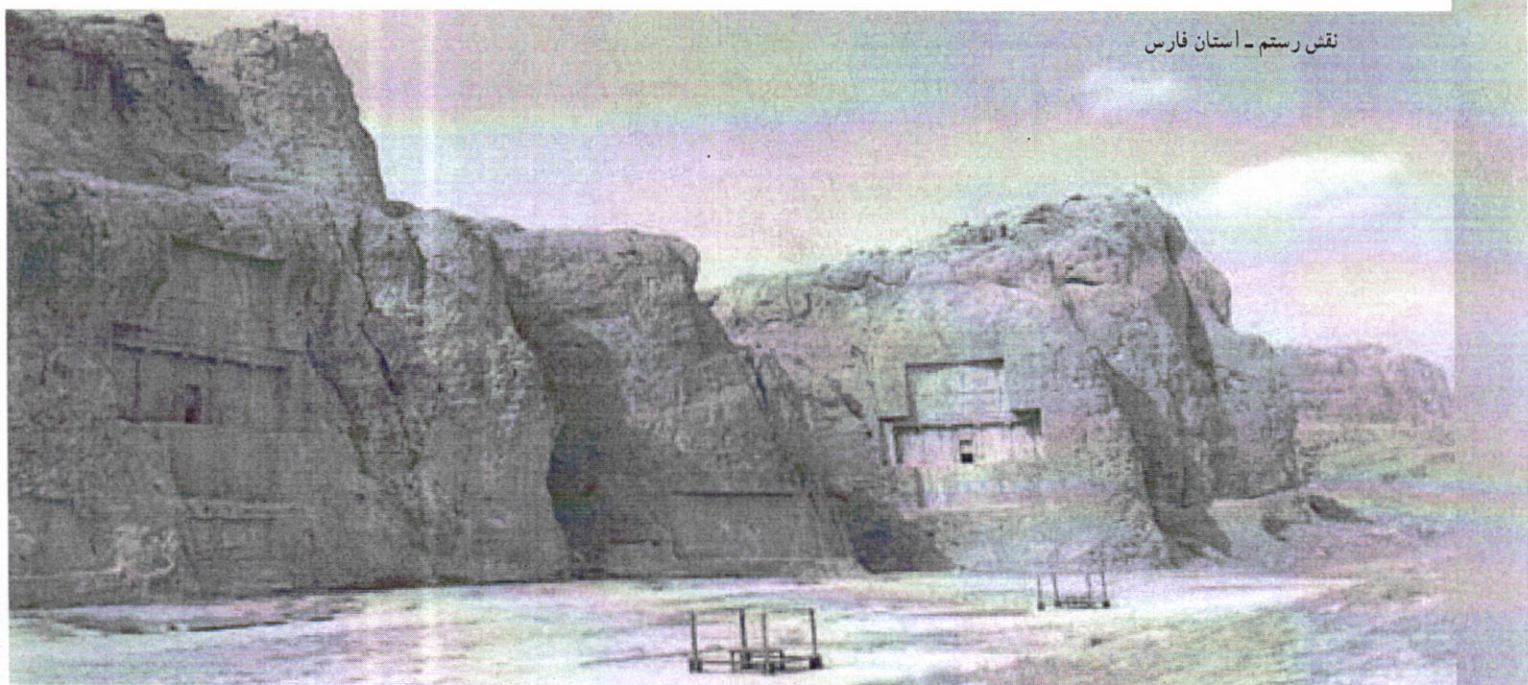
الف) تابع f بر بازه $[1, 2]$ پیوسته است. **درست**

ب) تابع f در هر نقطه از $[1, 2]$ پیوسته است. **نادرست**

پ) تابع f بر بازه $[3, 4]$ پیوسته است. **نادرست**

ت) تابع f بر بازه $[0, 2]$ پیوسته است. **نادرست**

نقش رستم - استان فارس



۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

$$y = x - [x] \quad (\text{ب})$$

$$y = |x - 1| + 2 \quad (\text{الف})$$

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ت})$$

$$y = [x] + [-x] \quad (\text{پ})$$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$k(x) = ([x] - a)[x] \quad (\text{ت})$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{x-1}{x-1} & \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.
ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.
پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپوسته باشد.

۵ تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

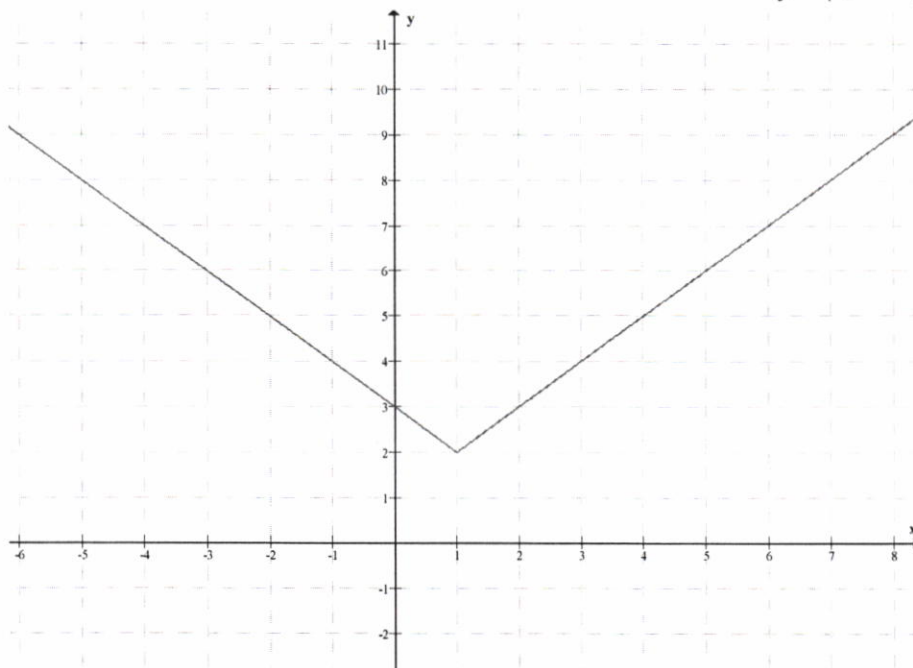
۶ بازه بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$$۷ \quad \text{مقدار } a \text{ و } b \text{ را چنان تعیین کنید که تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ x - 2a & x < 0 \end{cases} \text{ در } x=0 \text{ پیوسته باشد.}$$

حل کاردر کلاس صفحه ی ۱۵۱ (حسابان ۱)

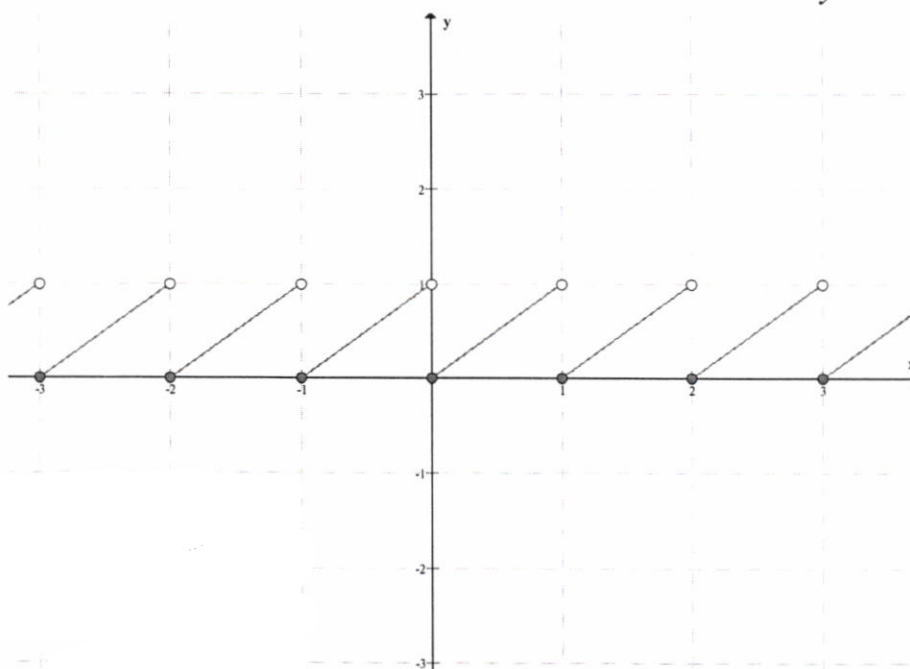
۱ :

$$y = |x - ۱| + ۲ \text{ (الف)}$$



تابع در تمام نقاط پیوسته است.

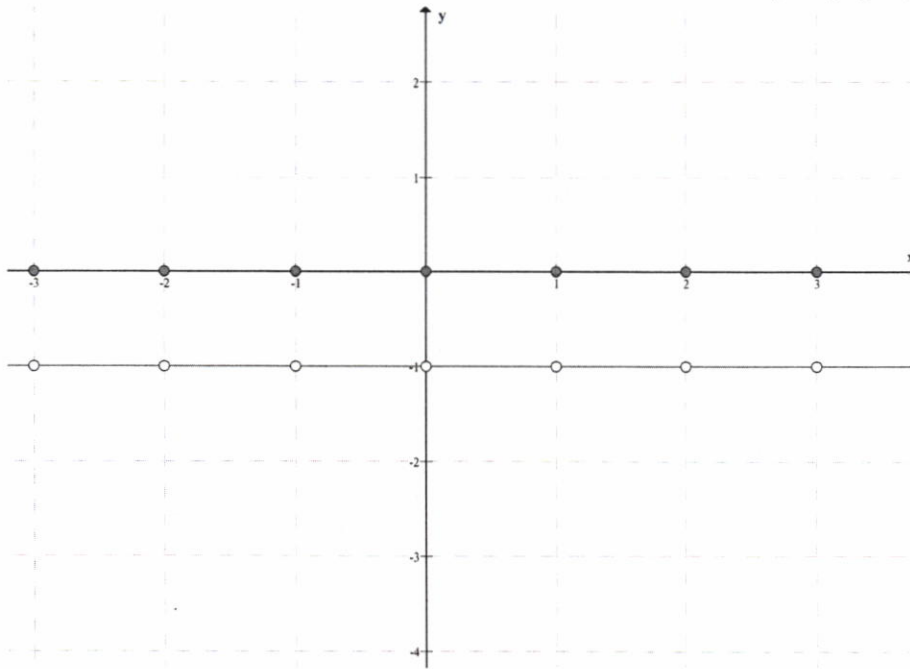
$$y = x - [x] \text{ (ب)}$$



تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد .

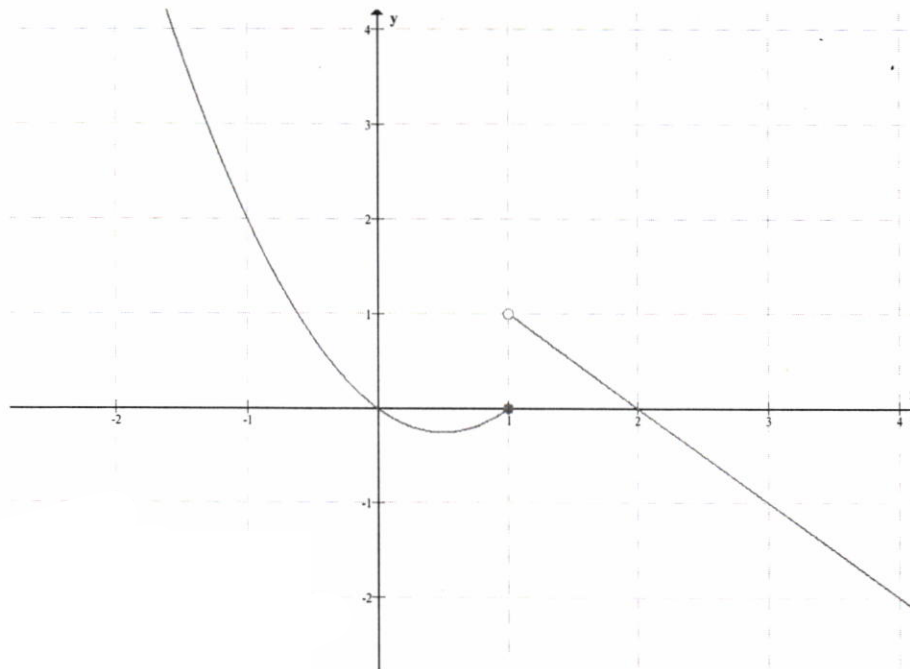
۱۵۱,۱

$$y = [x] + [-x] \quad (\text{پ})$$



تابع در نقاط با طول صحیح پیوسته نیست.

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases} \quad (\text{ت})$$



تابع در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

:٢
(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2(1) - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1) + 2 = 1$$

$$f(1) = a$$

$$\rightarrow a = 1$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

$$g(1) = a$$

$$\rightarrow a = 3$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$h(1) = 1 + a$$

$$\rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(د)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = (1 - a)(1) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = (0 - a)(0) = 0$$

$$k(1) = (1 - a)(1) = 1 - a$$

$$\rightarrow 1 - a = 0 \rightarrow a = 1$$

١, ٣

۳:
(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2(0) + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$f(0) = a$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی، صفر و یک برابر شوند و چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

(ب)

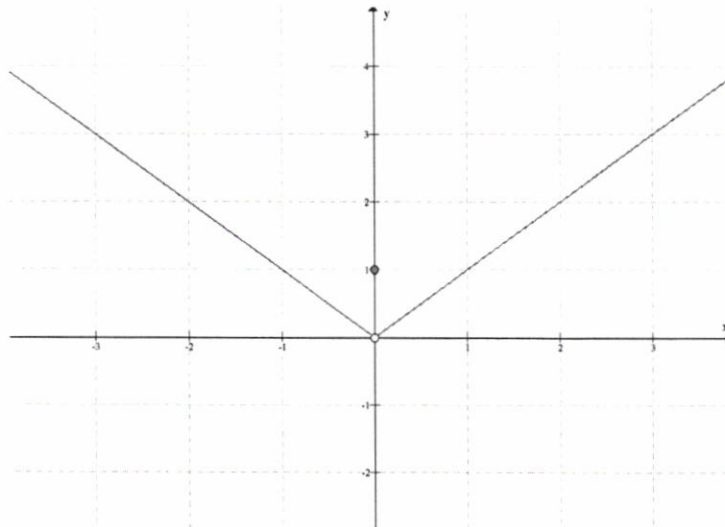
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

$$g(0) = 1$$

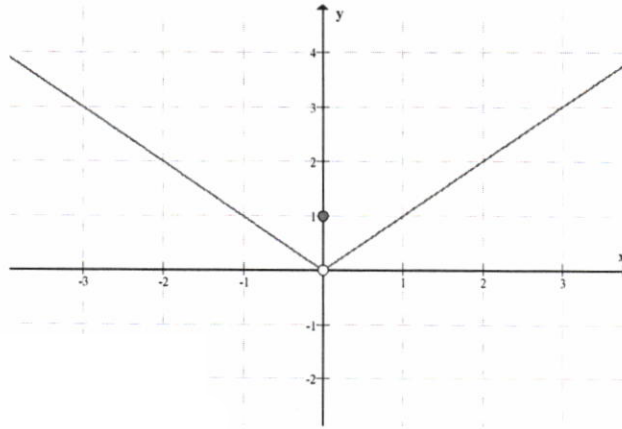
برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه y صفر برابر شوند. چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{(الف: ۴)}$$



۱۵۱، ۶

$$f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & x \leq 2 \\ 3 & 2 < x < 3 \\ x-2 & x \geq 3 \end{cases} \quad (\text{ب})$$



$$f(x) = \frac{1}{|x| - 2} \quad (\text{پ})$$

۵: باید $k < 3$ باشد.

۶:

$$3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

تابع در بازه‌ی $(-\infty, 3]$ پیوسته است.

۷:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2a) = -2a$$

$$f(0) = b - 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2a = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ b - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۵۱, د