جبر و احتمال سوم دبیرستان

رشته ریاضی فیزیک

پاسخ کامل مسائل کتاب درسی

مؤلف: محمد حسین مصلحی دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

riazisara.com

Email : info@riazisara.com phone : ۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

فهرست مطالب :

سخن آغازین

درود بر آنها که در مقابل ظلم سکوت ذلت بار اختیار نکردند.

درود بر معلم که بزرگترین سرمایه هر جامعه در اختیار اوست.

درود بر دانش آموز، تنها امید بر آینده ای روشن.

این کتاب الکترونیکی پیشکشی است به حضور فرزندان ایران زمین.

اما چرا حل المسائل ؟

۱- استفاده برخی دانش آموزان از حل المسائل واقعیتی غیر قابل انکار است.

۲- باید دانش آموز را آگاه کرد که استفاده از حل المسائل آخرین راه است نه اولین کار .

۳- نویسندگان حل المسائل ها گاهی از روشهای میانبر و تستی برای حل مسائل استفاده کرده و معلم مزبور متهم به بد درس دادن و پیچیده کردن حل مساله می گردد ..
پاسخهای موجود در این کتاب مبتنی بر روش کتاب است.

۴- برخی دانش آموزان به دلایلی تمام کلاسها را حضور نداشته و جوابهای صحیح سوالات را در اختیار ندارند و یا دبیر فرصت حل تمام مسائل را پیدا نمی کند.

به دلایلی که برخی از آنها ذکر شد بر آن شدیم ، پاسخ مسائل کتاب درسی را در اختیار قرار دهیم.
تلاش بر این است در ویرایشهای بعدی مطالب و تمریناتی به این کتاب افزوده گردد.

مشتاقانه پذیرای نظرات و انتقادات شما هستیم.

محمد حسین مصلحی

د بیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

تابستان ۹۱

آدرس سایت www.riazisara.com

آدرس پست الکترونیکی info@riazisara.com

شماره همراه جهت تماس (sms) ۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

۱- الف)

$$p(۱)\ :\ ۱^۲=\frac{۱(۱+۱)(۲+۱)}{۶}\Rightarrow ۱=\frac{۲\times ۳}{۶}\Rightarrow ۱=۱\ \checkmark$$

فرض $p(k):۱^۲+۲^۲+۳^۲+.....+k^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$

حکم $p(k+۱):۱^۲+۲^۲+۳^۲.....+k^۲+(k+۱)^۲=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$

اثبات)

$$(۱^۲+۲^۲+۳^۲+.....+k^۲)+(k+۱)^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}+(k+۱)^۲=$$

$$\frac{(k+۱)}{۶}(۲k^۲+k+۶k+۶)=\frac{(k+۱)(۲k^۲+۷k+۶)}{۶}=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$$

ب)

$$p(۱):۲=۲(۱)^۲\Rightarrow ۲=۲\ \checkmark$$

فرض $p(k):۲+۶+۱۰+......+(۴k-۲)=۲k^۲$

حکم $p(k+۱):۲+۶+۱۰+.....+(۴k-۲)+(۴k+۲)=۲(k+۱)^۲$

اثبات) $(۲+۶+۱۰+.....+(۴k-۲))+(۴k+۲)=۲k^۲+۴k+۲=۲(k^۲+۲k+۱)=۲(k+۱)^۲$

پ)

$$p(۱):۱=۱^۲\Rightarrow ۱=۱\ \checkmark$$

فرض $p(k):۱+۳+۵+.....+(۲k-۱)=k^۲$

حکم $p(k+۱):\ ۱+۳+۵+.....+(۲k-۱)+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$

اثبات) $(۱+۳+۵+.....+(۲k-۱))+(۲k+۱)=k^۲+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$

ت)

$$p(۱):۱<\frac{۱}{۸}(۲+۱)^۲\Rightarrow ۱<\frac{۹}{۸}\ \checkmark$$

فرض $p(k):۱+۲+۳+.....+k<\frac{۱}{۸}(۲k+۱)^۲$

حکم $p(k+۱):\ ۱+۲+۳+.....+k+(k+۱)<\frac{۱}{۸}(۲k+۳)^۲$

اثبات) $p(k) \Rightarrow ۱+۲+۳+.....+k+(k+۱) < \frac{۱}{۸}(۲k+۱)^۲+(k+۱)$,

حال باید ثابت کرد ، $\frac{۱}{۸}(۲k+۱)^۲+k+۱ \le \frac{۱}{۸}(۲k+۳)^۲$

$$(۲k+۱)^۲+۸(k+۱) \le (۲k+۳)^۲ \Rightarrow ۴k^۲+۴k+۱+۸k+۸ \le ۴k^۲+۱۲k+۹ \Rightarrow ۹ \le ۹$$

که عبارتی همواره صحیح است.

ث) $p(۱): ۱\times۲ = \frac{۱(۱+۱)(۱+۲)}{۳} \Rightarrow ۲ = \frac{۲\times۳}{۳} \Rightarrow ۲=۲$ ✓

فرض $p(k): ۱\times۲+۲\times۳+.....+k(k+۱) = \frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}$,

حکم $p(k+۱): ۱\times۲+۲\times۳.....+k(k+۱)+(k+۱)(k+۲) = \frac{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}{۳}$

اثبات)

$$(۱\times۲+۲\times۳+.....+k(k+۱))+(k+۱)(k+۲) = \frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}+(k+۱)(k+۲) =$$

$$(k+۱)(k+۲)(\frac{k}{۳}+۱) = \frac{(k+۱)(k+۲)(k+۳)}{۳}$$

---

۲ - $p(۱): ۱+r = \frac{۱-r^۲}{۱-r} = \frac{(۱+r)(۱-r)}{۱-r} = ۱+r \quad , \quad (r \ne ۱)$ ✓

فرض $p(k): ۱+r+r^۲+.....+r^k = \frac{۱-r^{k+۱}}{۱-r}$,

حکم $p(k+۱): ۱+r+r^۲+.....+r^k+r^{k+۱} = \frac{۱-r^{k+۲}}{۱-r}$

اثبات)

$$(۱+r+r^۲+....+r^k)+r^{k+۱} = \frac{۱-r^{k+۱}}{۱-r}+r^{k+۱}$$

$$= \frac{۱-r^{k+۱}+r^{k+۱}-r^{k+۲}}{۱-r} = \frac{۱-r^{k+۲}}{۱-r}$$

۳- الف) $۲^۱ \rangle ۱^۲ \times , ۲^۲ \rangle ۲^۲ \times , ۲^۳ \rangle ۳^۲ \times , ۲^۴ \rangle ۴^۲ \times , ۲^۵ \rangle ۵^۲ , ۲^۶ > ۶^۲ \Rightarrow m = ۵$

$\checkmark\ p(۵): ۲^۵ \rangle ۵^۲ \Rightarrow ۳۲ \rangle ۲۵ \quad , \quad p(k): ۲^k \rangle k^۲ \quad , p(k+۱): ۲^{k+۱} \rangle (k+۱)^۲$

اثبات) $۲^k \rangle k^۲ \Rightarrow ۲\times ۲^k = ۲^{k+۱} \rangle ۲k^۲ \Rightarrow \quad ۲k^۲ \geq (k+۱)^۲$

کافی است ثابت کنیم $۲k^۲ \geq (k+۱)^۲$

$۲k^۲ \geq k^۲ + ۲k + ۱ \Rightarrow k^۲ - ۲k - ۱ \geq ۰ \Rightarrow k \geq ۱ + \sqrt{۲} \ \ or \ \ k \leq ۱ - \sqrt{۲}$

چون $k \geq ۵$ بنابراین شرط اول همواره برقرار است $k \geq ۵ > ۱ + \sqrt{۲}$

ب) $۲^۱ < ۱! \times \quad , \ ۲^۲ < ۲! \times , \ ۲^۳ < ۳! \times \ , \ ۲^۴ < ۴! \ , ۲^۵ < ۵! \Rightarrow m = ۴$

$p(۴): ۲^۴ \langle ۴! \Rightarrow ۱۶ < ۲۴ \ \checkmark \quad \Rightarrow n \geq ۴$

فرض $p(k): ۲^k \langle k!$

حکم $p(k+۱): ۲^{k+۱} \langle (k+۱)!$

اثبات) $۲^k < k! \Rightarrow ۲\times ۲^k < ۲\times k! \Rightarrow ۲^{k+۱} < ۲k!$　　کافیست ثابت کنیم $۲k! < (k+۱)!$ یعنی

$۲k! < (k+۱)k! \Rightarrow ۲ < k+۱ \Rightarrow k > ۱$　　که چون $k \geq ۴$ همواره صحیح است

پ) $۱ < \frac{۱}{۲} \times \quad , ۱ + \frac{۱}{۳} < \frac{۲}{۲} \times , ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} < \frac{۳}{۲} , ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۱۵} < \frac{۴}{۲} \Rightarrow m = ۳ \checkmark$

فرض $p(k): ۱ + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{۲^k - ۱} \langle \frac{k}{۲}$

حکم $p(k+۱): ۱ + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{۲^k - ۱} + \frac{۱}{۲^{k+۱} - ۱} \langle \frac{k+۱}{۲}$

اثبات) $p(k) :\Rightarrow ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} + ... + \frac{۱}{۲^k - ۱} + \frac{۱}{۲^{k+۱} - ۱} \langle \frac{k}{۲} + \frac{۱}{۲^{k+۱} - ۱}$

کافی است ثابت کنیم $\frac{k}{۲} + \frac{۱}{۲^{k+۱} - ۱} \leq \frac{k+۱}{۲}$.

$$\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}\le\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow 2^{k+1}-1\ge 2\Rightarrow 2^{k+1}\ge 3$$ که چون $k\ge 3$ صحیح است.

---

۴ -

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$p(1):\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1+1}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \checkmark$$

فرض $p(k):\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+.....+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$

حکم $p(k+1):\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+.....+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{k+2}$

اثبات)

$$\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

۵- الف)

$P(3):$ تعداد قطرهای مثلث $=\dfrac{3(3-3)}{2}=0\ \checkmark$

فرض $P(k):$ تعداد قطرهای k ضلعی $=\dfrac{k(k-3)}{2}$

حکم $P(k+1):$ تعداد قطرهای $k+1$ ضلعی $=\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$

اثبات) با اضافه کردن یک ضلع به k ضلعی تعداد قطر های آن $k-1$ واحد افزوده می شود پس

تعداد قطرهای $k+1$ ضلعی = تعداد قطرهای k ضلعی $+k-1=\dfrac{k(k-3)}{2}+k-1$

$$=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k-2)(k+1)}{2}$$

ب) $P(3)$: مجموع زوایای داخلی مثلث $=(2(3)-4)\times 90=2\times 90=180$ ✓

فرض $P(k)$: مجموع زوایای k ضلعی $=(2k-4)\times 90$

حکم $P(k+1)$: مجموع زوایای $k+1$ ضلعی $=(2(k+1)-4)\times 90=(2k-2)\times 90$

با اضافه کردن یک ضلع به k ضلعی به مجموع زوایای آن به اندازه یک مثلث یعنی 2×90 اضافه می شود

مجموع زوایای $k+1$ ضلعی $=(2k-4)\times 90+2\times 90=(2k-4+2)\times 90=(2k-2)\times 90$

۶- $P(1): 8^1-1=8-1=7(1)$ ✓

فرض $P(k):\ 8^k-1=7m$

حکم $P(k+1):\ 8^{k+1}-1=7m'$

اثبات) $8^k-1=7m \Rightarrow 8^k=7m+1\ ,\ 8^{k+1}-1=8^k(8)-1=(7m+1)8-1=56m+8-1$
$=56m+7=7(8m+1)=7m'$

۷- $P(1):(1+a)^1\geq 1+1(a) \Rightarrow 1+a\geq 1+a$ ✓

فرض $P(k):(1+a)^k\geq 1+ka$

حکم $P(k+1):(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a$

اثبات) $(1+a)^k\geq 1+ka \Rightarrow (1+a)^{k+1}\geq (1+a)(1+ka)$

کافیست ثابت کنیم $((1+a)(1+ka)\geq 1+(k+1)a$.

که همواره صحیح است. $1+ka+a+ka^2\geq 1+ka+a \Rightarrow ka^2\geq 0 \Rightarrow \left(a^2\geq 0\ ,\ k\in N\right)$

۸- $P(1):|x_1|\leq|x_1|$ ✓

فرض $P(k):|x_1+x_2+\dots+x_k|\leq|x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|$

حکم $P(k+1):|x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}|\leq|x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|+|x_{k+1}|$

اثبات) $|x_1+x_2+\dots+x_{k+1}|=|(x_1+x_2+\dots+x_k)+x_{k+1}|\leq|x_1+x_2+\dots+x_k|+|x_{k+1}|$
$\leq|x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|+|x_{k+1}|$

۱- الف) زمین مرطوب است　　ب) l_1 و l_2 همدیگر را قطع نمی کنند

۲- الف) صحیح: به علت کلمه «تمام»　　ب) غلط: کلمه «بعضی»　　پ) صحیح

۳- $x = ۲k \ , \ y = ۲k' \Rightarrow x + y = ۲k + ۲k' = ۲(k + k') = ۲k'' \Rightarrow$ زوج: $x + y$

٤- ابراهیم ـ احمد ـ علی ـ داوود ـ کامران

۵- الف) صحیح　　ب) غلط $\frac{۱}{۲} < \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$　　پ) صحیح

ت) غلط، مثلث با زاویه منفرجه　　ث) غلط $\boxed{}$　　ج) صحیح

٦- $۷ = ۲^۲ + ۱^۲ + ?^۲$ ، عدد ۷ را نمی توان به صورت مجموع مربعات سه عدد طبیعی نوشت.

۷- الف) غلط　　$\sqrt{۲} \in Q^c \ , \ ۰ \in Q \ , \ \sqrt{۲} + ۰ = \sqrt{۲} \notin Q$

ب) صحیح　　$x , y \in Q \Rightarrow x + y = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'} \in Q$

۸- الف) صحیح　　$xy \le \frac{x^۲ + y^۲}{۲} \Leftrightarrow ۲xy \le x^۲ + y^۲ \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \ge ۰ \Leftrightarrow (x - y)^۲ \ge ۰$

ب) غلط $۰^۲ = ۰$.　　پ) غلط مانند زوایای مساوی در مثلث متساوی الساقین

ت) غلط مانند $۱/۵ > ۱$ ولی $۱/۵ > ۲$ نیست.

ث) صحیح　　$x > ۲, ۲ > ۱ \Rightarrow x > ۲ > ۱ \Rightarrow x > ۱$

ج) صحیح　　$(x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

چ) صحیح　　$ab = ۰, a \ne ۰ \Rightarrow \frac{ab}{a} = \frac{۰}{a} \Rightarrow b = \frac{۰}{a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$

۱- خلف) اگر n فرد نباشد بنابراین زوج است $n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2\left(2k^2\right)=2k' \Rightarrow$ زوج n^2

که با زوج بودن n^2 خلاف فرض است .

۲- خلف) اگر n مضرب ۳ نباشد پس

$$n=3k\pm 1 \Rightarrow n^2=(3k\pm 1)^2=9k^2\pm 6k+1$$
$$\Rightarrow n^2=3\left(3k^2\pm 2k\right)+1 \Rightarrow n=3k'+1 \Rightarrow$$

یعنی n^2 مضرب ۳ نیست که خلاف فرض است .

۳- خلف) اگر n مضرب ۱۰ نباشد پس

$$n=10k\pm r \quad (1\le r\le 5) \Rightarrow n^2=100k^2\pm 20kr+r^2 \Rightarrow n^2=10k'+r^2$$

ولی r^2 اگر $1\le r\le 5$ هیچگاه مضرب ۱۰ نمی شود پس یعنی n^2 مضرب ۱۰ نیست که خلاف فرض است.

٤- اگر از یک نقطه دو خط عمود بر یک خط بتوان رسم کرد ، در اینصورت مثلثی با دو زاویه قائمه وجود دارد که غیر ممکن است.(تناقض با مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است)

٥- اگر $\sqrt{3}$ گویا باشد ،به صورت کسری می نویسیم که صورت ومخرج عامل مشترک نداشته باشند

$$\sqrt{3}=\frac{m}{n} \Rightarrow 3=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2=3n^2 \Rightarrow 3 \text{ مضرب } m^2 \Rightarrow 3 \text{ مضرب } m$$

$$m=3k \Rightarrow m^2=9k^2=3n^2 \Rightarrow n^2=3k^2 \Rightarrow 3 \text{ مضرب } n$$

که خلاف فرض آن است که m,n نسبت به هم اولند.

٦- اگر $d'' \parallel d$ نباشد پس d'',d همدیگر را قطع می کنند یعنی از محل قطع آنها دو خط موازی d' رسم شده است که خلاف فرض است (اصل توازی)

۷- اگر $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ گویا باشد ،

$$\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\in Q \Rightarrow \sqrt{۲}-\sqrt{۳}=\frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{۳}=\sqrt{۲}-\frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۳})^{۲}=(\sqrt{۲}-\frac{m}{n})^{۲} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۳=۲+\frac{m^{۲}}{n^{۲}}-\frac{۲m}{n}\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{m^{۲}}{n^{۲}}-۱=\frac{۲m}{n}\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{m^{۲}-n^{۲}}{n^{۲}}=\frac{۲m}{n}\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۲}=\frac{m^{۲}-n^{۲}}{۲mn}\in Q$$

یعنی $\sqrt{۲}$ گویا است که خلاف فرض گنگ بودن $\sqrt{۲}$ است.

۸- خلف) اگر $x+y$ گویا باشد پس چون x گویا ست ، بنا براین $y = x+y-x$ گویا است. یعنی y گویا ست که خلاف فرض است.

۹- خلف) اگر N اول نباشد وهمچنین تمام عامل های اول آن کوچکتریامساوی P باشد، $N = p_i \times k$

از طرفی p_i یکی از اعداد اول $۲,۳,۵,۷,....,P$ می باشد پس $N = p_i \times k'+۱$ بنابراین

$$N = p_i \times k'+۱ \Rightarrow p_i \times k = p_i \times k'+۱ \Rightarrow p_i(k-k')=۱$$

ولی معادله آخر جواب ندارد،

چون p_i عدد اول است و حاصل ضرب آن در عددی صحیح دیگر هیچ گاه ۱ نمی شود.

نکته) اگر حکم دو قسمتی بوده وبین قسمتها ترکیب (یا) باشد ،

نوعی از اثبات مستقیم وجود دارد که میتوان به کمک فرض و نقیض یکی از قسمتهای حکم ، قسمت دیگر حکم را اثبات کرد.

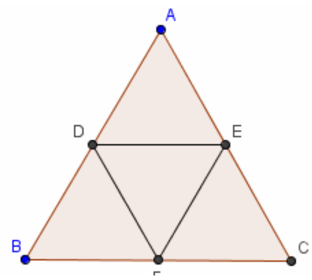
به عبارت ریاضی $P \Rightarrow (Q \vee R) \quad \equiv \quad (P \wedge \sim Q) \Rightarrow R \quad \equiv \quad (P \wedge \sim R) \Rightarrow Q$

۱- ۱۳ نفر نقش ۱۳ کبوتر و ۱۲ ماه نقش ۱۲ لانه را دارند. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می گیرند یعنی حداقل دو نفر در یک ماه سال متولد شده اند .

۲- مردم شهر کبوتر و تعدادممکن موها لانه اند و چون ۳۰۰۰۰۱ < ۳۰۰۰۰۲ طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نفر دارای تعداد موی مساوی اند.

۳- وسط های اضلاع را به هم وصل می کنیم تا چهار مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۲}$ حاصل شود .

۵ نقطه کبوترها ومثلثهای متساوی الاضلاع ۴ لانه اند
پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه
داخل یک مثلث اند که حد اکثر طول فاصله ی
آنها برابر بزرگترین ضلع مثلث یعنی $\frac{۱}{۲}$ است .



۴- مجموعه های $\{۵\}\{۴,۶\}\{۳,۷\}\{۲,۸\}\{۱,۹\}$، ۵ لانه و ۶ عدد انتخابی کبوترانند .بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ عدد داخل یک لانه اند ، که برای مجموعه $\{۵\}$ ممکن نیست وبرای سایرمجموعه ها مجموع اعداد آنها برابر ۱۰ است.

۵- برهان خلف : اگر تمام n لانه، کمتر از دو کبوتر داشته باشند پس هر یک حداکثر یک کبوتر دارند بنابراین $m \le n$ که خلاف فرض است (فرض $m > n$).

۱- الف) $\{x\in R \mid x>۰\}$ ب) $\{x\in z \mid x^{۲}\le ۲۵\}$ پ) $\{x\in R \mid -۲<x<۲\}$

۲- الف) $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ ب) $\{۰ , \pm۱ , \pm۲ , \pm۳ , \pm۴ , \pm۵\}$ پ) $C=\{\frac{۱}{۵},-\frac{۱}{۲}\}$

ت) $D=\{-۱\}$ ث) $E=\varnothing$

۳- الف) $A=\{n^{۲} \mid n\in N\}$ ب) $B=\{۲n \mid n\in N\}$

پ) $C=\{\frac{n-۱}{n} \mid n\in N\}$ ت) $D=\{x\in R \mid x^{۲}-۲x-۲=۰\}$

٤- جواب هر دو مجموعه $\{$ب ، ی ، ا ، ن$\}$ است .

۵- $\{a\}=\{c\}\Rightarrow a=c \quad , \quad \{a,b\}=\{c,d\}\Rightarrow b=d$

٦- الف) $A\subseteq\varnothing , \varnothing\subseteq A\Rightarrow A=\varnothing$

ب) $U\subseteq A, A\subseteq U\Rightarrow A=U$

۷- $\varnothing , \{۱\} , \{۰\} , \{-۱\} , \{۱,۰\} , \{۱,-۱\} , \{۰,-۱\} , \{۱,۰,-۱\}$

۸- $\varnothing , \{۳\} , \{\{۱,۴\}\} , \{۳,\{۱,۴\}\}$

۹- الف) غلط ب) صحیح پ) صحیح ث) صحیح

۱۰- $A=\{-۱,۰,۱\} \quad , \quad B=\{۰,۱,-۱\} \quad , \quad C=\{۰,۱,۲\} \quad , \quad D=\{-۱,۰,۱\} \quad , \quad E=\{۰,۱,۲\}$

$\Rightarrow A=B=D \quad , \quad C=E$

۱۱- $A=\{۲,۶\}\ ,\ B=\{۲,۴,۶\}\ ,\ C=\{۲,۴,۶,۸,....\}\ ,\ D=\{۶\}\ \Rightarrow D\subseteq A\subseteq B\subseteq C$

۱۲- الف) غلط　　ب) غلط　　پ) صحیح　　ت) صحیح　　ث) غلط

۱۳- پ) $A=\varnothing, B=\{\varnothing\}$　　ب) $C=\{A,B\}, B=\{A\}$　　الف) $B=\{A\}\quad C=\{B\}$

تذکر ۱ : سوال ۳ ت معادله را چنین ساختیم

$$\begin{cases} x=۱-\sqrt{۳}\Rightarrow x-(۱-\sqrt{۳})=۰ \\ \qquad\qquad \vee \\ x=۱+\sqrt{۳}\Rightarrow x-(۱+\sqrt{۳})=۰ \end{cases} \Rightarrow (x-۱+\sqrt{۳})(x-۱-\sqrt{۳})=۰\Rightarrow (x-۱)^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱-۳=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x-۲=۰$$

تذکر ۲ : در صورتی $a\in A$ که a دقیقا در مجموعه A مشاهده گردد.

در صورتی $B\subseteq A$ که تمام عضوهای داخل B در مجموعه A مشاهده گردند.

۱- $A\cup B=\{1,2,3,\{1,2\},\{1,2,3\}\}$, $A\cap B=\{1,2\}$, $A-B=\{3,\{1,2,3\}\}$, $B-A=\{\{1,2\}\}$

۲- الف) $A'=\{5,6,7,8,9\}$ ب) $A\cap C=\{3,4\}$, $(A\cap C)'=\{1,2,5,6,7,8,9\}$

پ) $B-C=\{2,8\}$ ت) $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}\Rightarrow (A\cup B)'=\{5,7,9\}$

۳-

$$A_1=\{m\in Z \mid -1\le m, 2^m\le 1\}=\{-1,0\}$$

$$A_2=\{m\in Z \mid -2\le m, 2^m\le 2\}=\{-2,-1,0,1\}$$

$$A_3=\{m\in Z \mid -3\le m, 2^m\le 3\}=\{-3,-2,-1,0,1\}$$

$$A_4=\{m\in Z \mid -4\le m, 2^m\le 4\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}\Rightarrow A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\ldots\subseteq A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{4}A_i=A_1\ ,\quad \bigcup_{i=1}^{4}A_i=A_4$$

۴- $$A_1=(-1,1)\ ,\ A_2=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})\ ,\ A_3=(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{3}A_i=(-1,\frac{5}{3})\ ,\ \bigcap_{i=1}^{3}A_i=(-\frac{1}{3},1)$$

۵- $$A_1=[-1,9], A_2=[-2,8], A_3=[-3,7],\ldots, A_{10}=[-10,0]\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{10}A_i=[-10,9],\ \bigcap_{i=1}^{10}A_i=[-1,0]$$

۶-

$A=\{$اعداد طبیعی کمتر از ۱۰ بخش پذیر بر ۲$\}=\{2,4,6,8\}\Rightarrow n(A)=4$

$B=\{$اعداد طبیعی کمتر از ۱۰ بخش پذیر بر ۳$\}=\{3,6,9\}\Rightarrow n(B)=3$

$A\cup B=\{$اعداد طبیعی کمتر از ۱۰ بخش پذیر بر ۲ یا ۳$\}=\{2,3,4,6,8,9\}\Rightarrow n(A\cup B)=6$

اما $n(A\cup B)\overset{?}{=}n(A)+n(B)\Rightarrow 6\neq 4+3$

۷- الف)

$$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$$

$$=((A\cap B')\cup(A\cap B))\cup(B-A)$$ ۱) خاصیت $A-B=A\cap B'$

$$=(A\cap(B\cup B'))\cup(B-A)$$ ۲) خاصیت پخشی اشتراک به اجتماع

$$=(A\cap M)\cup(B-A)$$ ۳) تعریف متمم $A\cup A'=M$

$$=A\cup(B\cap A')$$ ٤) خاصیت مرجع $A\cap M=A$

$$=(A\cup B)\cap(A\cup A')$$ ٥) خاصیت پخشی اجتماع به اشتراک

$$=(A\cup B)\cap M$$ ٦) مورد۳

$$=A\cup B$$ ۷) مورد٤

ب)

$$(A-B)\cap(B-A)$$

$$=(A\cap B')\cap(B\cap A')$$ ۱) خاصیت $A-B=A\cap B'$

$$=((A\cap B')\cap B)\cap A'$$ ۲) شرکت پزیری اشتراک

$$=(A\cap(B'\cap B))\cap A'$$ ۳)شرکت پزیری اشتراک

$$=(A\cap\varnothing)\cap A'$$ ٤) خاصیت متمم $A\cap A'=\varnothing$

$$=\varnothing\cap A'$$ ٥) $A\cap\varnothing=\varnothing$

$$=\varnothing$$ ٦) $A\cap\varnothing=\varnothing$

ج)

$$x\in A\cup B\Rightarrow\begin{cases}x\in A\xrightarrow{A\subseteq C}x\in C\\ \qquad\vee\\ x\in B\xrightarrow{B\subseteq C}x\in C\end{cases}\Rightarrow x\in C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$$

د)

$$\begin{cases}x\in A\,,\,A\subseteq C\Rightarrow x\in C\\ \qquad\wedge\\ x\in A\,,\,A\subseteq B\Rightarrow x\in B\end{cases}\Rightarrow x\in B\cap C\Rightarrow A\subseteq B\cap C$$

ه)
$$\begin{cases} A\subseteq A\bigcup B=A\bigcap B\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B \\ \wedge \\ B\subseteq A\bigcup B=A\bigcap B\subseteq A\Rightarrow B\subseteq A \end{cases}\Rightarrow A=B$$

و) چون $(A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B)$ پس

$$A\subset B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow (A\cup B)'=B'\Rightarrow A'\cap B'=B'\Rightarrow B'\subset A'$$

زیرا همچنین $(A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A)$

۸- الف)

$A\Delta B$

$=(A-B)\bigcup(B-A)$ تعریف $A\Delta B$

$=(B-A)\bigcup(A-B)$ خاصیت جابجائی اجتماع

$=B\Delta A$ تعریف $B\Delta A$

ب)

$A\Delta B$

$=(A-B)\bigcup(B-A)$ ۱)تعریف $A\Delta B$

$=(A\bigcap B')\bigcup(B\bigcap A')$ ۲) فرمول $A-B=A\bigcap B'$

$=((A\bigcap B')\bigcup B)\bigcap((A\bigcap B')\bigcup A')$ ۳) پخشی $\bigcup$ به $\bigcap$

$=((A\bigcup B)\bigcap(B'\bigcup B))\bigcap((A\bigcup A')\bigcap(B'\bigcup A'))$ ٤) مورد ۳

$=((A\bigcup B)\bigcap M)\bigcap(M\bigcap(B'\bigcup A'))$ ٥) رابطه $A\bigcup A'=M$

$=(A\bigcup B)\bigcap(A'\bigcup B')$ ٦) رابطه $A\bigcap M=A$

$=(A\bigcup B)-(A'\bigcup B')'$ ۷) رابطه طلائی $A-B=A\bigcap B'$

$=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$ ۸) قانون دمورگان

ج) $A\bigcap B=\varnothing \ , \ A\Delta B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(A\bigcup B)-\varnothing=A\bigcup B$

د) $(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)$

$=((A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C))-((A\bigcap B)\bigcap(A\bigcap C)$ 　(تعریف $A\Delta B$)

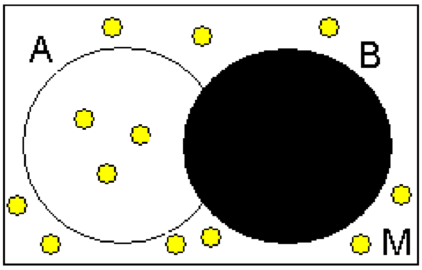
$=(A\bigcap(B\bigcup C))-(A\bigcap(B\bigcap C))$ 　(خاصیت پخشی $\bigcap$ به $\bigcup$)

$=A\bigcap((B\bigcup C)-(B\bigcap C))$ 　(خاصیت پخشی $\bigcap$ به $-$)

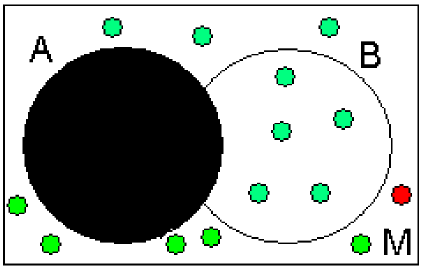
$=A\bigcap(B\Delta C)$ 　(تعریف $A\Delta B$)

۹-

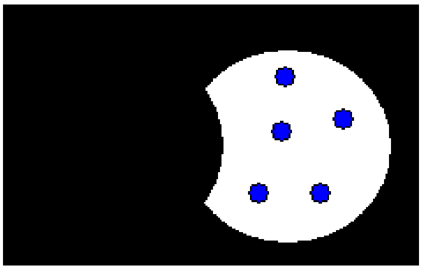
B'



A'



B-A



۱۰- الف)

$(A-B)\bigcap B$

$=(A\bigcap B')\bigcap B$ 　۱) فرمول طلائی $A-B=A\bigcap B'$

$=A\bigcap(B'\bigcap B)$ 　۲) شرکت پذیری $\bigcap$

$=A\bigcap\varnothing$ 　۳) رابطه $A\bigcap A'=\varnothing$

$=\varnothing$ 　٤) رابطه $A\bigcap\varnothing=\varnothing$

ب) $x\in B-A \Leftrightarrow \begin{cases} x\in B\Rightarrow x\in B \\ \wedge \\ x\notin A\Rightarrow x\in A' \end{cases} \Leftrightarrow x\in B\bigcap A' \Rightarrow \begin{cases} B-A\subset B\bigcap A' \\ \wedge \\ B\bigcap A'\subset B-A \end{cases} \Rightarrow B-A=B\bigcap A'$

به ترتیب از ۱) تعریف تفاضل ۲) تعریف متمم ۳) تعریف اشتراک ٤) تعریف زیر مجموعه ۵)تعریف تساوی استفاده گردیده است.

پ)

$$A-(A\cap B)$$
$$=A\cap(A\cap B)'$$ ۱) فرمول طلائی $A-B=A\cap B'$
$$=A\cap(A'\cup B')$$ ۲) قانون دمورگان
$$=(A\cap A')\cup(A\cap B')$$ ۳) پخشی $\cap$ به $\cup$
$$=\varnothing\cup(A\cap B')$$ ٤) رابطه $A\cap A'=\varnothing$
$$=A\cap B'$$ ٥) رابطه $A\cup\varnothing=A$
$$=A-B$$ ٦) فرمول طلائی $A-B=A\cap B'$

ت)

$$(A\Delta B)\cup(A\cap B)$$
$$=((A\cup B)-(A\cap B))\cup(A\cap B)$$ ۱) معادل تعریف $A\Delta B$
$$=((A\cup B)\cap(A\cap B)')\cup(A\cap B)$$ ۲) فرمول طلائی $A-B=A\cap B'$
$$=((A\cup B)\cup(A\cap B))\cap((A\cap B)'\cup(A\cap B))$$ ۳) پخشی $\cup$ به $\cap$
$$=(A\cup B)\cap M$$ ٤) $A\cup A'=M$ و $A\cap B\subset A\cup B$
$$=A\cup B$$ ٥) $A\cap M=A$

۱۱- الف) Z یا N ب) N پ) Z ت) N

تذکر : خاصیت پخشی $\cap$ به $-$ $\quad A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

اثبات :

$$(A\cap B)-(A\cap C)$$
$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$
$$=((A\cap B)\cap A')\cup((A\cap B)\cap C')$$
$$=(B\cap(A\cap A'))\cup((A\cap B)\cap C')$$
$$=(B\cap\varnothing)\cup(A\cap(B\cap C'))$$
$$=\varnothing\cup(A\cap(B-C))$$
$$=A\cap(B-C)$$

۱- الف) $(x-1)^2+(y-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \quad , \quad y-1=0 \quad \Rightarrow x=1 \quad , \quad y=1$

ب) $x^2+y^2=13 \ , \ xy=6 \Rightarrow (x+y)^2-2(6)=13 \Rightarrow (x+y)^2=25 \Rightarrow x+y=\pm 5$
$\Rightarrow (x,y)\in \{(2,3),(3,2),(-2,-3),(-3,-2)\}$

۲- طبق اصل ضرب مجموعه $A\times B$ دارای $m\times n$ عضواست وتعدادزیرمجموعه های $A\times B$، $2^{m\times n}$ است.

۳- الف) $A=\{2(-2)+1,2(-1)+1,2(0)+1\}=\{-3,-1,1\} \quad , \quad B=\{1,2,3\}$
$A\times B=\{(-3,1),(-3,2),(-3,3),(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$

ب) $B\times A=\{(1,1),(1,-1),(1,-3),(2,1),(2,-1),(2,-3),(3,1),(3,-1),(3,-3)\}$
$(A\times B)\cup(B\times A)=\{(-3,1),(-3,2),(-3,3),(-1,1),(-1,2),(-1,3)$
$,(1,1),(1,2),(1,3),(1,-1),(1,-3),(2,1),(2,-1),(2,-3)$
$,(3,1),(3,-1),(3,-3)\}$
$(A\times B)\cap(B\times A)=\{(1,1)\}$
$n((A\times B)\cup(B\times A))=9+9-1=17 \quad , \quad n((A\times B)\cap(B\times A))=n(\{(1,1)\})=1$

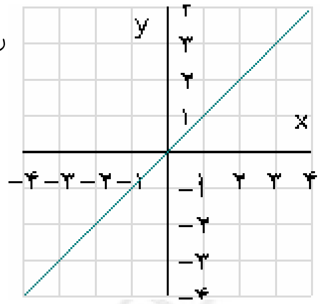
ج) $B^2=B\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
$A^2=A\times A=\{(1,1),(1,-1),(1,-3),(-1,1),(-1,-1),(-1,-3),(-3,1),(-3,-1),(-3,-3)\}$
$A^2-B^2=\{(-3,-3),(-3,-1),(-3,1),(-1,-3),(-1,-1),(-1,1),(1,-3),(1,-1)\}$
$n(A^2-B^2)=8 \Rightarrow A^2-B^2$ تعداد زیرمجموعه های $=2^8=16\times 16=256$

۴- $A=B \Leftrightarrow A\times B=B\times A \quad , \quad A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow (A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$

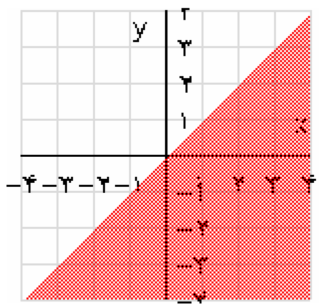
۵- بلی ، $n(CA)=n(AC)=12 \quad , \quad n(AC)=n(AB)\times n(BC)=3\times 4=12$ طبق اصل ضرب

۶- $A=\{(2P,5P),(2P,5R),(2R,5P),(2R,5R)\}\Rightarrow n(A)=4$

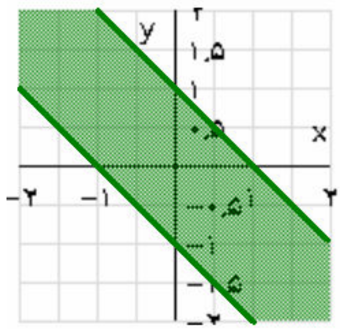
۷- الف)



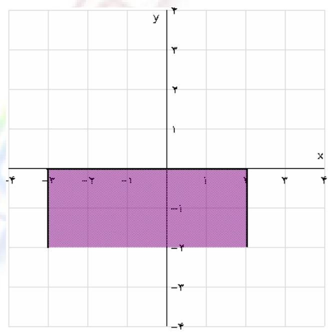
ب)



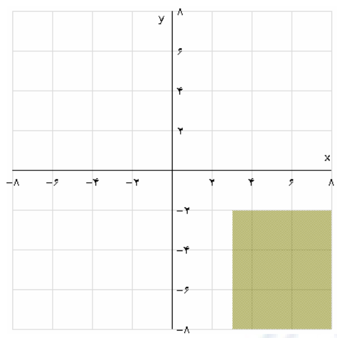
ج)



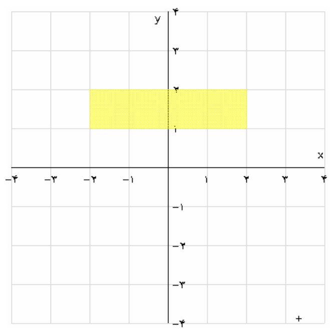
۸- الف)



ب)



ج)



۹- الف) اگر $A\times B=\varnothing$ طبق تعریف ضرب دکارتی یکی از مجموعه های A یا B تهی بوده است وبالعکس

$$A=\varnothing \Rightarrow A\times C=\varnothing \Rightarrow B\times C=\varnothing\ ,\ C\neq\varnothing \Rightarrow B=\varnothing \Rightarrow A=B$$

ب)

$$A\neq\varnothing, C\neq\varnothing\ , \begin{cases} x\in A \\ y\in C \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in A\times C=B\times C \Rightarrow x\in B, y\in C \Rightarrow A\subseteq B$$

همین روند رامیتوان برای B در نظر گرفت پس $A\subseteq B$ بنابراین طبق تعریف $A=B$.

۱- الف) $۱R۲$ × , $\pi R۱$ ✓ , $۱R\pi$ ✓ , $۲R۰$ × , $۴R۱$ ×　　ب) $\{۰ , ۲\}$

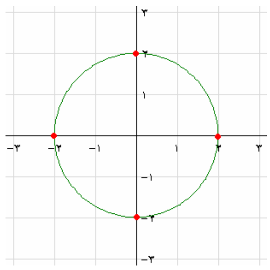
۲- هر زیر مجموعه $A\times A$ یک رابطه است و $n(A\times A)=۲۵$ پس تعداد روابط $۲^{۲۵}$ است.

۳- طبق تعریف چون $\varnothing\subset A\times B$ پس یک رابطه است.

۴-

$$R=\{(۰,۰),(۱,۰),(۲,۰),(۳,۰),(۴,۰),(۵,۰),(۶,۰),(۷,۰),(۸,۰),(۹,۰)$$
$$(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۱,۷),(۱,۸),(۱,۹),(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۲,۸),$$
$$(۳,۳),(۳,۶),(۳,۹),(۴,۴),(۴,۸),(۵,۵),(۶,۶),(۷,۷),(۸,۸),(۹,۹)\}$$
$$\Rightarrow D_R=\{۰,۱...,۹\}, R_R=\{۰,۱,.....,۹\}$$

۵-



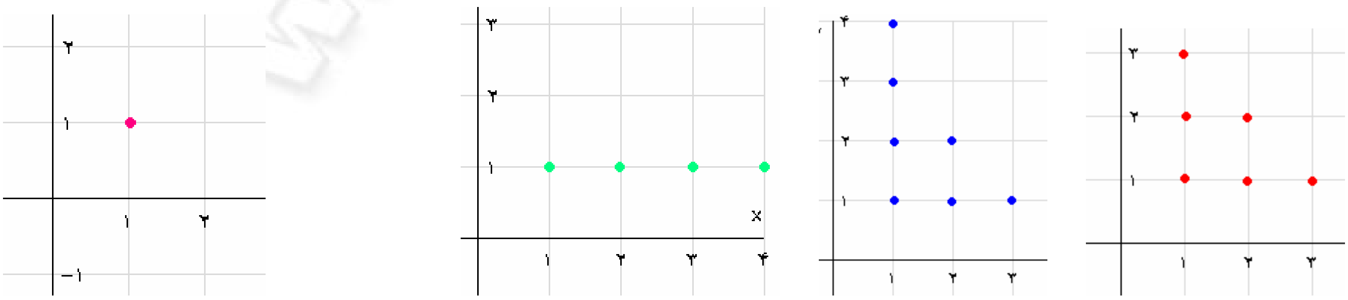
$$R=\{(۰,۲),(۰,-۲),(۲,۰),(-۲,۰)\}$$

۶- الف) $A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$

ب) $B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$

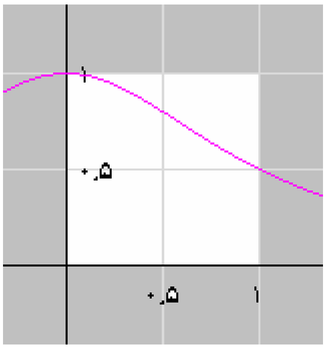
ج) $C=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),(۴,۱)\}$

د) $D=\{(۱,۱)\}$



(الف)　(ب)　(ج)　(د)

۷- نموداری که در قسمت سفید رنگ قراردارد جواب است.



۸- نمودارها به ترتیب راست به چپ و بالا به پایین

$R_{۱} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۶),(۲,۲),(۲,۶),(۳,۳),(۳,۶),(۶,۶)\}$

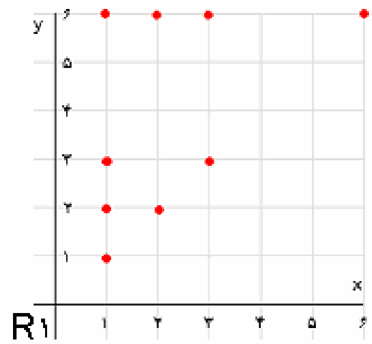
$R_{۲} = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۶),(۲,۳),(۲,۶),(۳,۶)\}$

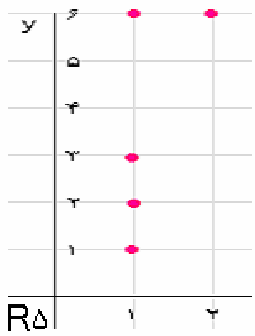
$R_{۳} = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۶,۶)\}$

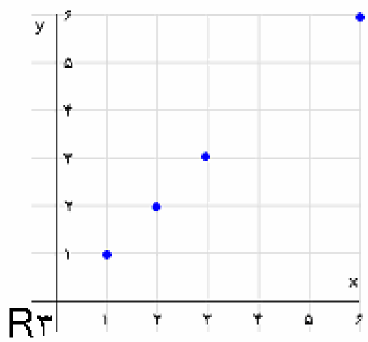
$R_{۴} = A^{۲} - R_{۳}$

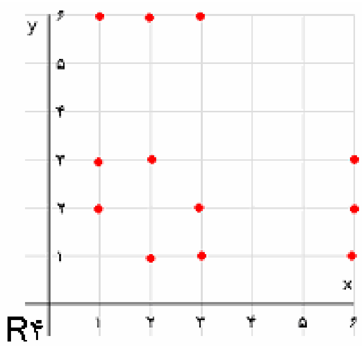
$R_{۵} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۶),(۲,۶)\}$

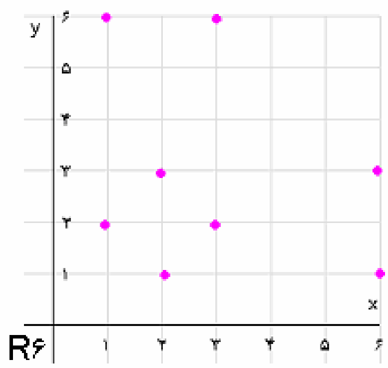
$R_{۶} = \{(۱,۲),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۳)\}$

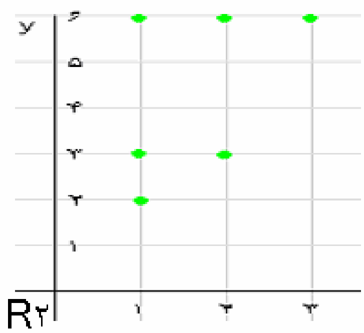




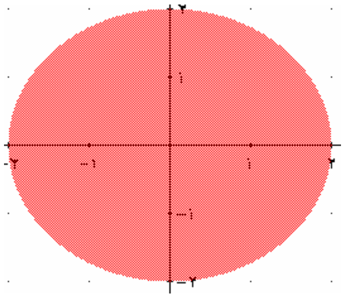




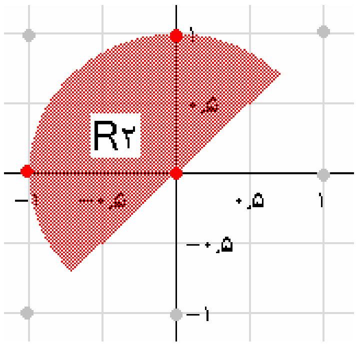




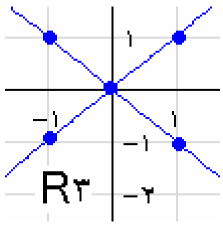
۹-



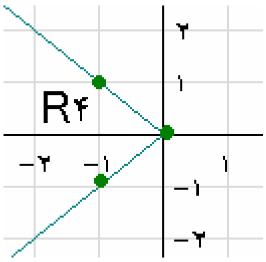
$$R_{۱}:\ x^{۲}+y^{۲}=۴ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۰ & ۲ & -۲ \\ \hline y & ۲ & -۲ & ۰ & ۰ \end{array}$$



$$R_{۲}:\ x^{۲}+y^{۲}=۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ \hline y & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \end{array},\ y=x \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰ \end{array}$$



$$R_{۳}:\ |y|=|x| \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ \hline y & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{array}$$



$$R_{۴}:\ |y|=-x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & -۱ & -۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ & -۱ \end{array}$$

۱- بازتابی : $xRx \Leftrightarrow ۳|x-x \Leftrightarrow ۳|۰$ ✓

تقارنی : $xRy \Leftrightarrow ۳|x-y \Leftrightarrow ۳|y-x \Leftrightarrow yRx$ ✓

ترآگذری : $xRy, yRz \Rightarrow ۳|x-y, ۳|y-z \Rightarrow ۳|x-y+y-z \Rightarrow ۳|x-z \Rightarrow xRz$ ✓

۳ کلاس هم ارزی شامل [۲],[۱],[۰] زیرا هر عدد صحیح در تقسیم بر ۳ باقیمانده ۰ یا ۱ یا ۲ دارد.

مثلا $[۱]=\{x\in Z \mid xR۱\}=\{x\in Z : ۳\mid x-۱ \Leftrightarrow x=۳k+۱\}=\{\dots,-۲,۱,۴,\dots\}$

۲- بازتابی : $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ ✓

تقارنی : $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta ABC$ ✓

ترآگذری : $\Delta ABC \sim \Delta MNP , \Delta MNP \sim \Delta EFG \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta EFG$ ✓

۳- الف) هم ارزی هست زیرا

بازتابی : $(a,b)R(a,b) \Rightarrow a+b=b+a$ ✓

تقارنی : $(a,b)R(c,d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow c+b=d+a \Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

ترآگذری : $(a,b)R(c,d),(c,d)R(m,n) \Rightarrow \begin{cases} a+d=b+c \\ c+n=d+m \end{cases} \Rightarrow a-m=b-n \Rightarrow a+n=b+m$

$\Rightarrow (a,b)R(m,n)$ ✓

ب) هم ارزی نیست زیرا

بازتابی : $(a,b)R(a,b) \Rightarrow (a-a)(b-b)=۰ \Rightarrow ۰\times۰=۰$ ✓

تقارنی: $(a,b)R(c,d) \Rightarrow (a-c)(b-d)=۰ \Rightarrow (c-a)(d-b)=۰ \Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

رابطه ترآگذری برقرار نیست × $(a,b)R(c,d),(c,d)R(m,n) \Rightarrow \begin{cases} (a-c)(b-d)=۰ \\ (c-m)(d-n)=۰ \end{cases} \Rightarrow ???$

مثال نقض $(۲,۴)R(۲,۵),(۲,۵)R(۷,۵)$ ولی $(۲,۴)R(۷,۵)$ نادرست است.

پ) هم ارزی هست زیرا

بازتابی : $(a,b)R(a,b) \Rightarrow ab=ab$ ✓

تقارنی : $(a,b)R(c,d) \Rightarrow ab=cd \Rightarrow cd=ab \Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

ترآگذری : $(a,b)R(c,d),(c,d)R(m,n) \Rightarrow ab=cd, cd=mn \Rightarrow ab=mn \Rightarrow (a,b)R(m,n)$ ✓

۱- اگر پشت $=P$ و رو $=R$ درنظر بگیریم آنگاه $S=\{RR\ ,\ RP, PR, PP\}$

تذکر : منظور از RR یعنی (R,R) یعنی اولی رو و دومی هم رو بیاید.

۲- اگر پشت $=P$ و رو $=R$ درنظر بگیریم آنگاه

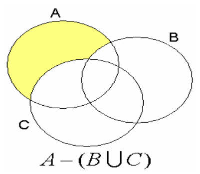
$$S=\{R۱\ ,R۲,R۳,R۴,R۵,R۶,P۱,P۲,P۳,P۴,P۵,P۶\}$$

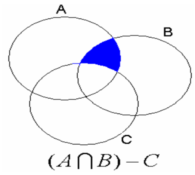
تذکر : $R۱$ یعنی $(R,۱)$ یعنی سکه رو و تاس عدد ۱ رو بیاید.

۱- A پیشامد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰ و B پیشامد عدد اول و C پیشامد عدد فرد کوچکتراز ۱۰ باشد ،

$A=\{۱,۲,...,۹\}\quad ,B=\{۲,۳,۵,۷\}\quad ,C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

الف) $(A\cap B)-C=\{۲\}$ ب) $A-(B\cup C)=\{۴,۶,۸\}$





۲- $A=\{$شوشتر،خرمشهر$\}$ ، $B=\{$آبادان،خرمشهر$\}$ ، $C=\{$شوشتر،اهواز$\}$

الف) $A'=\{$اهواز،آبادان،دزفول$\}$ ب) $C'=\{$آبادان،دزفول،خرمشهر$\}$

پ) $B\cap C=\{\ \}$ ت) $B\cup C=\{$شوشتر،اهواز،آبادان،خرمشهر$\}$

ث) $A\cup B=\{$آبادان،شوشتر،خرمشهر$\}$ ج) $(B\cup C)'=\{$دزفول$\}$

چ) $B'\cap C'=(B\cup C)'=\{$دزفول$\}$

۳- الف) $S=\{۱,۲,۳,...,۹\}$ ب) $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

پ) $B=\{۲,۳,۵,۷\}$ ث) $C=\{۷,۸,۹\}$

۴- $S=\{(R,R),(R,P),(P,R),(P,P)\}$ $A=\{(R,P),(P,R),(P,P)\}$

۵-

$$S=\{(R,R,R),(R,R,P),(R,P,R),(R,P,P),(P,R,R),(P,R,P),(P,P,R),(P,P,P)\}$$

$$A=S-\{(P,P,P)\}$$

۶-

$$S=\{(R,۱),(R,۲),...,(R,۶),(P,۱),...,(P,۶)\}$$

$$A=\{(R,۱),(R,۲),(R,۳),(R,۴),(R,۵),(R,۶),(P,۶)\}$$

۷- بله می توان در نظر گرفت ولی در این فضای نمونه ای عضوها غیر هم شانس هستند.

۸- الف) $S=\{(R,۱),(R,۲),(R,۳),(R,۴),(R,۵),(R,۶)$
$,(P,R,R),(P,R,P),(P,P,R),(P,P,P)\ \}$

ب) $A=\{(P,R,R)\}$

پ) $B=\{(P,R,P),(P,P,R),(P,P,P)\}$

۹- $S=\left\{(x,y)\in R\times R \mid (x-۲)^۲+(y+۳)^۲\le ۹\right\}$

یادآوری :

دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r دارای فرمول $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ است.

اگر نقطه $A(x,y)$ به گونه ای باشد که $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲<r^۲$ نقطه A داخل دایره و هرگاه $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲>r^۲$ نقطه A خارج دایره واقع است.

۱- دختر $=G$ ، پسر $=B$

$$S=\{(G,B),(G,G).(B,G),(B,B)\}$$

$$A=\{(G,B),(B,G),(G,G)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

۲- از چپ خانه ۱دارای ۹حالت ۱,۲,...,۹ ، خانه۲دارای ۹ حالت یعنی ۰,۱,۲,...,۹ که یکی از آنها در خانه ۱ انتخاب شده وخانه ۳دارای ۸حالت است.زیرا از ۰,۱,۲,...,۹ دو تا در خانه های ۱,۲ انتخاب شده اند.

پس طبق اصل ضرب تعداد حالات ۸×۹×۹ حالت است و رمز فقط یکی از این حالات است، پس $P(A)=\frac{۱}{۹^۲\times ۸}=\frac{۱}{۶۴۸}$

$\boxed{۹}\ \boxed{۹}\ \boxed{۸}$

تذکر: در تمارین۲و۳ چون کلمه ی عدد ذکر شده اولین رقم از سمت چپ را غیر صفر در نظر می گیریم.

۳- مانند تمرین ۲

$$P(A)=\frac{۱}{۹^۲\times ۸\times ۷\times ۶}$$

$\boxed{۹}\ \boxed{۹}\ \boxed{۸}\ \boxed{۷}\ \boxed{۶}$

٤- با شرط مسئله برای فضای نمونه ای، خانه ۱ از چپ دارای ۲حالت {۳,۱}وسه خانه دیگرهریک ۵ حالت {۱,۳,۵,۷,۹} (تکرار مجاز) دارند . پس $n(S)=۲\times ۵^۳$

$\boxed{۲}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}$

برای آنکه بر ۵بخشپزیرباشدخانه ۴ باید {۵} باشد(صفر نداریم) که ۱حالت است وبقیه خانه ها همان تعداد است. پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times ۵\times ۵\times ۱}{۲\times ۵\times ۵\times ۵}=\frac{۱}{۵}$

$\boxed{۲}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۱}$

۵- فرض تکرار مجاز

$\boxed{۷}\ \boxed{۷}\ \boxed{۷}\ \boxed{۷}$ $\Rightarrow n(S)=۷^۴$

$\boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}$ $\Rightarrow n(A)=۵^۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵^۴}{۷^۴}=(\frac{۵}{۷})^۴$

فرض تکرار غیرمجاز

$\boxed{۷}\ \boxed{۶}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}$ $\Rightarrow n(S)=۷\times ۶\times ۵\times ۴$

$\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}$ $\Rightarrow n(A)=۵\times ۴\times ۳\times ۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۷}$

۶-
$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$$

الف) $A=\{(۲,۳),(۳,۲)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۹}$

ب) $B=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۹}$

۷-

ب) $P(B)=\frac{\binom{۵}{۵}\times\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۱}{۵}}=\frac{۱}{۴۶۲}$

الف) $P(A)=\frac{\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۵}}=\frac{۱۰\times۱۵}{۴۶۲}=\frac{۲۵}{۷۷}$

پ) $P(C)=\frac{\binom{۶}{۴}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۶}{۵}\times\binom{۵}{۰}}{\binom{۱۱}{۵}}=\frac{۱۵\times۵+۶\times۱}{۴۶۲}=\frac{۸۱}{۴۶۲}=\frac{۲۷}{۱۵۴}$

۸-
$$S=\{(۱,\text{ر}),(۲,\text{ر}),\dots,(۶,\text{ر}),(۱,\text{پ}),(۲,\text{پ}),\dots,(۶,\text{پ})\}\Rightarrow n(S)=۱۲$$

الف) $A=\{(۲,\text{ر}),(۴,\text{ر}),(۶,\text{ر})\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

ب)
$$B=\{(۲,\text{ر}),(۲,\text{پ}),(۴,\text{ر}),(۴,\text{پ}),(۶,\text{ر}),(۶,\text{پ}),(۱,\text{ر}),(۳,\text{ر}),(۵,\text{ر})\}$$
$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$

۹-

ب) $P(B)=\frac{\binom{۲۰}{۱}\times\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۴۵}{۲}}=\frac{۲۰\times۱۰}{۴۵\times۲۲}=\frac{۲۰}{۹۹}$

الف) $P(A)=\frac{۱۰}{۴۵}=\frac{۲}{۹}$

۱۰- کل حالات ۸ حالت وحالت موردنظر تنها یک حالت است. الف) $A=\{(د,د,د)\} \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۸}$

ب) $B=\{(غ,غ,غ)\} \Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۸}$

پ) $C=\{(د,د,د),(غ,د,د),(د,غ,د),(د,د,غ)\} \Rightarrow P(C)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

۱۱- الف)

ب) $B=\{(پ,د),(د,پ)\} \Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

پ) $C=\{(پ,د),(د,پ),(د,د)\} \Rightarrow P(C)=\frac{۳}{۴}$

۱۲- الف) ٪۶/۲۵   ٪۲۵   ٪۳۷/۵   ٪۲۵   ٪۶/۲۵

دست کم دوروز یعنی دو روز یا سه روز یا چهار روز   ب) $P(B)=\frac{۶}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$

هردو هم شانس اند $\Rightarrow$ دقیقا یک روز $P(C)=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$ ، دقیقا سه روز $P(C)=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$ پ)

۱۳- الف) آمدن ۱۰ رو بالاترین احتمال را دارد پس محتمل تر است.

ب) تقریبا ۲۰ درصد یعنی $P(A)=\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۵}$

پ) هر چه تعداد سکه ها بیشتر باشد احتمال برابر بودن تعداد پشت و روکمتر است.

ت) احتمال کاهش می یابد.

تذکر: در پرتاب ۱۰ سکه احتمال برابر بودن تعداد رو وپشت برابر $\frac{\binom{۱۰}{۵}}{۲^{۱۰}}$ و برای ۲۰ سکه $\frac{\binom{۲۰}{۱۰}}{۲^{۲۰}}$ است

و $\frac{\binom{۱۰}{۵}}{۲^{۵}} < \frac{\binom{۲۰}{۱۰}}{۲^{۲۰}}$.

۱- غیر مجاز چون

الف) $P(B)+P(W)+P(G)+P(R)=۰/۳+۰/۲۴+۰/۲۸+۰/۳۲=۱/۱۴>۱$

ب) مجاز چون
$$P(B)+P(W)+P(G)+P(R)=۰/۳+۰/۳+۰/۱۴+۰/۲۶=۱$$
$$,\quad ۰\le P(B),P(W),P(G),P(R)\le ۱$$

۲-
$$\begin{cases} P(\text{ر})=۲P(\text{پ}) \\ P(\text{ر})+P(\text{پ})=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲P(\text{پ})+P(\text{پ})=۱ \Rightarrow P(\text{پ})=\frac{۱}{۳}\ ,\ P(\text{ر})=\frac{۲}{۳}$$

۳-
$$\begin{cases} P(a)=P(b)=۲P(c) \\ P(a)+P(b)+P(c)=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲P(c)+۲P(c)+P(c)=۱ \Rightarrow P(c)=\frac{۱}{۵}$$
$$,\ P(a)=P(b)=\frac{۲}{۵}\ ,\ P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

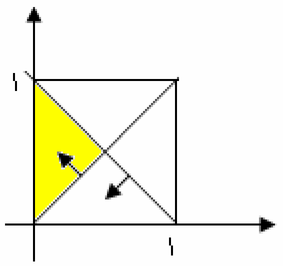
۱-

$$S=\{x \mid x\in R, ۰<x<۳\}\ ,A=\{x \mid x\in S, ۱<x<۲/۵\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{۲/۵-۱}{۳-۰}=\frac{۱/۵}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

۲-

$$Q=\{(x,y) \mid ۰\le x\le ۱\ ,\ ۰\le y\le ۱\}\ ,A=\{(x,y)\in Q \mid x\le y\le ۱-x\}$$



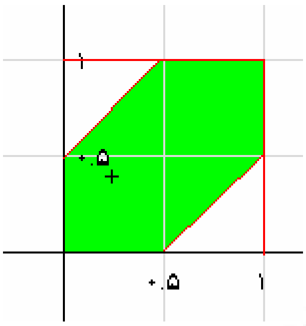
$$\begin{cases} y=x\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱\end{array}\ ,\ A(۰,۱)\in y\ge x \\ y=۱-x\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰\end{array}\ ,\ B(۰,۰)\in y\le ۱-x \end{cases}$$

$$P(A)=\frac{a_A}{a_Q}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۴}$$

۳-

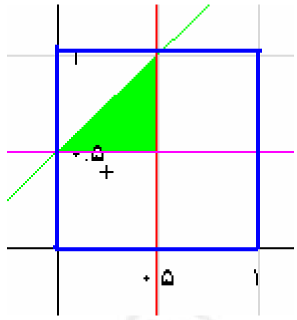
$$Q=\{(x,y) \mid ۰\le x\le ۱\ ,\ ۰\le y\le ۱\}\ ,A=\{(x,y)\in Q \mid -\frac{۱}{۲}<x-y<\frac{۱}{۲}\}$$

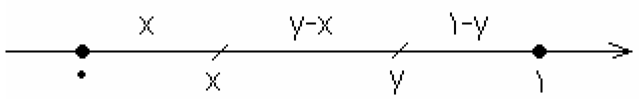
$$-\frac{۱}{۲}<x-y<\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases} x-y=\frac{۱}{۲} \\ x-y=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \begin{array}{c|cc} x & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \hline y & -\frac{۱}{۲} & ۰\end{array}\ ,A(۰,۰)\in x-y<\frac{۱}{۲} \\ \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ \hline y & \frac{۱}{۲} & ۰\end{array}, B(۰,۰)\in x-y>-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$



$$P(A)=\frac{a_A}{a_Q}=\frac{۱-۲(\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}))}{۱}=\frac{۳}{۴}$$

-٤





$$Q=\{(x,y)\mid ۰\le x\le ۱\ ,\ ۰\le y\le ۱\}\ ,\ A=\{(x,y)\in Q\mid\ y-x<\frac{۱}{۲}\ ,\ y>\frac{۱}{۲}\ ,\ x<\frac{۱}{۲}\}$$

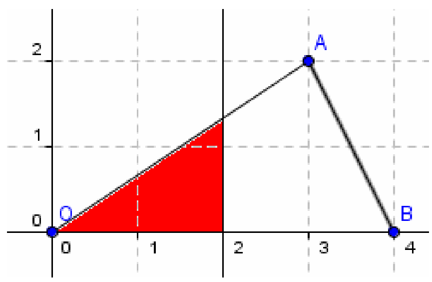
$$\begin{cases} x+(y-x)>۱-y\Rightarrow y>\frac{۱}{۲} \\ x+(۱-y)>y-x\Rightarrow y-x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \hline y & \frac{۱}{۲} & ۱ \end{array}\Rightarrow P(A)=\frac{a_A}{a_Q}=\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})}{۱}=\frac{۱}{۸} \\ (y-x)+(۱-y)>x\Rightarrow x<\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

-۵ الف)

$O(۰,۰)\ \ A(۳,۲)\ \ B(۴,۰)$

معادله خط OA : $m=\frac{۲-۰}{۳-۰}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow y-۰=\frac{۲}{۳}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x$

تقاطع OA با $x=۲$: $x=۲\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}(۲)=\frac{۴}{۳}\Rightarrow N(۲,\frac{۴}{۳})$



$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲\times\frac{۴}{۳})}{\frac{۱}{۲}(۴\times۲)}=\frac{۱}{۳}$$

ب)

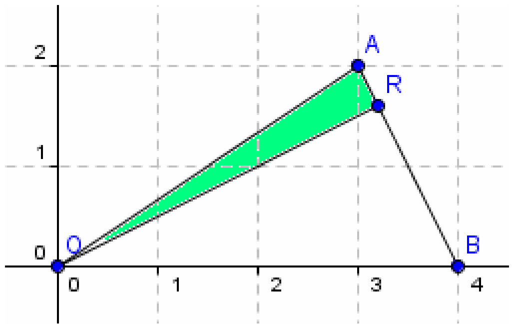
$$x=۲y\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$

معادله خط AB : $m=\frac{۲-۰}{۳-۴}=-۲\Rightarrow y-۰=-۲(x-۴)\Rightarrow y=-۲x+۸$

تقاطع AB با خط $x=۲y$: $\begin{cases} x=۲y \\ y=-۲x+۸ \end{cases}\Rightarrow y=-۴y+۸\Rightarrow y=\frac{۸}{۵},x=\frac{۱۶}{۵}\Rightarrow R(\frac{۱۶}{۵},\frac{۸}{۵})$

ب)

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{S_{OAR}}{S_{OAB}}=\frac{S_{OAB}-S_{ORB}}{S_{OAB}}=\frac{\frac{۱}{۲}(۴\times ۲)-\frac{۱}{۲}(۴\times \frac{۸}{۵})}{\frac{۱}{۲}(۴\times ۲)}=۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

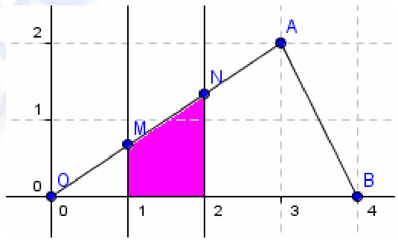


پ)

OA معادله خط : $y=\frac{۲}{۳}x$

$x=۱$ قطع OA با خط : $y=\frac{۲}{۳}(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow M(۱,\frac{۲}{۳})$

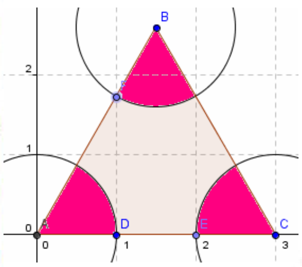
$x=۲$ قطع OA با خط : $y=\frac{۲}{۳}(۲)=\frac{۴}{۳}\Rightarrow N(۲,\frac{۴}{۳})$



$$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}+\frac{۲}{۳})(۱)=۱\ ,\ P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}(۴\times ۲)}=\frac{۱}{۴}$$

۶- یادداشت۱: مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت فاصله ثابت دارند دایره ای است به مرکز آن نقطه ثابت و شعاع مقدار ثابت.

یادداشت۲: کافی است به مرکز راسها دوایری به شعاع ۱ رسم کنیم.



پاسخ : زاویه راسها ۶۰ درجه است و هر سه با هم تشکیل نیم دایره می دهند ،

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳)^۲-\frac{۱}{۲}\pi(۱)^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳)^۲}=۱-\frac{۲\pi}{۹\sqrt{۳}}$$

۷-

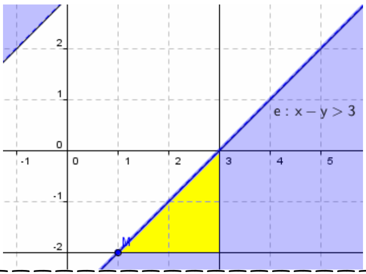
$S=\{(a,b)\in R^{۲} \mid ۰\le a\le ۳\ ,\ -۲\le b\le ۰\}$

$A=\{(a,b)\in S \mid |a-b|>۳\}=\{(a,b)\in S \mid a-b>۳ \ or\ a-b<-۳\}$

$a-b=۳\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & ۰ & ۳ & ۱ & ۳ \\ \hline b & -۳ & ۰ & -۲ & ۰ \end{array}\ ,\ a-b=-۳\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & ۰ & ۳ & -۵ & -۳ \\ \hline b & ۳ & ۶ & -۲ & ۰ \end{array}$

$b=-۲$ با خط $a-b=۳$ قطع : $a-(-۲)=۳\Rightarrow a+۲=۳\Rightarrow a=۱\Rightarrow M(۱,-۲)$

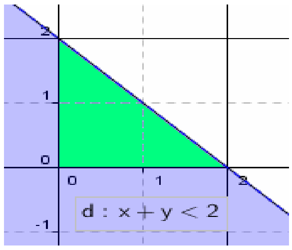
$P(A)=\dfrac{a_A}{a_S}=\dfrac{\frac{۱}{۲}(۲\times ۲)}{۳\times ۲}=\dfrac{۱}{۳}$



۸-الف)

$S=\{(x,y)\mid ۰<x<۲\ ,\ ۰<y<۲\}\ ,\ A=\{(x,y)\in S \mid x+y<۲\}$

$x+y=۲\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۰ \end{array}\ ,\ P(A)=\dfrac{a_A}{a_S}=\dfrac{\frac{۱}{۲}(۲\times ۲)}{۲\times ۲}=\dfrac{۱}{۲}$

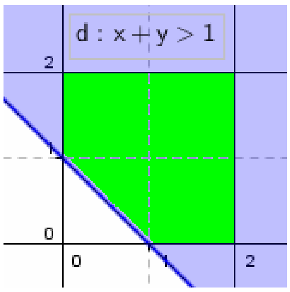


ب)

$B=\{(x,y)\in S \mid x+y>۱\}$

$x+y=۱\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۲ & ۱ & -۱ \\ \hline y & ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \end{array}$

$P(B)=\dfrac{a_B}{a_S}=\dfrac{۲\times ۲-\frac{۱}{۲}(۱\times ۱)}{۲\times ۲}=۱-\dfrac{۱}{۸}=\dfrac{۷}{۸}$

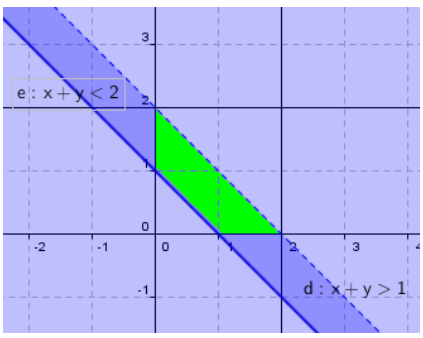


پ)

$C=\{(x,y)\in S \mid ۱<x+y<۲\}$

$x+y=۱\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰ \end{array}\ ,\ x+y=۲\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۰ \end{array}$

$P(C)=\dfrac{a_C}{a_S}=\dfrac{۲\times ۲-\frac{۱}{۲}(۲\times ۲)-\frac{۱}{۲}(۱\times ۱)}{۲\times ۲}=۱-\dfrac{۱}{۲}-\dfrac{۱}{۸}=\dfrac{۳}{۸}$



۹- $S=\{(x,y)\in R^{2} \mid 0<x<2 \ , \ 0<y<2\}$

الف) $\frac{x}{y}=1$ نیمساز ربع اول و سوم است (به جز مبدا)ومساحت خط وپاره خط صفر است پس

$$A=\{(x,y)\in S \mid \frac{x}{y}=1\} \ , \ P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{0}{2\times 2}=0$$

ب) $B=\{(x,y)\in S \mid \frac{x}{y}<1 \ \ or \ \ \frac{y}{x}<1\}$

بحث: چون صحبت از ترتیب انتخاب نیست هر دو حالت $\frac{y}{x},\frac{x}{y}$ ممکن است . البته در برخی حالتها مثلا $y+x<1$, $x+y<1$ تفاوتی ندارند.

هردو عدد دلخواه غیر صفر متعلق به B هستند پس $P(B)=\frac{a_B}{a_S}=\frac{2\times 2}{2\times 2}=1$

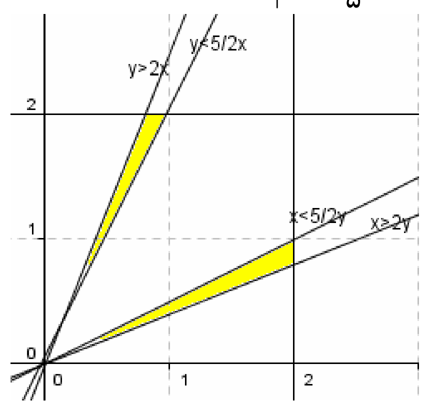
پ) $C=\{(x,y)\in S \mid 0/4<\frac{x}{y}<0/5 \quad \vee \quad 0/4<\frac{y}{x}<0/5\}$

دوقسمت درمجموعه Cدارای مساحت برابرند .پس یکی از آنهارایافته،مقدارش را دو برابر می کنیم.

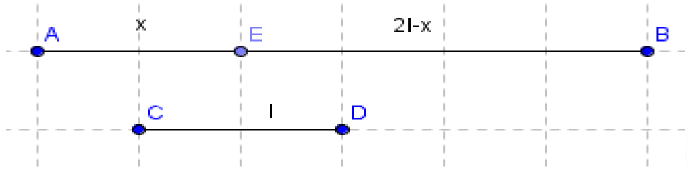
$$\frac{x}{y}=0/5 \Rightarrow y=2x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 2 & 4 \end{array} \ , \ \frac{x}{y}=0/4 \Rightarrow y=\frac{5}{2}x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{4}{5} & 2 \\ \hline y & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\frac{y}{x}=0/5 \Rightarrow x=2y \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 4 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array} \ , \ \frac{y}{x}=0/4 \Rightarrow x=\frac{5}{2}y \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 5 \\ \hline y & 0 & \frac{4}{5} & 2 \end{array}$$

$$P(C)=\frac{a_C}{a_S}=\frac{2(\frac{1}{2})(1-\frac{4}{5})(2)}{2\times 2}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{1}}=\frac{1}{10}$$



$$\begin{cases} x+(2l-x)>l \Rightarrow 2l>l \\ x+l>2l-x \Rightarrow x>\frac{l}{2} \\ 2l-x+l>x \Rightarrow x<\frac{3l}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{l}{2}<x<\frac{3l}{2}$$



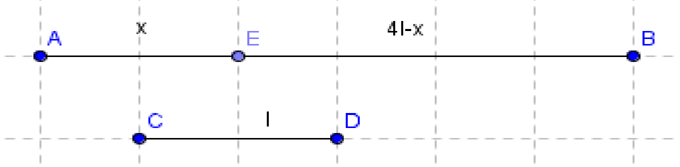
۱۰- $S=\{x\in R \mid 0<x<2l\}\ ,\ A=\{x\in S \mid \frac{l}{2}<x<\frac{3l}{2}\}$

$$,\ P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{\frac{3l}{2}-\frac{l}{2}}{2l-0}=\frac{l}{2l}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x+(4l-x)>l \Rightarrow 4l>l \\ x+l>4l-x \Rightarrow x>\frac{3l}{2} \\ 4l-x+l>x \Rightarrow x<\frac{5l}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3l}{2}<x<\frac{5l}{2}$$

۱۱- الف) $S=\{x\in R \mid 0<x<4l\}\ ,\ A=\{x\in S \mid \frac{3l}{2}<x<\frac{5l}{2}\}$

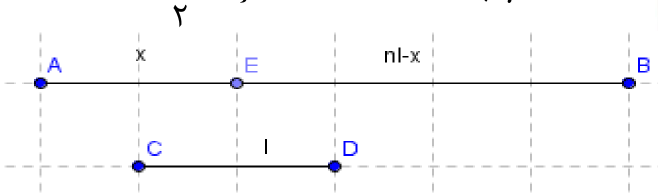
$$,\ P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{\frac{5l}{2}-\frac{3l}{2}}{4l-0}=\frac{l}{4l}=\frac{1}{4}$$



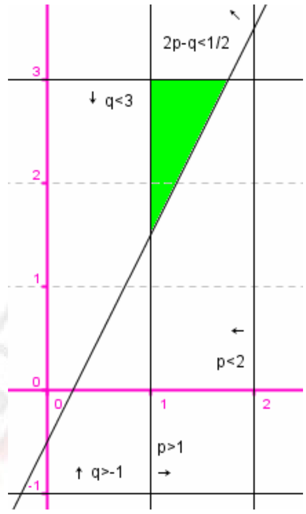
$$\begin{cases} x+(nl-x)>l \Rightarrow nl>l \\ x+l>nl-x \Rightarrow x>\frac{(n-1)l}{2} \\ nl-x+l>x \Rightarrow x<\frac{(n+1)l}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{(n-1)l}{2}<x<\frac{(n+1)l}{2}$$

ب) $S=\{x\in R \mid 0<x<nl\}\ ,\ A=\{x\in S \mid \frac{(n-1)l}{2}<x<\frac{(n+1)l}{2}\}$

$$,\ P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{\frac{(n+1)l}{2}-\frac{(n-1)l}{2}}{nl-0}=\frac{l}{nl}=\frac{1}{n}$$



۱۲-



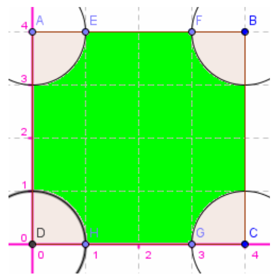
$$S=\{(p,q)\mid ۱<p<۲\ ,\ -۱<q<۳\}$$

$$A=\{(p,q)\in S\mid ۲p-q<\frac{۱}{۲}\}$$

$$۲p-q=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} p & ۱ & ۲ & -\frac{۱}{۴} & \frac{۷}{۴} \\ \hline q & \frac{۳}{۲} & \frac{۷}{۲} & -۱ & ۳ \end{array},$$

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۷}{۴}-۱)(۳-\frac{۳}{۲})}{۱\times ۴}=\frac{۹}{۶۴}$$

۱۳- توضیح: چهار ربع دایره تشکیل دایره کامل می دهند.



الف) $P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{۲\times ۲-\pi(\frac{۱}{۹})^۲}{۲\times ۲}=۱-\frac{\pi}{۳۲۴}$

ب) $P(B)=\frac{a_B}{a_S}=\frac{l\times l-\pi R^۲}{l\times l}=۱-\pi(\frac{R}{l})^۲$

۱٤- الف) اتوبوسها ۸:۳۰ , ۸:۱۵ به ایستگاه میرسند .برای آنکه کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند باید بین ۸:۱۰ تا ۸:۱۵ یا ۸:۲۵ تا ۸:۳۰ با ایستگاه برسد.پس

$$S=\{x\in R\mid ۸<x<۸:۳۰\}$$

$$A=\{x\in S\mid ۸:۱۰<x<۸:۱۵\ \ or\ \ ۸:۲۵<x<۸:۳۰\}$$

$$P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{(۱۵-۱۰)+(۳۰-۲۵)}{۳۰-۰}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$$

ب) اگر بین ۸ تا ۸:۵ یا ۸:۱۵ تا ۸:۲۰ به ایستگاه برسد بیش از ۱۰ دقیقه معطل می شود

$$S=\{x\in R\mid ۸<x<۸:۳۰\}$$

$$B=\{x\in S\mid ۸:۰<x<۸:۵\ \ or\ \ ۸:۱۵<x<۸:۲۰\}$$

$$P(B)=\frac{l_B}{l_S}=\frac{(۵-۰)+(۲۰-۱۵)}{۳۰-۰}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$$

۱۵-

$$S=\{x\in R \mid ۴\le x\le ۱۲\}$$

$$A=\{x\in S \mid ۴\le x\le ۶/۳۵\}\Rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{۶/۳۵-۴}{۱۲-۴}=\frac{۲/۳۵}{۸}=\frac{۴۷}{۱۶۰}$$

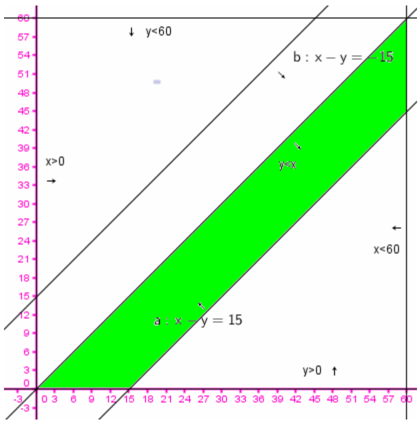
۱۶-

$$S=\{x\in R \mid ۲\le x\le ۴/۳\}$$

$$A=\{x\in S \mid ۲\le x< ۳/۲۵\}\Rightarrow P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{۳/۲۵-۲}{۴/۳-۲}=\frac{۱/۲۵}{۲/۳}=\frac{۲۵}{۴۶}$$

۱۷- احتمال آن را حساب می کنیم که همرا ملاقات کنند و احمد زودتر ازحسن برسد ، یعنی

(xدقایقی که حسن بعد از ساعت ۴ می رسد و y مربوط به احمد)



$$A=\{(x,y) \mid |x-y|\le ۱۵\ ,\ y<x\}$$

$$S=\{(x,y) \mid ۰<x<۶۰, ۰<x<۶۰\}$$

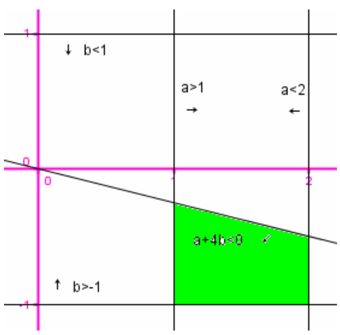
$$x-y=۱۵\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۶۰ & ۱۵ & ۷۵ \\ \hline y & -۱۵ & ۴۵ & ۰ & ۶۰ \end{array}$$

$$x-y=-۱۵\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۶۰ & -۱۵ & ۴۵ \\ \hline y & ۱۵ & ۷۵ & ۰ & ۶۰ \end{array}$$

$$x=y\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۶۰ \\ \hline y & ۰ & ۶۰ \end{array}$$

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{۱}{۲}(۶۰\times ۶۰)-\frac{۱}{۲}(۴۵\times ۴۵)}{۶۰\times ۶۰}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۱۶}=\frac{۷}{۳۲}$$

۱۸-



$$S=\{(a,b) \mid ۱\le a\le ۲\ ,\ -۱\le b\le ۱\}$$

$$A=\{(a,b)\in S \mid -\frac{b}{a}>۰/۲۵\}$$

$$-\frac{b}{a}=۰/۲۵=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=-۴b\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & ۱ & ۲ & ۴ & -۴ \\ \hline b & -\frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۲} & -۱ & ۱ \end{array}$$

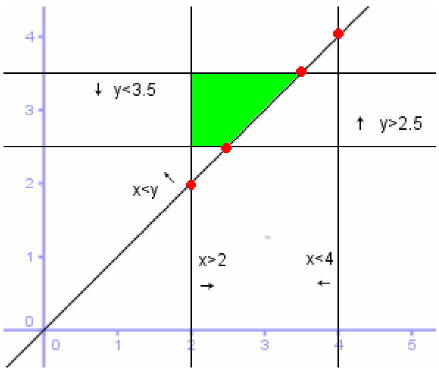
$$-\frac{b}{a}>\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۴}+\frac{b}{a}<۰\Rightarrow\frac{a+۴b}{۴a}<۰\Rightarrow\begin{cases} a+۴b>۰\ ,\ a<۰ \\ \text{or} \\ a+۴b<۰\ ,a>۰\end{cases}$$

اما نکته مهم آنکه

قسمت اول اشتراکی با S ندارد پس احتمال آن صفر است. ولی برای قسمت دوم

$$P(A)=\frac{\frac{۱}{۲}((۱-\frac{۱}{۴})+(۱-\frac{۱}{۲}))\times ۱}{۱\times ۲}=\frac{\frac{۵}{۸}}{۲}=\frac{۵}{۱۶}$$

۱۹- الف)



$$S=\{(x,y)\mid ۲<x<۴\ ,\ ۲/۵<y<۳/۵\}$$

$$A=\{(x,y)\in S\mid x<y\}$$

$x=y\Rightarrow$

x	۲	۴	۲/۵	۳/۵
y	۲	۴	۲/۵	۳/۵

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{۱}{۲}(۱/۵+۰/۵)(۱)}{۲\times ۱}=\frac{۱}{۲}$$

ب)

$$B=\{(x,y)\in S\mid |x-y|<\frac{۱}{۶}\}$$

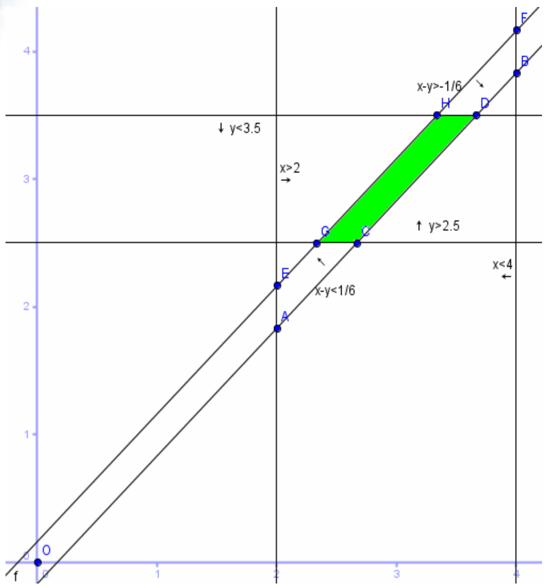
$x-y=\frac{۱}{۶}\Rightarrow$

x	۲	۴	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۱۱}{۳}$
y	$\frac{۱۱}{۶}$	$\frac{۲۳}{۶}$	۲/۵	۳/۵

$x-y=-\frac{۱}{۶}\Rightarrow$

x	۲	۴	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$
y	$\frac{۱۳}{۶}$	$\frac{۲۵}{۶}$	۲/۵	۳/۵

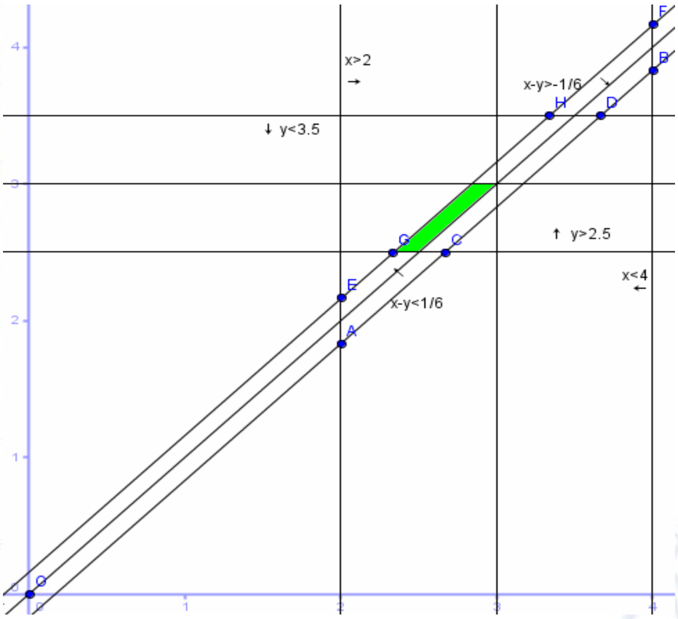
$$P(B)=\frac{a_B}{a_S}=\frac{(\frac{۱۱}{۳}-\frac{۱۰}{۳})(۱)}{۲\times ۱}=\frac{۱}{۶}$$



$$C=\{(x,y)\in S \mid x<y\ ,\ |x-y|<\frac{۱}{۶}\ ,\ x<۳\ ,\ y<۳\}$$

پ)

$$P(C)=\frac{a_C}{a_S}=\frac{(\frac{۵}{۲}-\frac{۷}{۳})(۳-\frac{۵}{۲})}{۲\times۱}=\frac{\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲۴}$$



توضیح نقطه یابی:

همانطور که مشاهده می شود برای نقطه یابی روی خطوط بهتر است کرانهای S را برای x,y را به x,y قراردهیم مثلا در سوال ۱۹ به x دو مقدار ۲,۴ وبه جای y دو مقدار ۲/۵,۳/۵ قرارمی دهیم تا چهار نقطه به دست آید.

۱- الف) $P(A)=۲P(B), P(B)=P(C)=۲P(D)\ , P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=۱$

$۴P(D)+۲P(D)+۲P(D)+P(D)=۱ \Rightarrow ۹P(D)=۱ \Rightarrow P(D)=\frac{۱}{۹},\quad P(C)=\frac{۲}{۹},\quad P(A)=\frac{۴}{۹}$

ب) $P(A^c)=۱-P(A)=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$

۲- احتمال استخدام خانم اکبری $=x$، معینی $=y$ ، حیدری $=z$

$y=۰/۲+x=۰/۲+z\ ,\ x+y+z=۱ \Rightarrow (y-۰/۲)+y+(y-۰/۲)=۱$

$\Rightarrow ۳y=۱/۴ \Rightarrow y=\frac{۱/۴}{۳}=\frac{۷}{۱۵}$

۳- طبق جدول ۱۵ درصد درون شهر ودر شب

۶۰درصد حومه شهر وشب

	روز	شب	
حومه	٪۲۰	٪۶۰	٪۸۰
درون شهر	٪۵	٪۱۵	٪۲۰
	٪۲۵	٪۷۵	٪۱۰۰

۴-

$$P(A)=P(A\cap M)=P\left(A\cap\left(B\cup B'\right)\right)=P\left[(A\cap B)\cup\left(A\cap B'\right)\right]$$

۵- الف) $=P(A\cap B)+P(A\cap B')-P(A\cap B\cap A\cap B')$

$=P(A\cap B)+P(A\cap B')+P(\varnothing)\Rightarrow P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

ب) $P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

۶- $P(A)=P(B)=۱\Rightarrow A=B=S\Rightarrow P(A\cap B)=P(S\cap S)=P(S)=۱$

۷-

$$P(A)=\cdot/۷۴, P(B)=\cdot/۷, P(C)=\cdot/۶۴, P(A\cap B)=\cdot/۴۶, P(B\cap C)=\cdot/۴۴$$
$$, P(A\cap C)=\cdot/۷۲, P(A\cap B\cap C)=\cdot/۳۴ \Rightarrow P(A\cup B\cup C)=$$
$$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$$
$$\cdot/۷۴+\cdot/۷+\cdot/۶۴-\cdot/۴۶-\cdot/۷۲-\cdot/۴۴+\cdot/۳۴=۲/\cdot۸-۱/۶۲+\cdot/۳۴=\cdot/۸$$

۸- الف) $A\cap B\subset A\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)$ ب) $A\subset A\cup B\Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)$

۹-

$$P(۲): P(A_۱\cup A_۲)=P(A_۱)+P(A_۲)$$
$$P(k): P(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_k)=P(A_۱)+P(A_۲)+\ldots+P(A_k)$$
$$P(k+۱): P(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_k\cup A_{k+۱})=P(A_۱)+\ldots+P(A_k)+P(A_{k+۱})$$

اثبات)
$$P(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_{k+۱})=$$
$$P(A_۱\cup A_۲\ldots\cup A_k)+P(A_{k+۱})=P(A_۱)+\ldots+P(A_k)+P(A_{k+۱})$$

۱۰- $P(A\cup B)\le ۱\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le ۱\Rightarrow P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-۱$

۱۲- اعدادبر ۳ بخش پزیر $=A$ و اعداد بر ۵ بخشپزیر $=B$ و اعداد بر ۱۵ بخشپزیر $=A\cap B$

الف) $n(A)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۳}\right]=۳۳۳$, $n(B)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right]=۲۰۰$, $n(A\cap B)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}\right]=۶۶$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)\quad\Rightarrow P(A\cap B')=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}-\frac{۶۶}{۱۰۰۰}=\frac{۲۶۷}{۱۰۰۰}$$

ب) $P(A'\cap B')=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=۱-\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}-\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}+\frac{۶۶}{۱۰۰۰}=۱-\frac{۴۶۷}{۱۰۰۰}=\frac{۵۳۳}{۱۰۰۰}$

۱۳- اعدادبر ۴ بخش پزیر $=A$ و اعداد بر ۵ بخشپزیر $=B$ و اعداد بر ۷ بخشپزیر $=C$

$$P(A\cap B'\cap C')=P(A\cap(B\cup C)')=P(A)-P(A\cap(B\cup C))=$$
$$P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C),$$
$$P(A)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۴}\right]=۲۵۰, P(A\cap B)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۲۰}\right]=۵۰, P(A\cap C)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۲۸}\right]=۳۵$$
$$, P(A\cap B\cap C)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۴۰}\right]=۷\Rightarrow P(A\cap B'\cap C')=\frac{۲۵۰-۵۰-۳۵+۷}{۱۰۰۰}=\frac{۱۷۲}{۱۰۰۰}=\frac{۴۳}{۲۵۰}$$

۱۴- الف)

$$S=\{1,2,3,4\},A=\{1,2,3\},B=\{2,3,4\},P(A\cup B)=\frac{4}{4}=1$$

$$P(A)=\frac{3}{4},P(B)=\frac{3}{4}\quad,\quad \frac{3}{4}+\frac{3}{4}\neq 1$$

ب)

$$A\cap B=\{2,3\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},P(A)=\frac{3}{4},P(B)=\frac{3}{4}$$

$$P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)\Rightarrow \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\neq\frac{1}{2}$$

۱۵- تعداد افراد نه مرد و نه عمل جراحی(زن بستری شده برای غیر جراحی)
۱۸ نفر است .

	مرد	زن	
جراحی	۱۲	۸	۲۰
غیر جراحی	۲۵	۱۸	۴۳
	۳۷	۲۶	۶۳

۱۶-

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+A(B)+P(C)\Leftrightarrow$$
$$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$$
$$P(A)+P(B)+P(C)\Leftrightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)\Leftrightarrow$$
$$P(A\cap B\cap C)=P\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\big)+2P(A\cap B\cap C)\Leftrightarrow$$
$$P\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\big)=-P(A\cap B\cap C)\Rightarrow$$
$$P\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\big)=0\Leftrightarrow$$
$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=0$$

از این مطلب استفاده شده که $P(A\cup B)=0\Leftrightarrow P(A)=P(B)=0$

۱۷- می دانیم $P(A\cap B)\leq P(A)+P(B)$ پس

$$P(A\cap(B\cap C))\leq P(A)+P(B\cap C)\leq P(A)+P(B)+P(C)$$

۱۸-

$$P(2):P(A\cap B)\leq P(A)+P(B)\ \checkmark$$
$$P(k):P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)\leq P(A_1)+\ldots+P(A_k)$$
$$P(k+1):P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k+1})\leq P(A_1)+\ldots+P(A_{k+1})$$

اثبات $P(k+1)$:

$$P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_{k+1})\leq P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)+P(A_{k+1})\leq P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_{k+1})$$