

ریاضی و آمار (1)

11-111

اساتذہ اعلیٰ
اساتذہ کرام

11-111

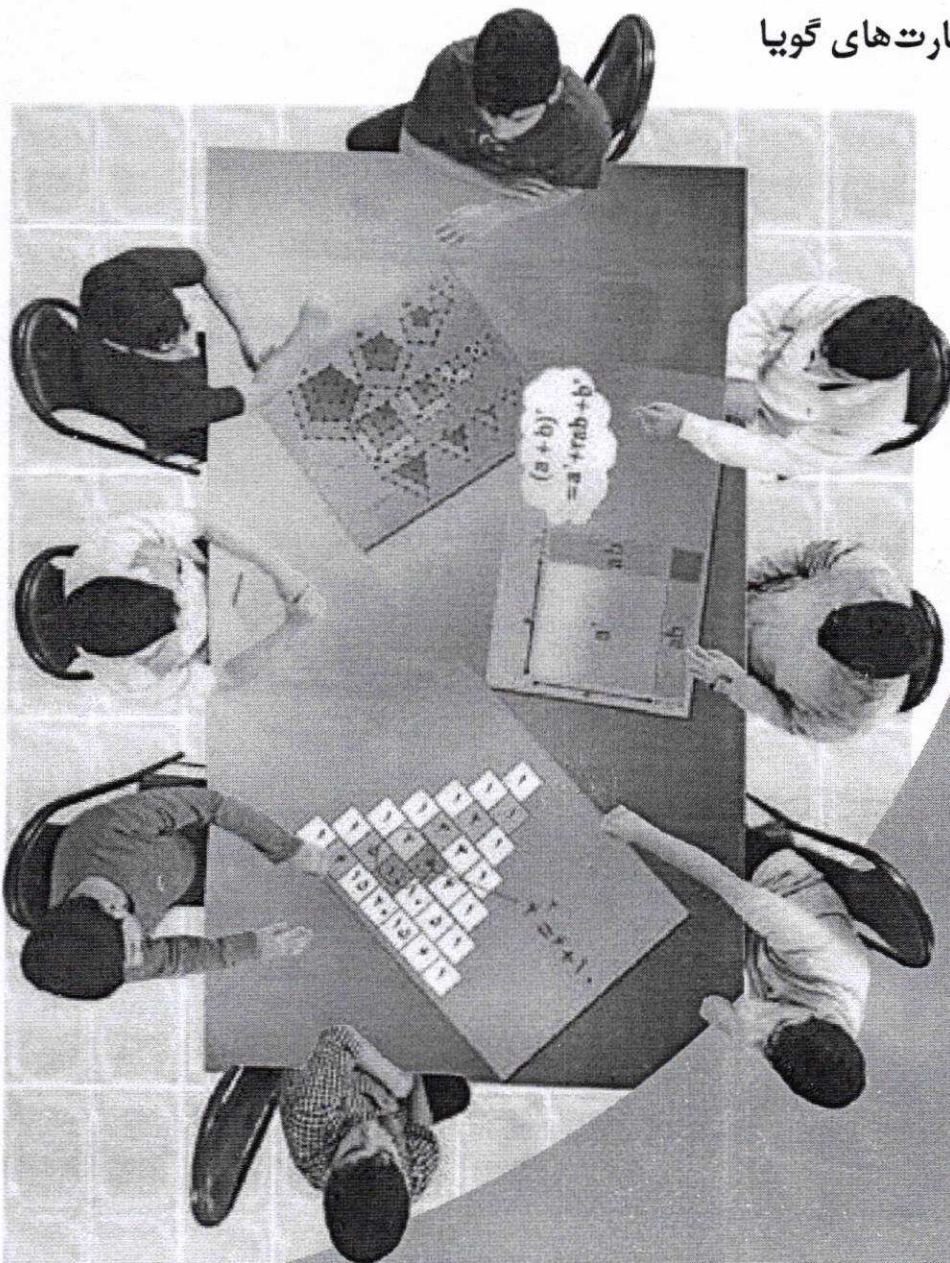


فصل اول

عبارت‌های جبری

درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها

درس ۲ عبارت‌های گویا



درس ۱

چند اتحاد جبری و کاربردها

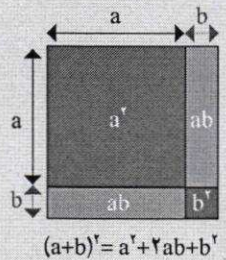
در سال قبل، با اتحادهای زیر آشنا شدید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

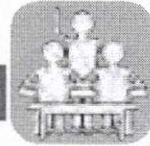
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$



کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(3a-1)^2 = 9a^2 - 6a + 1$

پ) $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 + 2b + \frac{1}{2}b^2$

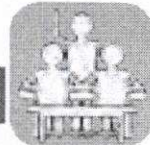
ت) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$

ث) $(x+4)(x+3) = x^2 + 7x + 12$

ج) $(3x+2)(3x-5) = 9x^2 - 9x - 10$

ح) $(x+10)(x+2) = x^2 + 12x + 20$

کار در کلاس

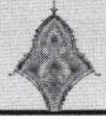


با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$

تهیه کنندگان:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

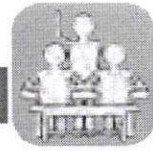


مثلث خیام^۱

در اینجا باید به رخداد مهمی که با شناسایی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت بپردازیم. می‌دانیم که صورت بسط یافته دوجمله‌ای به طراحی مثلثی عددی می‌انجامد که پیش‌ازین مثلث نیوتن-پاسکال نامیده می‌شد.

در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از خود پرسیدند: «آیا ممکن است این روش بسط دوجمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد؟» نخستین بررسی‌ها به حضور ابن‌سبط در کتاب مفتاح الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیرالدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب جوامع الحساب طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌ها نیز ردپای این بسط را به کتاب جبر و مقابله خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین‌های اسلامی و حدود شش قرن قبل از نیوتن، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.

۱. حکیم، عمر خیام - علی اکبر ولایتی، انتشارات آفتاب، تهران، ۱۳۸۱.



کار در کلاس

عبارت جبری $(a+b)^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$

$$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

برای ساده کردن $(a+b)^4$ ، چگونه عمل می‌کنید؟ آیا این پرسش را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ نیز

طرح کرد؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت‌های حاصل ضرب، جواب نهایی را به دست

آورد؟

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = \dots$$

فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست.

می‌توان برای توان‌های بیشتر چنین عمل کرد ولی مراحل طولانی خواهد شد.



فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید.

	$(a+b)^0 = 1$
۱ ۱	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
۱ ۲ ۱	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
۱ ۳ ۳ ۱	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	$(a+b)^4 = \square a^4 + \square a^3b + \square a^2b^2 + \square ab^3 + \square b^4$
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
.	.
.	.
.	.

۱. در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

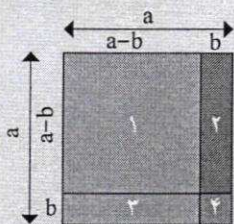
هر عدد سطر سوم از جمع دو عدد بالای آن در سطر دوم به دست می‌آید.
 هر عدد سطر چهارم از جمع دو عدد بالای آن در سطر سوم به دست می‌آید.
 هر عدد سطر پنجم از جمع دو عدد بالای آن در سطر چهارم به دست می‌آید.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



آفرینش، دفترش تا باز شد
با «حساب» و «هندسه» آغاز شد
دستِ حق تا نقشِ عالم می نگاشت
در میراث «دایره»، «بی» می گذاشت
شکل های هندسی و «منظم»
او نهاده در نهادِ هر قلم
با «مثلث»، «دایره»، یا «مستطیل»
می شود اندام این عالم شکیل!
آسمان، از اختران پر کرده است
روز و شب را در «تناظر» کرده است
این همه مجموعه های بی نظیر
که کشتان های «شمارش ناپذیر»!
نظم این اعداد، در اوج کمال
در تناسب گشته عالم، بی مثال
زلف عالم تا بریشان می شود
این ریاضی، شانه های آن می شود!
با به استقراء و یا «برهان خلف»
می شود نشانه، پریشانی زلف!
باز، بین جغرافیای بی حدود
کوه ها بر دشت ها گشته «عمود»!
از حیات و از جماد و از نبات
پُر نمود این «دستگاه مختصات»



مساحت مربع:

$$s_1 = (a-b)^2 \quad (1)$$

$$s_1 = s - s_2 - s_3 - s_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \quad (2)$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

(1) و (2) $\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

بعضی از محاسبات عددی را می توان با کمک اتحادها، به راحتی انجام داد. تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $(999)^2 = (1000-1)^2 = \dots = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$

ب) $96 \times 104 = (100-4)(100+4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984$

پ) $(100+2)^2 = \dots = 100^2 + 2(100 \times 2) + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته اید.

ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می رسد؟ لطفاً توضیح دهید.

ت) $507 \times 493 = (500+7)(500-7) = 500^2 - 7^2 = 250000 - 49 = 249951$

ث) در حساب کردن مساحت مربع

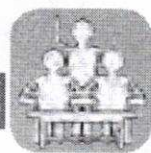
ب) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2(\frac{1}{3})x + (\frac{1}{3})^2 = (x + \frac{1}{3})^2$

پ) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1)$

ت) $y^2 + 3y - 10 = y^2 + (5-2)y - (5)(2) = (y-2)(y+5)$

ث) $9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6 \times (3x) + 8$
 $= (3x)^2 + (2 \times 3 + 2 \times 3)(3x) + (2)(4)$
 $= (3x+2)(3x+4)$

کار در کلاس

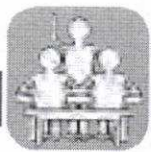


عبارت های جبری زیر را به صورت ساده ترین حالت، تجزیه کنید.

الف) $12x^2(x^2+6) - 8x^5(x^2+6)^2$
 $= 4x^5(x^2+6)^2(3x^2-2(x^2+6))$
 $= 4x^5(x^2+6)^2(x^2-12)$
 $= 4x^5(x^2+6)^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})$

ب) $x^4 - 64x^4 = x^4(x^4 - 64)$
 $= x^4(x^2 - 8)(x^2 + 8)$
 $= x^4(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})(x^2 + 8)$

کار در کلاس



بعضی از محاسبات عددی را می توان با کمک اتحادها، به راحتی انجام داد. تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $(999)^2 = (1000-1)^2 = \dots = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$

ب) $96 \times 104 = (100-4)(100+4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984$

پ) $(100+2)^2 = \dots = 100^2 + 2(100 \times 2) + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته اید.

ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می رسد؟ لطفاً توضیح دهید.

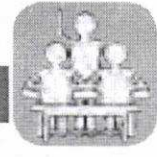
ت) $507 \times 493 = (500+7)(500-7) = 500^2 - 7^2 = 250000 - 49 = 249951$

ث) در حساب کردن مساحت مربع

$$* 2^{10} = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1$$

$$= 1024$$

کار در کلاس



در تساوی های زیر، به جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید:

$1 = 2^0$

$1 + 1 = 2^1$

$1 + 2 + 1 = 2^2 \rightarrow 2$

$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \rightarrow 3$

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \rightarrow 4$

- چه ارتباطی بین توان های عدد ۲ و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟ *توان عدد ۲، یکی کمتر از شماره سطر است.*
- آیا می توانید الگویی برای توان های عدد ۲، بر حسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟ *اگر n شماره سطر باشد ۲ⁿ⁻¹*
- بر اساس این الگو مقدار ۲^{۱۰} را به دست آورید. *

- آیا می توانید مانند الگوی بالا، الگوهای دیگری از مثلث خیام حدس بزنید؟ *توان n ام عدد ۲ برابر است با جمع اعداد سطر (n+1) ام مثلث خیام*

کار در کلاس



توان های مختلف ۱۱ را، به دست آورید.

$11^0 = 1$

$11^1 = 11$

$11^2 = (1+10)^2 = 1 + 2 \times 10 + 10^2 = 1 + 20 + 100 = 121$

$11^3 = (1+10)^3 = \dots + \dots + \dots = 1 + 30 + \dots + 1000 = 1331$

$11^4 = (1+10)^4 = 1 + 4 \times 10 + \dots + \dots + 10^4 = 14641$

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در ۱۱^۲ و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟ *توان ۲ عدد ۱۱ از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر سوم مثلث خیام به دست می آید.*
- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در ۱۱^۳ و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟ *توان ۳ عدد ۱۱ از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر چهارم مثلث خیام به دست می آید.*
- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در ۱۱^۴ و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟ *توان ۴ عدد ۱۱ از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر پنجم مثلث خیام به دست می آید.*
- آیا می توانید بدون هیچ گونه محاسبه ای ۱۱^۵ را بر حسب اعداد واقع در سطر ششم مثلث خیام به دست آورید؟

چه نتیجه ای می توانید برای توان های مختلف ۱۱، بگیرید؟ *

$$11^5 = 161051$$

* توان n ام عدد ۱۱ برابر است با عددی که از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر (n+1) ام مثلث خیام به دست می آید.

نکته: اگر عددی از این بیشتر باشد واحد اول محاسبه میشود و بقیه قبل از آن ضاعف میشود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۷ سطر ۱ ۴ ۱۵ ۳۵ ۷۰ ۱۲۶ ۲۱۷ ۲۸۰ ۳۱۵ ۳۵۰ ۳۸۵ ۴۰۶ ۴۰۱
۶ سطر ۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

۲. آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟

۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در سمت راست وجود دارد؟ به ترتیب از چپ به راست با هم برابرند

۴. آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^4$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟
 $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

۵. آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید؟
 $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های $(a+b)^n$ وجود دارد؟ ضرایب توان $(a+b)^n$ برابر اعداد سطر $(n+1)$ ام سطرهای واقع در مثلث خیام است.

۷. با توجه به اینکه $a-b = a+(-b)$ ، حاصل عبارت $(a-b)^3$ را بر اساس اتحاد $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

به دست آورید.

با توجه به مثلث خیام، اتحادهای زیر را خواهیم داشت:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

کار در کلاس

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

الف) $(2a+1)^3 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$

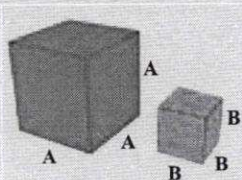
ب) $(\frac{1}{3}a - 2)^3 = \frac{1}{27}a^3 - 3(\frac{1}{3}a)^2(2) + 6a - 8$

پ) $(4a - 2b)^3 = 64a^3 - 96a^2b + 48ab^2 - 8b^3$

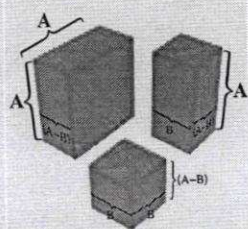
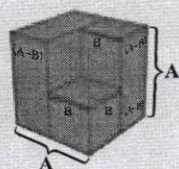
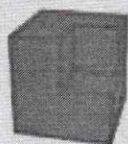
ت) $(\frac{3}{8}a + \frac{1}{4})^3 = 27a^3 + \dots + \frac{1}{8}$

$$* (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

(جمله اول - جمله دوم) (مربع + جمله درجه دوم + جمله درجه سوم) = جمله اول - جمله دوم

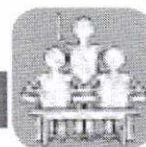


$$A^3 - B^3$$



$$(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$$

کار در کلاس



با توجه به اتحادهایی که تاکنون آموخته‌اید، اتحادهای زیر را با استفاده از حاصل ضرب عبارت‌های جبری بررسی کنید و تساوی دوطرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید. *

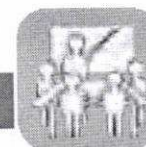
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

فعالیت



با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

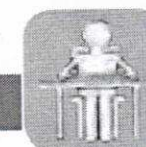
$$8y^3 - 1 = (2y)^3 - 1^3 = (2y-1)((2y)^2 + (2y) + 1) \\ = (2y-1)(4y^2 + 2y + 1)$$

$$8a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3 = (2a+1)((2a)^2 - 2a + 1) =$$

$$8a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3 = (2a+b)((2a)^2 - 2ab + b^2)$$

$$t^6 - \frac{1}{8} = (t^2)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)\left(t^4 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}\right)$$

تمرین



۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x-1)^2, \left(y + \frac{1}{4}\right)^2, \left(2 - \frac{a}{3}\right)^2, \left(2z - \frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4} + \frac{b}{3}\right)^2$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a + \sqrt{2})^2 = a^2 + \dots + 2$$

$$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + \dots$$

$$(\sqrt{3} + x)^2 = 3\sqrt{3} + \dots + 3\sqrt{3}x^2 + \dots$$

۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1, 1 + z^2, 8 - t^6$$

$$9x^2 - 6x + 1$$

$$25x^2 + 25x + 6$$

$$4x^2 + 14x + 12$$

۴. کدام یک از عبارت‌های زیر، نشان‌دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای است؟

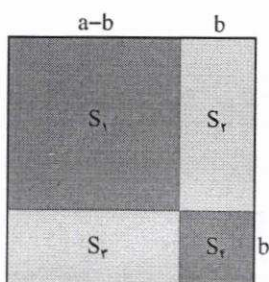
$$(3x + 5)(9x^2 - 20x + 15), (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(4x + y)(16x^2 + 4xy + y^2), (7x - 2)(49x^2 + 14x + 4)$$

۵. عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین عبارت‌ها تجزیه کنید.

$$\text{الف) } 12x^6(x^2 + 5)^2 - 10x^4(x^2 + 5)^4$$

$$\text{ب) } x^8 - 625x^4$$



۶. مربع روبه‌رو را که اندازه، ضلع آن a است، در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با S است. ضلع آن را به دو پاره خط تقسیم کنید و طول یکی را b در نظر بگیرید.

الف) مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 را به دست آورید.

ب) مساحت S را برحسب مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 و S به دست آورید.

پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

۷. با استفاده از اتحادهایی که آموختید، عبارت‌های عددی زیر را به دست آورید.

$$(1001)^2 = \dots$$

$$(99)^2 = (100 - 1)^2 = \dots$$

$$(x-1)^r = (x)^r - r(x)(1) + (-1)^r = x^r - rx + 1$$

(-1)

$$(y + \frac{1}{r})^r = (y)^r + r(y)(\frac{1}{r}) + (\frac{1}{r})^r = y^r + \frac{1}{r}y + \frac{1}{r^r}$$

$$(r - \frac{a}{r})^r = (r)^r - r(r)(\frac{a}{r}) + (\frac{a}{r})^r = r^r - \frac{r}{r}a + \frac{a^r}{r^r}$$

$$(rz - \frac{1}{r})^r = (rz)^r - r(rz)(\frac{1}{r}) + r(rz)(\frac{1}{r})^r - (\frac{1}{r})^r = r^r z^r - rz + \frac{r}{r^r}z - \frac{1}{r^r}$$

$$(\frac{1}{r} + \frac{b}{r})^r = (\frac{1}{r})^r + r(\frac{1}{r})(\frac{b}{r}) + r(\frac{1}{r})(\frac{b}{r})^r + (\frac{b}{r})^r = \frac{1}{r^r} + \frac{1}{r}b + \frac{1}{r^r}b^r + \frac{b^r}{r^r}$$

$$(a + \sqrt{r})^r = a^r + r\sqrt{r}a + r$$

$$(1 - rx)^r = 1 - rx + rx^r$$

$$(\sqrt{r} + x)^r = r\sqrt{r} + rx + r\sqrt{r}x^r + x^r$$

(-2)

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x+1)(x^r - x + 1)(x-1)(x^r + x + 1)$$

(-3)

$$1 + z^r = (1+z)(1-z+z^r)$$

$$1 - t^r = (r - t^r)(r + rt^r + t^r) = (\sqrt{r} - t)(\sqrt{r} + t)(r + rt^r + t^r)$$

$$rx^r - rx + 1 = (rx - 1)^r$$

\downarrow \downarrow
 $(rx)^r$ $r(rx)$ $(-1)^r$

$$r\omega x^r + r\omega x + r = (\omega x + r)(\omega x + r)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $(\omega x)^r$ $r(\omega x)$ $(+r)(+r)$

$$rx^r + rrx + rr = (rx + r)(rx + r)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $(rx)^r$ $r(rx)$ $(r)(r)$

(ع)

$$\times (x^2 + a)(9x^2 - 2ax + 1a) \rightarrow \text{با } -1ax \text{ باشد}$$

$$\checkmark (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\times (\epsilon x + y)(14x^2 + \epsilon xy + y^2) \rightarrow \text{با } -\epsilon xy \text{ باشد}$$

$$\checkmark (\sqrt{x} - 2)(\epsilon 9x^2 + 1\epsilon x + \epsilon)$$

(د)

$$\text{الف) } S_1 = (a-b)^r = a^r - rab + b^r$$

$$S_2 = b(a-b) = ab - b^r$$

$$S_3 = (a-b)b = ab - b^r$$

$$S_4 = (b)^r = b^r$$

$$\text{ب) } S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (a^r - rab + b^r) + (ab - b^r) + (ab - b^r) + (b^r) = a^r$$

$$\text{ج) } (a-b)^r + r(a-b)(b) + b^r = a^r \Rightarrow$$

$$(a-b)^r = a^r - b^r - r(a-b)(b) \Rightarrow (a-b)^r = a^r - b^r - rab + rb^r$$

$$\Rightarrow (a-b)^r = a^r - rab + b^r$$

(د)

$$\text{الف) } 12x^2(x^2+a)^3 - 10x^2(x^2+a)^2 = 2x^2(x^2+a)^2 [4x^2 - a(x^2+a)]$$

$$= 2x^2(x^2+a)^2 (x^2 - 2a) = 2x^2(x^2+a)^2 (x-a)(x+a)$$

$$\text{ب) } x^4 - 42ax^2 = x^2(x^2 - 42a) = x^2(x^2 + 2a)(x^2 - 2a)$$

$$= x^2(x^2 + 2a)(x+a)(x-a)$$

$$\text{✓) } (1001)^3 = (1000+1)^3 = (1000)^3 + 3(1000)^2(1) + 3(1000)(1) + (1)^3 = 1000000000 + 3000000 + 3000 + 1$$

$$= 1003003001$$

$$(99)^3 = (100-1)^3 = (100)^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1) - (1)^3$$

$$= 1000000 - 300000 + 300 - 1 = 970299$$

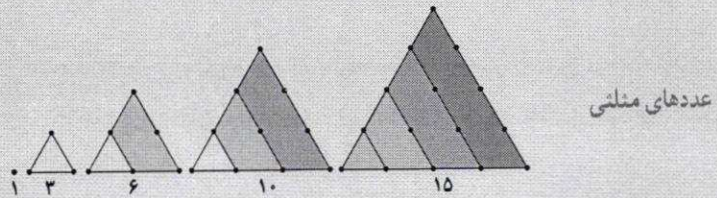
خواندنی

ابوعلی سینا، دانشمند مسلمان ایرانی که در قرن سوم و چهارم هجری قمری زندگی می‌کرده است، در کتاب شفا، از اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی و ... سخن گفته است و دربارهٔ خواص آنها، نکاتی را ذکر کرده است.

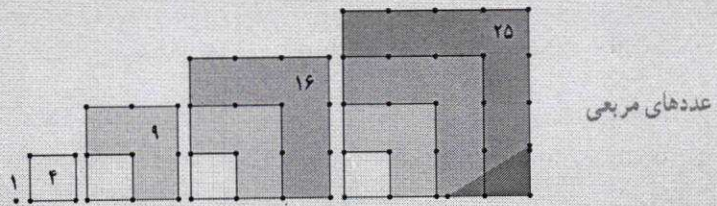
در زیر اعداد مثلثی و اعداد مربعی، به همراه جمله‌ای به زبان خود ابوعلی سینا در مورد رابطهٔ بین این اعداد آمده است.

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید ۱، ۶، ۳، ۱۰، ۱۵، ۱۰، ۱، ... اعداد مثلثی و ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ... اعداد مربعی اند.

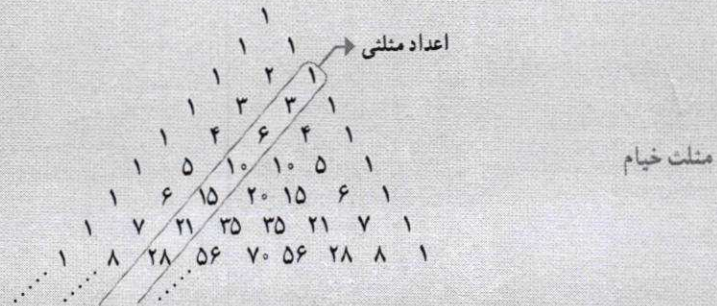
حال مثلث خیام را یک بار دیگر نگاه کنید.



این اعداد در این مثلث قابل مشاهده‌اند و می‌توان یک الگو براساس اعداد واقع در مثلث خیام برای سایر اعداد به‌دست آورد.



فَيَكُونُ كُلُّ مُرَبَّعٍ مِّنْ مُّثَلَّثَةٍ فِي ذَرَجَتِهِ وَ مُثَلَّثَةٌ أُنْقَضَتْ مِّنْ ذَرَجَتِهِ بِوَاجِدٍ
مجموع هر عدد مثلث و عدد مثلث ما قبل آن مساوی است با عدد مربع همان مرتبه



چگونه می‌توانید ارتباط بین اعداد مثلثی، اعداد مربعی و اعداد مخمسی از طریق مثلث خیام به‌دست آورید؟

درس ۲

عبارت‌های گویا

در سال گذشته با عبارت‌های گویا و ساده کردن آنها، همچنین با جمع و تفریق این عبارت‌ها آشنا شدید. از آنجا که امسال، چند اتحاد دیگر را آموختید، در ادامه به یادآوری و تکمیل این مطالب می‌پردازیم. کسرهایی را که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. اگر صورت یا مخرج کسری، پس از ساده شدن، چند جمله‌ای نباشد، در این صورت آن عبارت گویا نیست.

فعالیت



عبارت‌های گویا را با و عبارت‌های غیرگویا را با مشخص کنید.

$$\sqrt{x^2+1} \quad \text{[X]}$$

$$\frac{1}{x^2-\sqrt{2}} \quad \text{[V]}$$

$$\frac{x-3}{2x^2-3x+5} \quad \text{[V]}$$

$$\frac{x+y}{3\sqrt{z}} \quad \text{[X]}$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{x} \quad \text{[V]}$$

$$x^2+3x-4 \quad \text{[V]}$$

$$\frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{[V]}$$

$$\sqrt{x} \quad \text{[X]}$$

$$\frac{|x|}{x^2+2} \quad \text{[X]}$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنا است که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت گویای $\frac{x+2}{x-5}$ به ازای $x=5$ تعریف نشده است؛ زیرا با قراردادن $x=5$ در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

تهیه کننده:

به ازای $z = \frac{5}{3}$ تعریف شده است. $3z = 5$ $z = \frac{5}{3}$ $3z - 5 = 0$ (الف)

به ازای $a = 2$ تعریف شده است. $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$
 $a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$
 به ازای $a = -2$ تعریف شده است. $(a-2)(a+2) = 0$
 به ازای $a = 2$ تعریف شده است. $a^2 - 4 = 0$ (ت)
 به ازای $x^2 + 1 \neq 0$ تعریف شده است. (ج)



کار در کلاس

کدام یک از عبارت های زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند؟ عبارت های گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده اند؟

الف) $\frac{3z+5}{3z-5}$ ✓

ب) $\frac{x+9}{\sqrt{x-3}}$ ✗

پ) $\frac{4x^2-5x+1}{7\sqrt{2}}$ ✓

ت) $\frac{a^2+3}{a^2-4}$ ✓

ث) $\frac{x\sqrt{x+1}}{3-x}$ ✗

ج) $\frac{5x^2+1}{x^2+1}$ ✓

ساده کردن عبارت های گویا

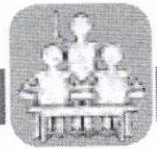
اگر a و b و k عددهایی حقیقی باشند؛ به طوری که $k \neq 0$ در این صورت داریم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad (k, b \neq 0)$$

زیرا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $k, k \neq 0$ کسر را ساده کرده ایم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\cancel{k}a}{\cancel{k}b} = \frac{a}{b}$$

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تجزیه کنیم، سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر، عبارت گویا ساده می شود. (یادآوری می کنیم، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می زنیم باید مخالف صفر باشد.)



کار در کلاس

۱. مانند نمونه های حل شده، کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$

صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده ایم.

$$= \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$$

با شرط $x+3 \neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x+3)$ را خط زده ایم. توجه کنید که برای با معنی بودن کسر باید $x-3 \neq 0$ باشد.

$$= \frac{(x+3)}{(x-3)} \quad (\text{ساده شده کسر})$$

$$\text{ب) } \frac{x^2-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد
تفاضل مکعب دو جمله‌ای و مخرج کسر
را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

با شرط $x-1 \neq 0$ از صورت و مخرج
کسر عامل $(x-1)$ را خط بزنید. توجه کنید
که برای با معنی بودن کسر باید $x+1 \neq 0$
باشد.

$$= \frac{x^2+x+1}{x+1} \text{ (ساده شده کسر)}$$

$$\text{ب) } \frac{4x^2-9}{4x^2+10x+6} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+2)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$\text{ت) } \frac{x^3-8x}{2x^2-8x+8} = \frac{x(x^2-8)}{2(x^2-4x+4)} = \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)(x-2)} = \frac{x(x^2+2x+4)}{2(x-2)}$$

$$\text{ث) } \frac{6x^5(x^2+4)^2 - 4x^3(x^2+4)^3}{x^4 - 16x^4}$$

۲. کسر زیر به صورت نادرست ساده شده است. ایراد آن را پیدا کنید و درباره آن توضیح دهید.

$$\frac{2x^2+y^2}{y^2} = \frac{2x^2+y^2}{y^2} = 2x^2+1$$

فقط اگر بین عوامل صورت و مخرج ضرب باشد می‌توان جملات را ساده کرد.

۳. فرض کنیم $x=1$ است، دانش آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که $2=1$ است استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$$x=1$$

$$x^2=x$$

$$x^2-1=x-1$$

چون بر عامل صفر تقسیم کرده است.

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1$$

$$x+1=1 \xrightarrow{x=1} 2=1$$

$$\text{ث) } \frac{6x^5(x^2+4)^2 - 4x^3(x^2+4)^3}{x^4 - 16x^4} = \frac{2x^3(x^2+4)^2 (3x^2 - 2(x^2+4))}{x^4(x^4-16)}$$

$$= \frac{2x^3(x^2+4)^2(x^2-8)}{x^4(x^4-16)} = \frac{2(x^2+4)(x^2-8)}{x(x^2-4)}$$

$$1) P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$$

$$5) \frac{A(x)}{P(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)^2} = (x+4), \quad \frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)(x+4)} = (x-1)$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا باید «مخرج مشترک» گیری کنیم. برای این منظور ابتدا با انجام فعالیت زیر مفهوم مخرج مشترک را درک می‌کنید؛ سپس در ادامه جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌آید.



فعالیت

چند جمله‌ای‌های $P(x) = x^2 - 2x + 1$ و $Q(x) = x^2 + 5x - 6$ را در نظر بگیرید.

۱. چند جمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.

۲. عبارت‌های مشترک در تجزیه این دو چند جمله‌ای را مشخص کنید. $x-1$

۳. عبارت‌های غیرمشترک در تجزیه این دو چند جمله‌ای را مشخص کنید. $(x+4)$

۴. حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیرمشترک پیدا کنید و آن را

$$A(x) = (x-1)^2(x+4)$$

بنامید.

۵. عبارت‌های $\frac{A(x)}{Q(x)}$ ، $\frac{A(x)}{P(x)}$ را ساده کنید.

۶. با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است؟ **بله**

۷. آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید؟ **بله ***

۸. از بین مضرب‌های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک نسبت به متغیر x درجه کوچک‌تری

دارد؟ $A(x)$

مضرب مشترک دو عبارت $(x+1)$ ، $(x-1)$
چند جمله‌ای (x^2-1)
است. از طرفی $(x^2-1)^2$
یا $(x^2-1)^3$ یا $(x^2-1)^4$
مضرب‌های مشترک این دو
عبارت هستند، اما (x^2-1)
مضرب مشترکی است که
نسبت به متغیر x از درجه
کوچک‌تر است.

برای پیدا کردن مضرب مشترک دو چند جمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ به طوری که نسبت به x از کوچک‌ترین درجه باشد، ابتدا هریک از چند جمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیرمشترک را به دست می‌آوریم و آن را $A(x)$ می‌نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج‌های آنها $P(x)$ و $Q(x)$ باشند؛ عبارت $A(x)$ را مخرج مشترک دو کسر تعریف می‌کنیم.

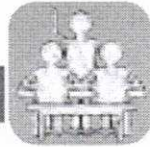
$$1) \text{ مثل } (x-1)^2(x+4)$$

$$2) \text{ مثل } (x-1)^4(x+4)^2$$

$$3) \text{ مثل } (x-1)^2(x+4)$$

$$4) \text{ مثل } (x-1)^4(x+4)(x+3)$$

* (V)



۱. در هر قسمت مضرب مشترکی از چند جمله‌ای‌ها را به دست آورید؛ به طوری که نسبت به متغیر a آن کوچک‌ترین توان را داشته باشد.

الف) $P(x) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$
 $Q(x) = a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$
 $P \cdot Q = (a+3)^2(a-3)$

ب) $P(x) = a^2 - b^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a-b)(a+b)$
 $Q(x) = a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
 $P \cdot Q = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

پ) $P(x) = a^2 + 2a^2 - 3a^2 = a^2(a^2 + 2a - 3) = a^2(a-1)(a+3)$
 $Q(x) = a^2 + 8a^2 + 15a = a(a^2 + 8a + 15) = a(a+3)(a+5)$

اشتباه جایی (باید ۱۵ باشد)

جواب = $a^2(a+3)(a-1)(a+5)$

حاصل ضرب عبارات غیر مشترک
 حاصل ضرب عبارات مشترک با بزرگ‌ترین توان

۲. برای جمع و تفریق عبارات‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. مخرج مشترک همان مضرب مشترک بین مخرج‌ها با کوچک‌ترین توان نسبت به x است. در زیر مخرج مشترک کسرها را مانند نمونه پیدا کنید.

الف) $\frac{4}{x^2+x} + \frac{1}{(x^2-1)(x+1)}$
 $A(x) = x^2 + x = x(x+1)$
 $B(x) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$
 مخرج مشترک = $x(x-1)(x+1)^2$

ب) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2}$
 $P \cdot Q = (x-3)(x+2)$

مخرج کسر اول = $x-3$

مخرج کسر دوم = $x+2$

پ) $\frac{1}{x^4-8x} - \frac{1+x}{x^2} + \frac{x+2}{x-2}$

مخرج کسر اول = $x^4 - 8x = x(x^3 - 8) = x(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

مخرج کسر دوم = x^2

$P \cdot Q = x^2(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

مخرج کسر سوم = $x-2$



فعالیت

عبارت $P(x) = \frac{4}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:

$$\text{مخرج مشترک} = x(x-1)(x+1)$$

$$P(x) = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \quad \text{زیرا:}$$

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

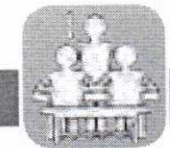
$$\frac{4}{x(x+1)} = \frac{4(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x)}{(x-1)(x+1)(x)}$$

۳. همان طور که می بینید، مخرج کسرهای اول و دوم یکسان شده اند. در زیر این دو کسر را با هم جمع کرده ایم، جای خالی را پر کنید.

$$P(x) = \frac{4(x-1) + x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x - 4 + x^2}{x(x-1)(x+1)}$$



کار در کلاس

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

می دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر است با: $(x+1)(x-1)$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

$$x^2 - 1 = \leftarrow$$

$$* \text{ت) } \frac{2n+3}{2n-2} - \frac{5}{n^2-1} - \frac{2n-3}{2n+2} = \frac{2n+3}{2(n-1)} - \frac{5}{(n-1)(n+1)} - \frac{2n-3}{2(n+1)}$$

$$= \frac{(2n+3)(n+1) - 5(2) - (2n-3)(n-1)}{2(n-1)(n+1)} = \frac{2n^2+2n+2n+3-10-2n^2+2n+3n-3}{2(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{2n-10}{2(n-1)(n+1)} = \frac{2(n-5)}{2(n-1)(n+1)} = \frac{n-5}{(n-1)(n+1)}$$

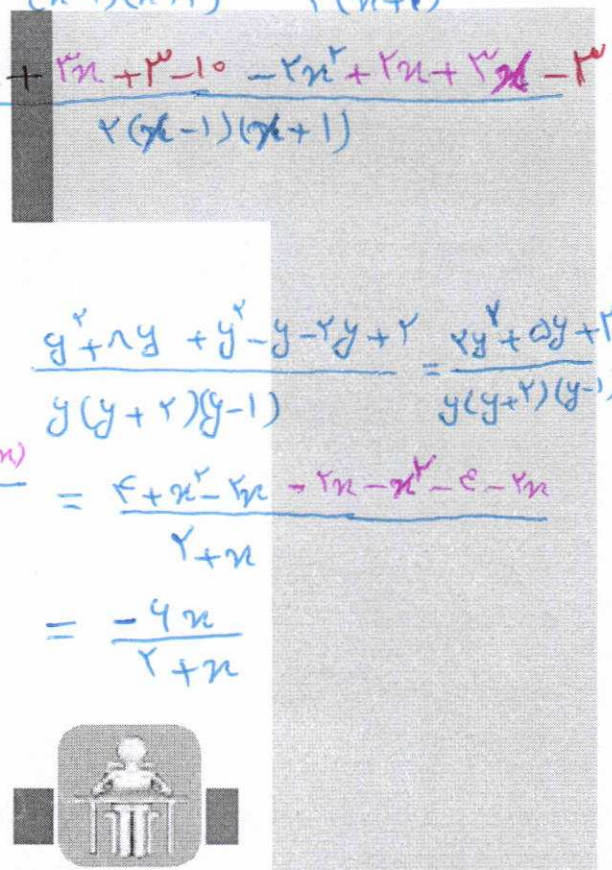
$$\text{ب) } \frac{y+1}{y^2+y-2} + \frac{y-2}{y^2+2y} = \frac{y+1}{(y+2)(y-1)} + \frac{y-2}{y(y+2)}$$

$$= \frac{(y+1)y}{y(y+2)(y-1)} + \frac{(y-2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y^2+y+y^2-2y+2}{y(y+2)(y-1)} = \frac{2y^2-2y+2}{y(y+2)(y-1)}$$

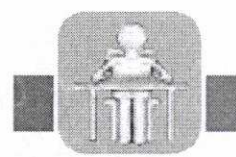
$$\text{ب) } \frac{4+x^2-2x}{2+x} - \frac{x-2}{1} = \frac{4+x^2-2x+(-x-2)(2+x)}{2+x} = \frac{4+x^2-2x-2x-2x^2-4-2x}{2+x}$$

$$= \frac{-x^2-4x-2}{2+x}$$

$$* \text{ت) } \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} - \frac{2x-3}{2x+2} = \frac{-4x}{2+x}$$



تمرین



۱. عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

ب) $\frac{2x^2+1}{x^2+4}$

پ) $\frac{5}{x^2+x}$

ت) $\frac{x^2+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$

ث) $\frac{3x^2y+6xy^2}{x^2}$

ج) $\frac{42a^3-3a^2m}{am^2-25a}$

ح) $\frac{b^2x^2-ab^2x^2}{a^2b^2x^2-a^2b^2x}$

خ) $\frac{x^6-a^6}{ax^3-a^3x}$

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1$

ب) $\frac{x+1}{x-1} - 1$

پ) $\frac{1}{m} + 1$

ت) $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

ث) $\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x}$

ج) $\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y}$

تهیه کننده:

۱) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$ ①
 به ازای $x=1, x=-1$ تعریف شده است.

ب) $x^2 + 4 \neq 0$ به ازای تمام اعداد تعریف شده است.

۲) $x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$
 به ازای $x=0, x=-1$ تعریف شده است.

۳) $x(x+1)(x^2-4) = 0 \quad x(x+1)(x-2)(x+2) = 0$
 $x=0$
 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$
 $x-2=0 \Rightarrow x=2$
 $x+2=0 \Rightarrow x=-2$
 به ازای $x=0, x=-1, x=2, x=-2$ تعریف شده است.

ث) $x^2 = 0 \Rightarrow x=0$ به ازای $x=0$ تعریف شده است.

۴) $am^2 - 2da = 0 \quad a(m^2 - 2d) = 0 \quad a(m-d)(m+d) = 0$

$a=0$
 $m-d=0 \Rightarrow m=d$
 $m+d=0 \Rightarrow m=-d$
 به ازای $m=d, m=-d, a=0$ تعریف شده است.

۵) $a^2 b^2 x^2 - a^2 b^2 x = 0 \quad a^2 b^2 x(x-a) = 0$
 $a^2 = 0 \Rightarrow a=0$
 $b^2 = 0 \Rightarrow b=0$
 $x=0$
 $x-a=0 \Rightarrow x=a$
 به ازای $x=a, x=0, b=0, a=0$ تعریف شده است.

۶) $ax^3 - a^3 x = 0 \Rightarrow ax(x^2 - a^2) = 0 \quad ax(x-a)(x+a) = 0$
 $a=0$
 $x=0$
 $x-a=0 \Rightarrow x=a$
 $x+a=0 \Rightarrow x=-a$
 به ازای $x=a, x=0, a=0, x=-a$ تعریف شده است.

۷) $\frac{f}{ax} - \frac{ax}{y^2} + 1 = \frac{f(y^2)}{xy^2} - \frac{ax^2}{y^2} + 1 = \frac{f(y^2) - ax^2 + 1(y^2)}{xy^2} = \frac{y^2 - ax^2 + 1y^2}{xy^2}$ ②

$$ب) \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1(x-1)}{1(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$د) \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{1}}{m+1} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1(m)}{1(m)}}{m+1} = \frac{\frac{1+m}{m}}{\frac{m+1}{1}} = \frac{1(1+m)}{m(1+m)} = \frac{1}{m}$$

$$ح) \frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{1(x-y)}{(x+y)(x-y)} - \frac{1(x+y)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{2x + x - y - x - y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x - 2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x+y}$$

$$ع) \frac{x+3}{x^2-4x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} - \frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$- \frac{5(x-3)(x+3)}{-(x-3)(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+4x+9 - x^2+x+4 + 5x^2-55}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{5x^2+4x-30}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$ز) \frac{y-2}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y} = \frac{(y-2)(y-2)}{(y-2)(y+2)(y-2)} - \frac{(y+2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)} - \frac{2(y-2)(y+2)}{-(y-2)(y-2)(y+2)}$$

$$= \frac{y^2-4y+4 - y^2-4y-4 + 2y^2-8}{(y-2)^2(y+2)} = \frac{2y^2-9y-4}{(y-2)^2(y+2)}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

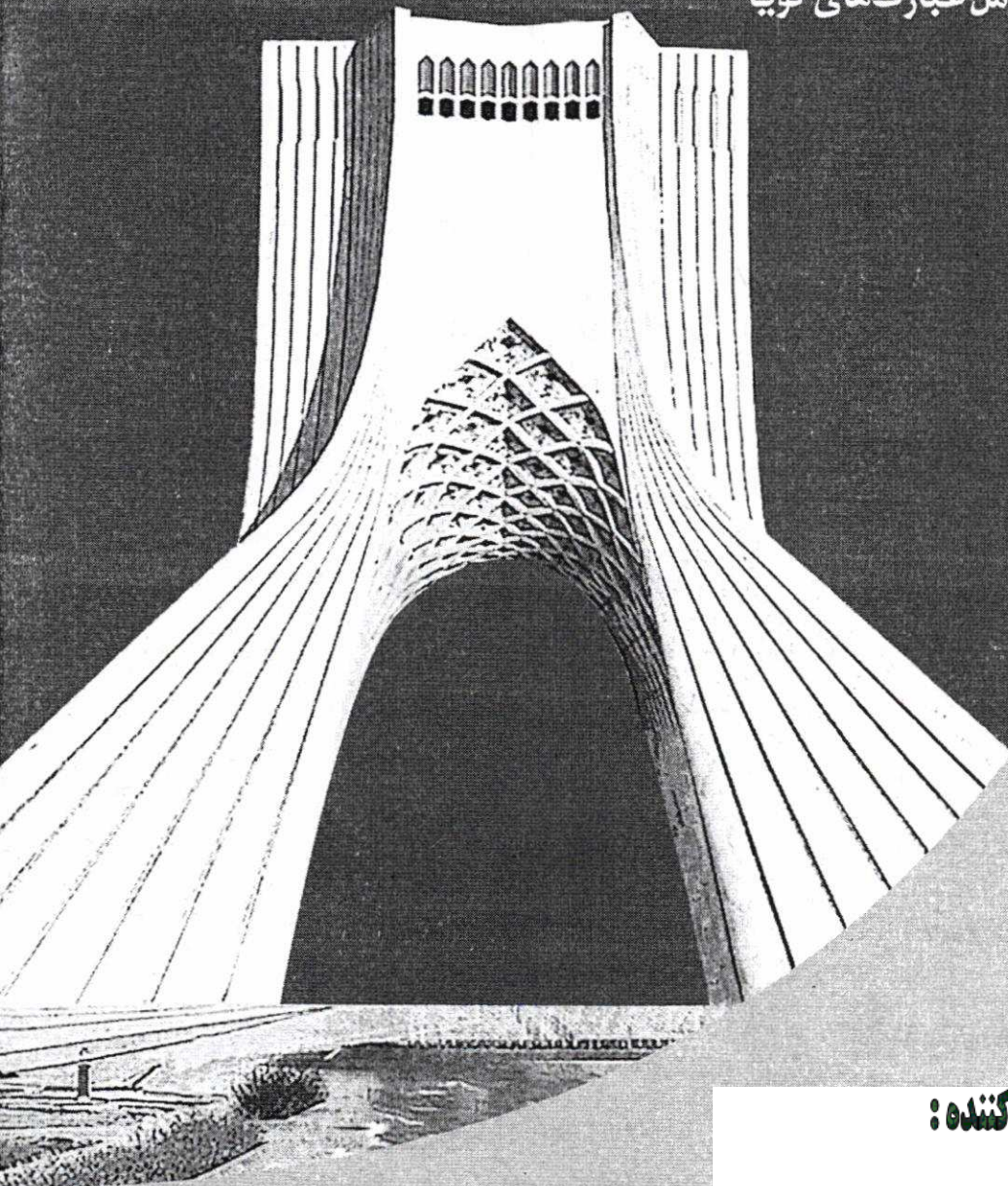
فصل دوم

معادله درجه دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۳ معادلات شامل عبارت‌های گویا



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس ۱

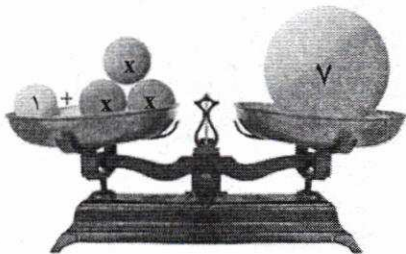
معادله و مسائل توصیفی

معادله $4x + 2 = 10$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای $x = 2$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود. $x = 2$ را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



$$1 + 3x = 7$$

$$3x = 7 - 1 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

فعالیت



عدد $x = ?$ را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار، معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:

هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید. (چرا؟) چون:

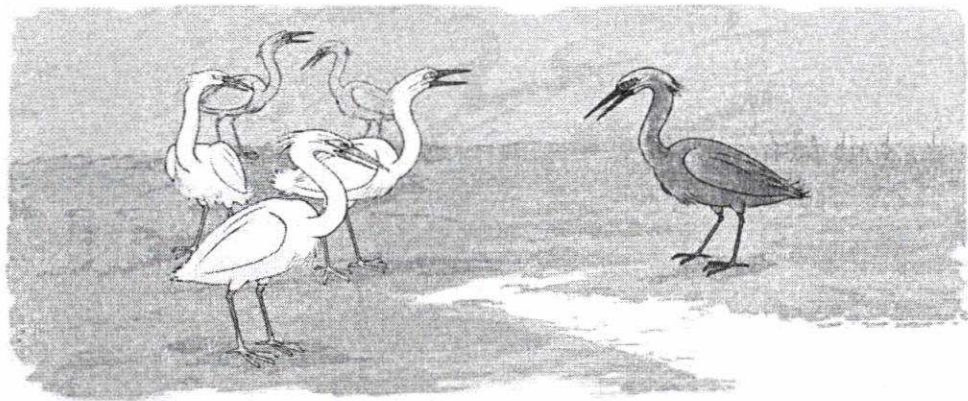
$$ax+b=0 \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

توضیح: $a \neq 0$

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد: «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم». لطفاً به پرندۀ کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

نصفی از نصف ما:

$$\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x$$

$$1 + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} = 100$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + x + 1 = 100 \Rightarrow \frac{4+4+2+1}{4}x - 99 = 0 \Rightarrow \frac{11}{4}x - 99 = 0$$

$$x = \frac{99 \times 4}{11} \Rightarrow x = 36$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟ چون **بزرگترین توان (درجه) متغیران (*) برابر 1 است.**

ضرایب a و b کدام اند؟

$$\frac{11}{4}x - 99 = 0$$

$a = \frac{11}{4}$ $b = -99$

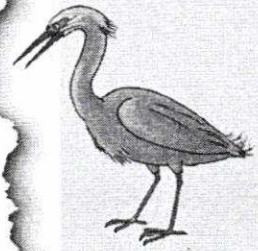
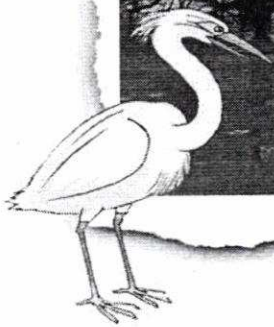
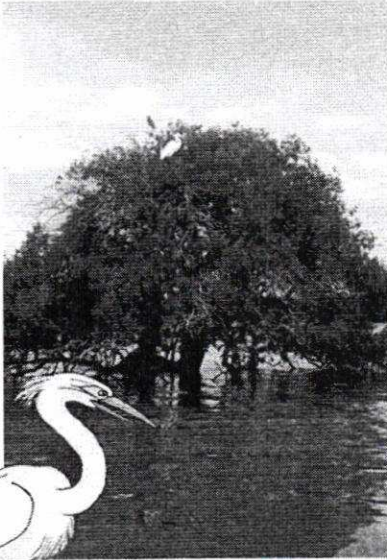
* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

* جنگل حرا، جزیره قشم

حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه‌سبز دریایی حرا از این درختان زیبا تشکیل شده است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در پهنه نیلگون خلیج فارس چشم‌ها را می‌نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خویش فرا می‌خواند. این جنگل‌های سبز مامن بیش از ۲۲۰ پرنده بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکستری دو گونه زیبا از این پرندگان‌اند.

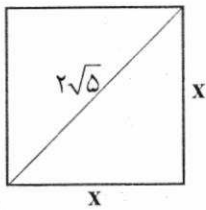


یادی از گذشته



فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۳

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.



$$\dots x^2 + \dots x^2 = (2\sqrt{5})^2$$

به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

بنابراین:

$$2x^2 = \frac{20}{2} \dots \Rightarrow x^2 = \dots 10 \dots \Rightarrow x = \pm \sqrt{10}$$

پس اندازه هر ضلع مربع با در نظر گرفتن این که اندازه ضلع مثبت است، برابر $x = \sqrt{10}$ است و محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = 4\sqrt{10}$$

معادله $2x^2 = 20$ را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

فعالیت



۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر x فرض شود، مربع همان عدد برابر x^2 و سه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$x^2 = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟
از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟ *چون معادله‌ی * را به یک تساوی درست عددی تبدیل می‌کنند.*

- $x=3$, $x=4$, $x=-3$, $x=1$, $x=0$
-

توجه: به جز روش حدس، برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0, \quad x(x-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \dots \text{یا} \boxed{x=3} \dots$$

$x=0$ یا $x-3=0$



یادآوری:
اگر $a \times b = 0$ باشد
نتیجه می‌گیریم:
 $b=0$ یا $a=0$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a \neq 0$ ضرب x^2 ضرب x و c عدد ثابت است.

(مثال)

$$3x^2 - \sqrt{7}x + \frac{1}{5} = 0$$

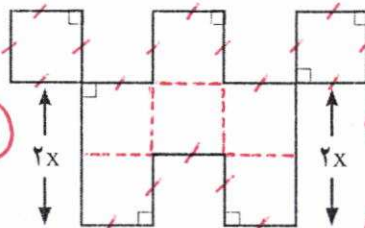
$a=3$ $b=-\sqrt{7}$ $c=\frac{1}{5}$

۲. در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه

مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.

مساحت مربع = $1 \times x = x$ (مساحت یک مربع به ضلع x)

محیط اضلاع = مجموع اضلاع = $1x + 2x + 2x = 22x$



یادآوری:
یک ضلع ضرب بر خودش = مساحت مربع
(یک ضلع)^۲
مجموع اضلاع = محیط یک شکل

$1x^2 = 22x$ \Rightarrow اندازه محیط شکل = اندازه مساحت شکل

یک معادله درجه دوم است $1x^2 - 22x = 0$

$2x(2x - 11) = 0 \Rightarrow x=0$ یا $x = \frac{11}{2}$

$\frac{1}{2}x = 0$ یا $2x - 11 = 0$
 $\frac{1}{2}x = 0$ یا $\frac{2x}{2} = \frac{11}{2}$
 $x = 0$ یا $x = \frac{11}{2}$

عاشق
طول ضلع نمی‌تواند
منفی باشد

$x = \frac{11}{2}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



نیما از پسرعمویش کیان سه سال بزرگ تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی کوچک تر چند سال دارد؟

x سن نیان و $x+3$ سن نیما
یا
 $x-3$ سن نیان و x سن نیما

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر $x-3$ است. بنابراین:

۱) $1-3=5$

$x \times (x-3) = 40$

۲) $5-3=2$

پس جواب $x=8$ و $x=5$

آیا می توانید جواب های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟ از درجه ۲

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می کند؟ این جواب در این سؤال معنی

دارد؟ خیر، $x=-5$ غیر قابل قبول است، چون سن نمی تواند عدد منفی باشد.

سن $x=8$ سن نیما

۵) $x-3=8-3=5$ سن پسرعموی نیما

تمرین



۱) هر کدام از عبارات زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد. $5x+2=3x-2$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است. $x^2=x+1$

۲) در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$

مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس

و ۱۲ فن ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون

تومان حقوق پرداخت می کند. حقوق یک فن ورز در این کارخانه ماهیانه

چقدر است؟



۳) با توجه به پیش بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود

را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع

تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

جواب ۲) $2 \times \text{حقوق فن ورز} = \frac{2}{3} \times \text{حقوق مهندس}$

۱۴x → ۸x → ۴x → ۲x → x

۱۴x = 44 → x = 4

۱۲x + 8x + 3x = 31x = 31 * 4 = 124

۱۵x - x = 14x = 14 * 4 = 56

۲x = حقوق مهندس
2/3 * حقوق مهندس = 2x
4/3 * حقوق مهندس = 2x
حقوق مهندس = 3/2 * 2x = 3x

۳ * ۳x + ۸ * ۲x + ۱۲ * x = ۵۵.۵
۹x + ۱۶x + ۱۲x = ۵۵.۵
۳۷x = ۵۵.۵
x = ۵۵.۵ / ۳۷ = ۱.۵

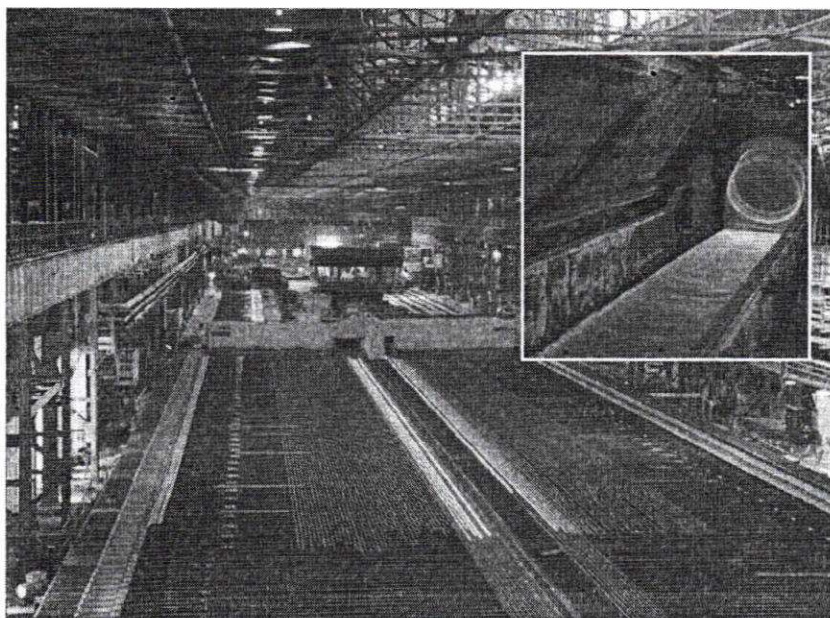
مبلغ ۱.۵ تومان حقوق فن ورز

تهیه کننده:

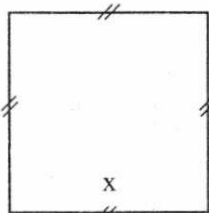
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کارخانه ذوب آهن اصفهان

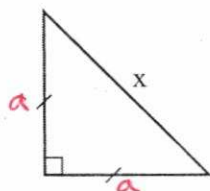
ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سال ۱۳۴۶ در دشت طبس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره برداری رسید. این کارخانه هم اکنون با تلاش شبانه روزی مسئولان و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان، ایران اسلامی دارد.



۴. اگر مجموع مساحت های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟ $x=?$



شکل (۱) مساحت مربع $= x^2$



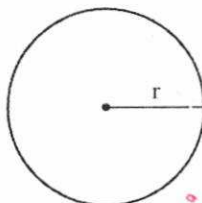
شکل (۲)

میانگوش $a^2 + a^2 = x^2$

$$\frac{2a^2}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$



$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\right)^2$$

$$= \pi \times \frac{1}{2\pi} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{مجموع مساحت ها} = 7 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{2x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

۱	الف
۲	ب
۳	پ
۴	ت
۵	ث
۶	ج
۷	چ
۸	ح
۹	خ
۱۰	د
۱۱	ذ
۱۲	ر
۱۳	ز
۱۴	س
۱۵	س
۱۶	ش
۱۷	ص
۱۸	ض
۱۹	ط
۲۰	ظ
۲۱	ع
۲۲	غ
۲۳	ف
۲۴	ق
۲۵	ک
۲۶	گ
۲۷	ل
۲۸	م
۲۹	ن
۳۰	و
۳۱	:
۳۲	ی

بازی با حروف الفبا به کمک مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می شود. حروف نقطه دار به صورت ax^n مشخص شده اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $۴x^۲$ مشخص می شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a=۴$) و دارای دو نقطه است ($n=۲$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می کنیم.
مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

غنچه: غ + ن + ج + ه
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $۳۱ + ۷x^۲ + ۲۹x + ۲۲x$

معادل ریاضی غنچه $\rightarrow ۲۲x + ۲۹x + ۷x^۲ + ۳۱$

حال با توجه به توضیح فوق:
۱- جدول زیر را کامل کنید:

کلمه به زبان فارسی	الگوی ریاضی معادل آن
الف + ب = آب	$۲x^۱ + ۱x^۱$
آپ	$۳x^۳ + ۱$
ذرت	$۴x^۲ + ۱۲ + ۱۱x$

۲- الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.
 $۴x^۲ + ۲۸ + ۸ + ۱۲ + ۱۲ + ۲x^۱ + ۲۸ + ۱x^۱ + ۳۲ + ۳x^۳$

۳- آیا می توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

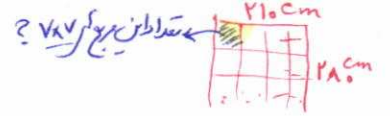
۴- با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

$۲۸ + ۱x + ۲۷ + ۱۵$

من دوست تو هستم. $۲۸ + ۲۹x^۱ + ۱۰ + ۳۰ + ۱۵ + ۴x^۲ + ۴x^۲ + ۳۰ + ۳۱ + ۱۵ + ۳x^۲$

تهیه کننده:

معنی درازن قالی، ۱۲۰۰ مربع ۷×۷ وجود دارد. $\frac{210 \times 210}{7 \times 7} = 1200$ مساحت قالی = مساحت یک مربع ۷×۷



تعداد گره‌های موجود در یک مربع ۷×۷ $= \frac{5,880,000}{1200} = 4900$

معنی در هر یک از این مربع ۷×۷، ۴۹۰۰ گره وجود دارد.

برای سیدار کردن تعداد گره که در یک ضلع این مربع ۷×۷ $= \sqrt{4900} = 70$

سین این قالی، ۷۰ ضلع دارد \rightarrow $70 =$ تعداد گره‌های موجود در یک ضلع ۷۰ سانتی متری مربع $7 \times 7 =$ ربع \Rightarrow جلین تونز

۶) اگر در یک قالی با ابعاد $2/80 \text{ m} \times 2/10 \text{ m}$ (که عموماً 2×3 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی

۵/۸۸۰/۰۰۰ عدد باشد: 210 cm \downarrow 210 cm تبدیل به cm

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره ۱ cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی

استفاده شده است؟ $5,880,000 \text{ cm} \div 100 = 58,800 \text{ m}$ تبدیل به متر

ج) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی بیافد. اگر این قالی باف ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

۳) $5 \times x = 30000$ $x = 6000$ گره قالی روزی ۶۰۰۰

تعداد گره که در ۵ روز بافیدن یک هفته کاری

د) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد

هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این

قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$\frac{5,880,000}{30000} = 196$ پس ۱۹۶ هفته طول می‌کشد

۷) $35,000,000 - 5,400,000 = 29,600,000$ درآمده سود

$\frac{29,600,000}{196} = 150,000$ میزان سود در یک هفته

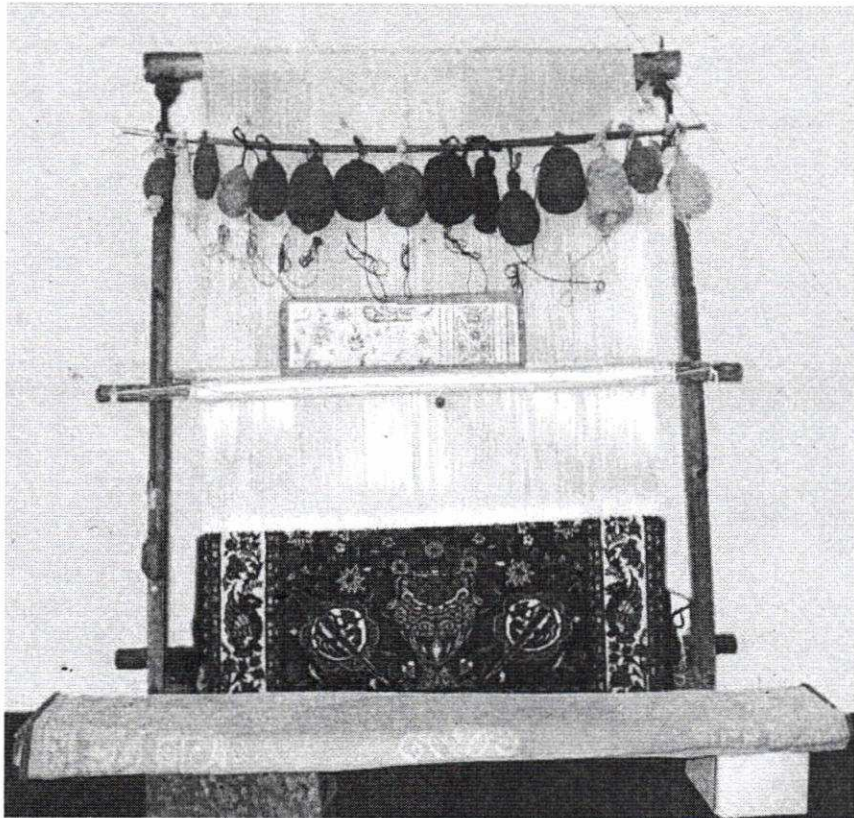


۱. «رَج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در ۷cm طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی ۵ رَج، وجود ۵ گره در یک ضلع مربع 7×7 است.

رَج قالی = تعداد گره‌های قالی در ۷cm طول یا عرض قالی

صنعت قالی بافی

یکی از قدیمی‌ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی بافی است. در این حرفه به نخ‌های که قالی با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخ‌ها بر روی رشته‌های نخ افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تار و پود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشه آن، قدمت قالی، بافنده قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تار و پود قالی است.



درس ۲

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

بر خلاف آنچه در «کار در کلاس های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است نتوان جواب های معادله درجه ۲ را حدس بزنیم.
در این درس با سه روش برای حل معادله درجه ۲ آشنا می شویم.

روش اول - تجزیه عبارت های جبری

در سال قبل و در فصل اول این کتاب با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنا شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارت های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادلات درجه دو به کار خواهیم برد. برای یادآوری این اتحادها را مرور می کنیم:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \text{اتحاد مربع مجموع دو جمله ای} \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 & \text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله ای} \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک:

فعالیت



طرف دوم تساوی های زیر را به کمک اتحادهای خواننده شنیده کامل کنید:

الف اتحاد مربع ۲ جمله ای $(2x + \frac{1}{4})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

ب اتحاد مزدوج $(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$

ث اتحاد مربع ۲ جمله ای $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

ب) $(2+3xy)^2 = 4 + 12xy + 9x^2y^2$

ت) $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

جمله مشترک x جمع ضرایب درجه ۲ $(-4-2) \times x = -6x$

استفاده از تاسی $\frac{1}{4}(2x + \frac{1}{4})^2$

تهیه کننده:

یادآوری:

شکل کلی معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$

فعالیت



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$ (with $c=0$)	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$ $\Rightarrow x=0$ یا $x=-6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل یابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$ ریشه مضاعف
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$ (with $b=0$)	روش ۱: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0$ $\Rightarrow x = +4$ یا $x = -4$ روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = -3$ یا $x = -2$
اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$ $(x-5)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 5$ ریشه مضاعف

در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف دارد.

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

(الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟ فاکتورگیری

(ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟ $a^2 + 2ab + b^2$ \rightarrow $(a+b)^2$

(پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟ $b=0$

آیا علامت‌های a و c مهم است؟ بله - باید مختلف‌العلامت باشند.

(ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟ اتحاد مربع دو جمله‌ای

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$x^2 + 9 = 0$ و $-x^2 - 5 = 0$

تهیه کننده:

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
 \downarrow
 $(x)^2$ $2(x\sqrt{2})$ $(\sqrt{2})^2$

① جواب (الف) $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2 \text{ یا } x = -2$
 (روش دوم: فاکتورگیری)

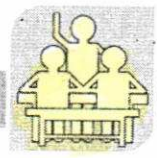
(ب) $(x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$
 روش اول: $x^2 - x - 6 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$

(پ) $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = +\sqrt{2} \text{ یا } x = -\sqrt{2} \end{cases}$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$
 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ اتحاد مربع کامل

$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$
 $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = 0$
 $x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = \frac{1}{2}$
 روش دوم: ضرب طرفین در 4 و بعد استفاده از اتحاد مربع مشترک

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:
 $-4 \otimes +1 = -3 \checkmark$ $+4 \otimes -1 = -4 \checkmark$ $+2 \otimes -2 = -4 \checkmark$
 $-4 \oplus +1 = -3$ $+4 \oplus -1 = +3 \checkmark$ $+2 \oplus -2 = 0$
 از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

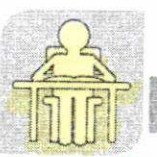
1) $x^2 + 3x - 4 = 0$
 $(x - 1)(x + 4) = 0$
 $(x - 1) \dots = 0$ یا $(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1 \dots$ یا $x = -4$

2) $4x^2 - (2-x)^2 = 0$
 با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:
 $(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow (3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ یا } x = -2$
 $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

(ث) $2x^2 - 8x = 0$
 $2x(x - 4) = 0$
 $x = 0 \text{ یا } x = 4$

(ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x - 3)(x - 2) = 0$
 $x = 3 \text{ یا } x = 2$

تمرین



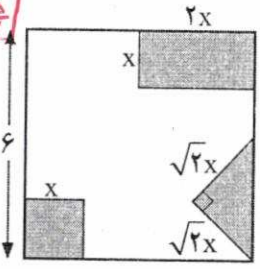
1. معادلات زیر را حل کنید.

(ع) $\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x$
 $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$
 $x = 0 \text{ یا } x = 3$

- (الف) $2x^2 - 8 = 0$
- (ب) $(x+2)(x-3) = x-3$
- (ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$
- (ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$
- (ح) $x^2 = 5 - x^2$
- (ج) $\frac{x^2}{3} = x$
- (خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$
- (ذ) $(x-3)^2 = 4$
- (د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

(ز) $x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5$
 $x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ یا } x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

(ح) $x^2 + 4x + 4 = 0$
 $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+2) = 0$
 $x = -2 \text{ یا } x = -2$



2. از مربعی به ضلع 6cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی مانده 24 cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟
 $36 - 4x^2 = 24 \Rightarrow 4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
 $x = +\sqrt{3}$

مساحت مربع بزرگ $= 6^2 = 36$
 مساحت مربع کوچک $= x^2$
 مساحت مثلث $= \frac{1}{2} x x = \frac{1}{2} x^2$
 $= \frac{1}{2} x^2 + x^2 = \frac{3}{2} x^2$

3. معادله درجه دومی بنویسید که $x = 2$ و $x = -3$ جواب‌های آن باشند. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

(د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$
 $(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$
 $(3x+2)(3x-1) = 0$
 $x = -\frac{2}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$

$x = 2$ یا $x = -3$
 $x - 2 = 0$ یا $x + 3 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x^2 + (-2+3)x + (-2)(3) = 0 \Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$
 از اتحاد مربع کامل
 $x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

(ز) $(x-3)^2 = 4$
 $x - 3 = +2$ یا $x - 3 = -2$
 $x = 5$ یا $x = 1$

جواب ۴) $x=1$ یا $x=1$
 $x-1=0$ یا $x-1=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)=0$
 $x^2-2x+1=0$

جواب ۵) مستالف
 $k=2 \Rightarrow (x-1)^2=2$
 $x-1=+\sqrt{2}$ یا $x-1=-\sqrt{2}$
 $x=1+\sqrt{2}$ یا $x=1-\sqrt{2}$

۴) معادله درجه دومی بنویسید که $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟
 ۵) در معادله $(x-1)^2=K$:

۴) $k=4 \Rightarrow (x-1)^2=4$
 $x-1=+2$ یا $x-1=-2$
 $x=3$ یا $x=-1$

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K=2, K=4, K=0, K=-9$ به دست آورید.

۵) $k=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$
 $(x-1)(x-1)=0$
 $x=1$ یا $x=1$
 ریشه مضاعف

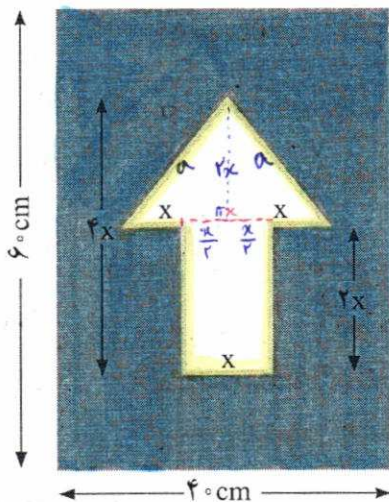
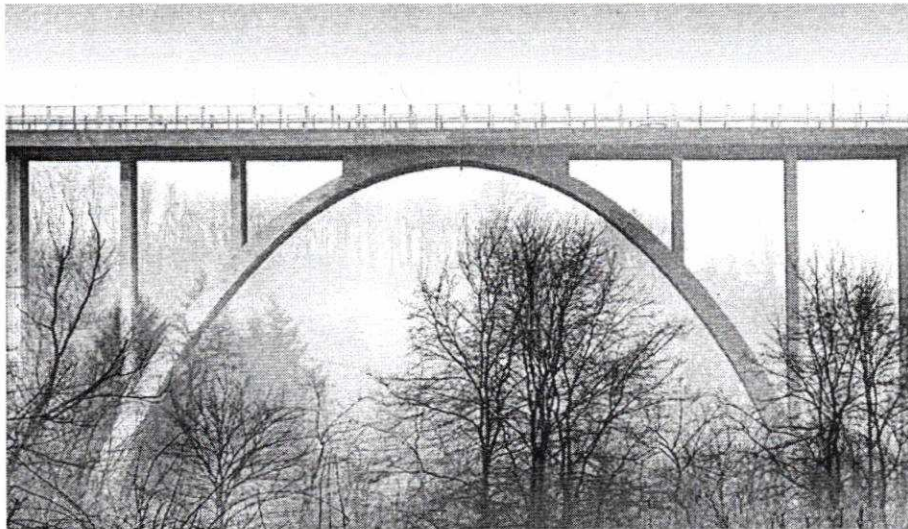
ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟ $k=0$

پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟ $k > 0$ (مقادیر مثبت k)

ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟ $k < 0$ (مقادیر منفی k)

۶) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برجسب های آبی و سفید استفاده می شود. هزینه 1 cm^2 برجسب سفید 3° تومان و هزینه 1 cm^2 برجسب آبی 1° تومان است. مجموع هزینه برجسب های سفید و آبی $27,000$ تومان شده است.

۶) $k=-9 \Rightarrow (x-1)^2=-9$
 سمت چپ همواره منفی و سمت راست همواره منفی است و تساوی غیرممکن است یا اینکه اعداد منفی ریشهی دوم ندارند پس معادله جواب ندارد.



الف) اندازه x چقدر است؟

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه رو از خطوط برجسب شیرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm آن 100 تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو $34,800$ تومان می شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟

مساحت مثلث سفید + مساحت مستطیل سفید = مساحت فلش آبی
 $= \frac{1}{2} \times 4x \times 2x + 4 \times 2x = 5x^2$
 $5x^2 \times 30 = 150x^2$
 $150x^2 + 24000 - 50x^2 = 24000$
 $100x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm\sqrt{30} \Rightarrow x = +\sqrt{30}$

مجموع هزینهها $27,000 \Rightarrow 150x^2 + 24000 - 50x^2 = 27000$

$100x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm\sqrt{30} \Rightarrow x = +\sqrt{30}$

$(24000 - 50x^2) \times 10 = 240000 - 500x^2$

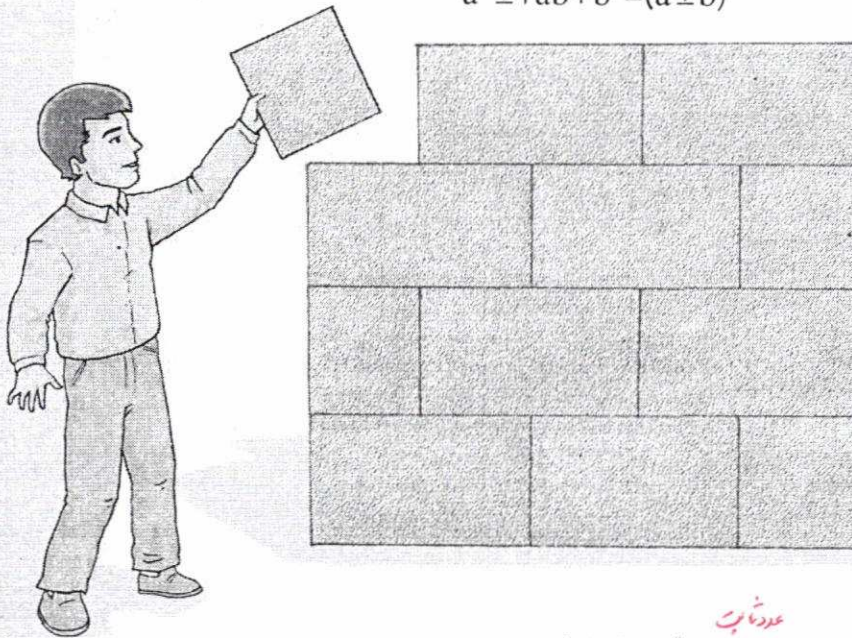
ب) $12x \times 100 = 1200x$
 $150x^2 + 24000 - 50x^2 + 1200x = 34800$

$100x^2 + 1200x - 10800 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x+18)(x-6) = 0$
 $x = -18$ یا $x = 6$

$a^2 = (x + \frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2$
 $a^2 = \frac{100}{1} x^2 + 24000 - 50x^2$
 $a = \frac{50}{1} x$

روش دوم: مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



عوضات

مثال: معادله درجه دوم $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را حل کنید.

۱- ابتدا قرینه عدد ثابت معادله: یعنی $..... + 5$ را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$2x^2 + 3x = -5 \dots \dots \dots (1) \quad \leftarrow 2x^2 + 3x - 5 + 5 = 0 + 5$$

عوض جملات مثال x در صورت تساوی باشند

۲- اگر ضریب x^2 مخالف ۱ باشد، دو طرف معادله را به ضریب x^2 تقسیم می کنیم. بنابراین، در معادله

بالا دو طرف تساوی را بر عدد 2 تقسیم می کنیم:

$$\frac{2x^2 + 3x = 5}{2} \quad \leftarrow \text{ضریب } x^2$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} \quad (2)$$

۳- در عبارت $\frac{3}{2}x$ با در نظر گرفتن اتحاد مربع دو جمله ای $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

برای ایجاد جمله $2ab$ ، $\frac{3}{2}x$ را در عدد 2 ضرب و تقسیم می کنیم:

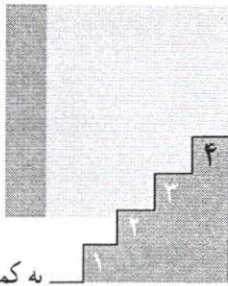
$$\frac{3}{2}x = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \right) = 2 \times \frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد $\frac{3}{4}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (3)$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



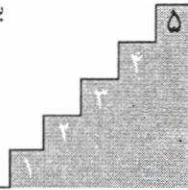
به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 a^2 $b \times a$ b^2 $(a+b)^2$

بنابراین:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$



با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار x به دست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

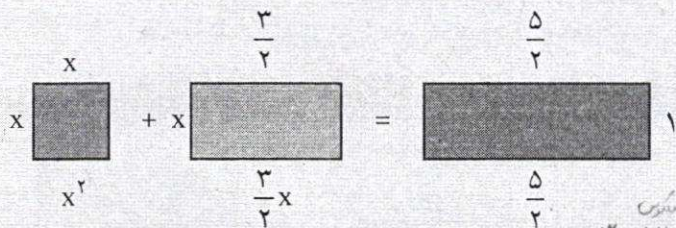
پس جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

هستند. $x = -\frac{5}{2}$ و $x = 1$

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی

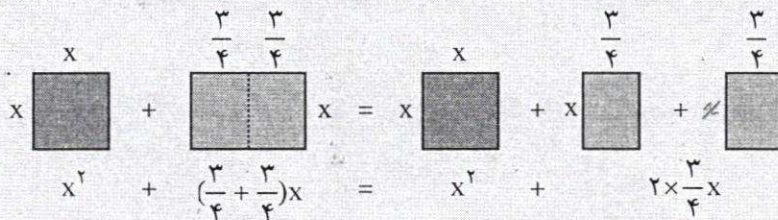
زیر نیز می‌توان بیان کرد:

- اگر x^2 را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{2}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{2}$ و عرض x در نظر بگیریم:

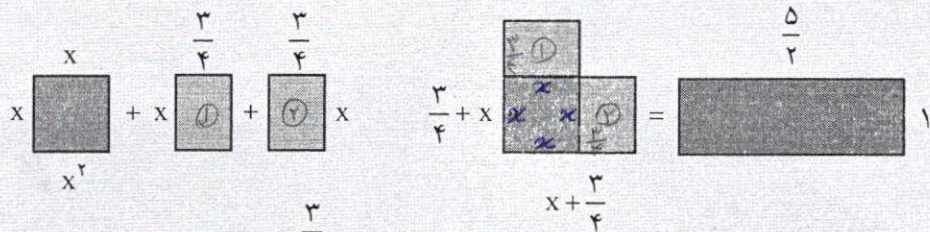


$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

- با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{2}$ در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول $\frac{3}{4}$ در تساوی (۲):



و قرار دادن ۲ مستطیل فوق در کنار مربع x^2 ، تساوی بالا به صورت زیر در می آید:



- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع $\frac{3}{4}$... دارد.

به اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} = \frac{49}{16} \rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

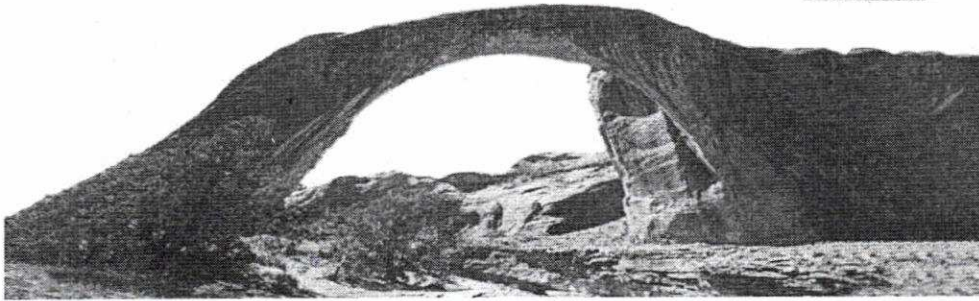
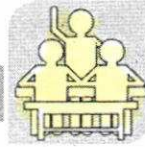
$(x + \frac{3}{4})^2$ مساحت مربع (بزرگ)

حذر طرفین

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب $x=1$ و $x=-\frac{5}{2}$ است. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x=-\frac{5}{2}$ معنی پیدا نمی کند.

شیوه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضیدان، منجم، مورخ و جغرافیدان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^2 + px = q$ و با فرض $p, q > 0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هر چند همه معادلات درجه دوم را نمی توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادلات است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه ها را می توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

$$1) 2x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 6x - 1 = 0 + 1$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{6x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

مسابقه

$$2) 3x^2 - 2 = 6x$$

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 2x = \frac{2}{3}$$


$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1)^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{2}{3} + 1$$

$$(x-1)^2 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} x = \dots\dots\dots \\ x = \dots\dots\dots \end{cases}$$



حیز

$$x - 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ *افزودن مربع میانه*
 $x^2 - 5x + 4 - 4 = 0 - 4$
 $x^2 - 5x + 4 - 4 = -4$

$x^2 - 2(\frac{5}{2}x) = -4$
 $x^2 - 2(\frac{5}{2}x) + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4}$
 $(x - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{4}$
 $x - \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2}$
 $x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$
 $x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$

$x^2 + 2x - 2 = 0$ *افزودن مربع میانه*
 $x^2 + 2x - 2 + 1 = 0 + 1$
 $x^2 + 2(\frac{1}{2}x) = 1$
 $x^2 + 2(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$
 $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$
 $x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
 $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$x^2 + \frac{1}{4} = -x$
 $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
 $x^2 + 2(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
 $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$
 $x + \frac{1}{2} = 0$
 $x = -\frac{1}{2}$

$(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0$
 $x = -\frac{1}{2}$
 ریشه مضاعف است



$x^2 + 4x + 9 = 0$
 $x^2 + 4x = -9$
 $x^2 + 2(\frac{4}{2}x) + 4 = -9 + 4$
 $(x + 2)^2 = -5$
 $x + 2 = 0$
 $x = -2$

معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.
 (ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0$
 (ج) $x^2 + 6x + 9 = 0$
 (الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$
 (پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

روش سوم: روش کلی حل معادله درجه دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می آید. با مرور پله های گفته شده در بخش قبل:

1. $ax^2 + bx = -c$ (1)
 $\frac{ax^2 + bx}{a} = \frac{-c}{a}$
 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ (2)

2. ضرب $\frac{b}{2a}$ را در عدد 2 ضرب و تقسیم می کنیم و مربع عدد به دست آمده؛ یعنی $\frac{b^2}{4a^2}$ را به دو طرف تساوی (2) اضافه می کنیم:

$x^2 + 2(\frac{b}{2a})x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2(\frac{b}{2a})x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$ (3)

3. عبارت سمت چپ تساوی (3) را به مربع کامل تبدیل می کنیم:

$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

4. با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه گیری از طرف تساوی:

$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

دلته

عبارة $b^2 - 4ac$ را مبین معادله درجه دوم می نامند و آن را با Δ نشان می دهند.

بر اساس علامت Δ می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟) **چون اعداد منفرجه، ریشه دوم ندارند.**

فعالیت



۱. جواب های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.
بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

۲. جواب های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن $a = 4$ ، $b = 7$ ، $c = -2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad x = \frac{-16}{8} = -2$$

۱. Δ چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلته» می خوانند. در الفبای یونانی، دلتهای بزرگ را با علامت Δ و دلتهای کوچک را با علامت δ نشان می دهند.

تهیه کنندہ:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

بصراحت
مثال نمی از معادلاتی که
نشانند و یا Δ ریشه
حل شود.
همین مثال برای $\Delta = 0$ و
داشتن ریشه مضاعف حل شود.

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x_1 = -2 \quad \& \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 + x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-5+1}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

معادله ۲ ریشه دارد.

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(4)(-7) = 121 > 0$
معادله ۲ جواب دارد.

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2 \times 4}$

$x_1 = -\frac{7}{4} \quad \& \quad x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = -\frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-7+1}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

۳) جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن $a=3 \quad b=1 \quad c=7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

کار در کلاس



معادلات زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a, b, c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

طرح مسئله کاربرد ریاضی از معادله درجه دو

مسئله اول:

مقدمه: در هر مسئله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

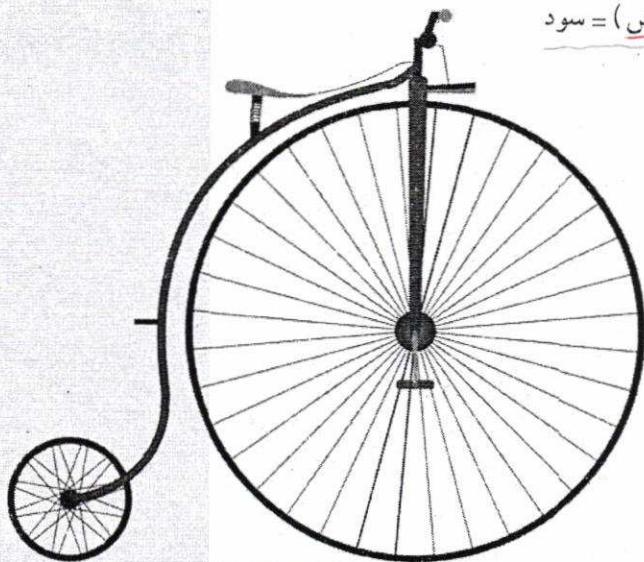
تابع هزینه (cost) یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود (profit) یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow$ هزینه - درآمد (فروش) = سود



فرض کنید، شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید آن را به صورت انبوه تولید کنید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش‌اند:

۱. هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

هزینه اولیه برای وسیله: ۷ میلیون تومان

هزینه تولید هر دوچرخه: ۱۱۰ هزار تومان

۷۰۰,۰۰۰
استثنا نمانی!

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $۷۰۰,۰۰۰ - ۲۰۰۰۷$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می شود؟

■ حل:

درآمد $R(x) =$ قیمت هر دوچرخه \times تعداد فروش دوچرخه $= (۷۰۰,۰۰۰ - ۲۰۰۰۷) \times ۷ = ۷۰,۰۰۰۷ - ۲۰۰۰۷$

هزینه $C(x) =$ هزینه اولیه $+ \text{هزینه تولید} = ۷,۰۰۰,۰۰۰ + ۱۱۰(۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰۰۷) = ۱۴,۷۰۰,۰۰۰ - ۲۲,۰۰۰۷$

سود $P(x) = \dots$

مسئله دوم:

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه $p(x) = -۰/۰۰۴۰۵x^2 + ۸/۱۵x - ۱۰۰$ چتر از رابطه

به دست می آید.

$x=0 \Rightarrow P(0) = -۰/۰۰۴۰۵x^2 + ۸/۱۵x - ۱۰۰$

$P(0) = -۱۰۰$

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد،

چقدر از دست می دهد؟ ۱۰۰ واحد

ب) نقطه سر به سر (break-even)

میزانی از تولید یک بنگاه

اقتصادی را نشان می دهد که در

آن میزان هزینه ها با میزان درآمدها

برابر می شود و بنگاه در این سطح

از تولید نه سود می کند و نه ضرر.

اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر

باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر

کمتر باشد، زیان خواهد دید.



هزینه = درگاه
(نه سود، نه ضرر)

۲۰۰۰ چتر

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟ چندمین تولید چتر

برای کارگاه سودآور است؟ کی بیشتر، یعنی ۲۰۰۱ امین چتر

در نقطه سر به سر: $P(x) = 0$

$-۰/۰۰۴۰۵x^2 + ۸/۱۵x - ۱۰۰ = 0$

$\Delta = (۸/۱۵)^2 - ۴(-۰/۰۰۴۰۵)(-۱۰۰) = ۴۴,۸۰۲۵$ معادله x^2 دارد

$x = \frac{-۸/۱۵ \pm \sqrt{۴۴,۸۰۲۵}}{2(-۰/۰۰۴۰۵)}$ غرض $x \approx ۱۲,۳۴۶$

$x = ۲۰۰۰$

حل 1) $x^2 - x + 5 = 0$
 معادله ریشه ندارد. $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$

2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
 معادله ریشه مضاعف دارد. $\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3) $3x^2 - x + 4 = 0$
 معادله ریشه ندارد. $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4) = -47 < 0$

4) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$
 $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1) = 7$
 $x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$
 $x = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$ و $x = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$

2) $2x^2 + x - 1 = 0$
 معادله 2 ریشه دارد. $\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ و $x = -1$

4) $x^2 + 17x - 18 = 0$
 معادله 2 ریشه دارد. $\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 341 > 0$
 $x = \frac{-17 \pm \sqrt{341}}{2}$
 $x = 1$ و $x = -18$

تمرین



1. معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

- 1) $x^2 - x + 5 = 0$
- 2) $2x^2 + x - 1 = 0$
- 3) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- 4) $x^2 + 17x - 18 = 0$
- 5) $3x^2 - x + 4 = 0$
- 6) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

2. معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ به دست آورید.
 $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 > 0$
 $x_1 = \frac{3 + \sqrt{49}}{4} = 2$ و $x_2 = \frac{3 - \sqrt{49}}{4} = -1$
 $x_1 \times x_2 = 2 \times (-1) = -2 = \frac{-5}{2.5} = \frac{c}{a}$

3. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر 4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟
 $x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \Rightarrow 32 + 4a + 28 = 0 \Rightarrow 4a = -60 \Rightarrow a = -15$

$2x^2 + 15x + 28 = 0$
 $\Delta = 1 > 0$
 ریشه‌های مطلوب $x = \frac{-15 \pm 1}{4}$
 $x_1 = -4$ و $x_2 = -7$

4. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟
 $3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 2x \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2/3$
 طول مستطیل $= 3x + 2 = 3(-2/3) + 2 = 0$
 عرض مستطیل $= x + 1 = -2/3 + 1 = 1/3$
 مساحت مستطیل $= (3x+2)(x+1) = 3x^2 + 5x + 2$
 مساحت مثلث $= \frac{1}{2}(3x+2)(x+1) = 3x^2 + 2x$

5. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟
 الف) $x^2 + ax - 1 = 0$ $\Delta = a^2 - 4(1)(-1) = a^2 + 4 > 0$
 ب) $x^2 - x + a = 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a$
 با $1 - 4a \geq 0 \Rightarrow 4a \leq 1 \Rightarrow a \leq 1/4$

6. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -c/a$ است.

7. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو برابر $\frac{c}{a}$ است.
 $x_1 \times x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

8. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$) یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a-c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} = \frac{a+c \pm (a-c)}{2a}$
 $x = \frac{a+c+a-c}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$ و $x = \frac{a+c-a+c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

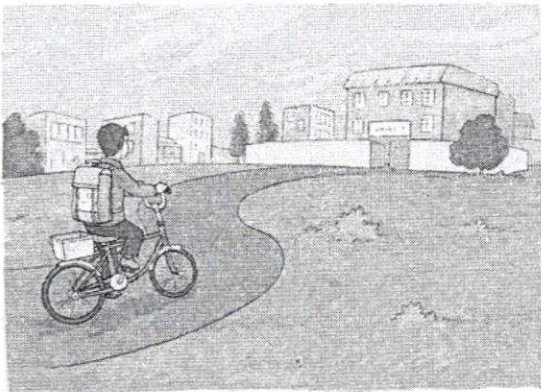
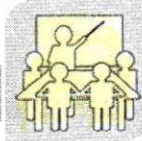
توجه: در حل تمرین 3، می‌توان عبارت یابین مقدار مجهول a، از مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها، برای یافتن ریشه‌ی دوم استفاده کرد.

جواب 5) $\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$
 $\Delta = (a-c)^2 > 0$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a}$
 $x = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = -\frac{c}{a}$ و $x = \frac{-a-c+a+c}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$
 (Note: The original image has a typo in the final result, it should be $x = -1$ based on the context of the problem.)

درس ۳

معادلات شامل عبارت‌های گویا

فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

$2500 = 250 \times 100$
میلی‌متر

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

$$15 = \frac{250}{t}$$

۲. برای $15 = \frac{250}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{250}{t}$ است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معناست.

$$\frac{250}{t} - 15 = 15 - 15 \Rightarrow \frac{250}{t} - 15 = 0$$

برای حل این معادله، دو طرف را با -15 جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک‌گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{250}{t} - \frac{15t}{1 \times t} = 0 \Rightarrow \frac{250 - 15t}{t} = 0$$

۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین

$$250 - 15t = 0$$

۵. از اینجا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.

$$250 - 15t = 0 \Rightarrow 15t = 250 \Rightarrow t = 16\frac{2}{3}$$

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$16\frac{2}{3} \times 60 = 1002 \text{ دقیقه}$$

$$4 + 1002 = 1006 \text{ دقیقه}$$

زمان مربوط به علی مسافت از منزل تا سر خیابان اصلی
از خیابان اصلی تا مدرسه

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. با شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟) چون تقسیم عدد در صفر تعریف نشده است.

مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x=3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-8 + x^2-6x+5 - x^2+6x-5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-8}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -4, x = 2$$

مثال: بازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است. (مخرج کسرها صفر نماند)

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$\text{جواب (ب)}: \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\frac{x^2 + x - 4 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{جواب (ب)}: \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$\frac{24(10-m) + 1(10-m)(10+m)}{(10+m)(10-m)} = \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)}$$

$$240 - 24m + 100 - m^2 - 240 - 24m = 0$$

$$\frac{-m^2 - 48m + 100}{(10-m)(10+m)} = 0$$

$$-m^2 - 48m + 100 = 0$$

$$m^2 + 48m - 100 = 0$$

$$\Delta = (48)^2 - 4(1)(-100) = 2304 + 400 = 2704$$

$$\Delta = 2704 > 0$$

$$m = \frac{-48 \pm \sqrt{2704}}{2} = \frac{-48 \pm 52}{2}$$

$$m = -50 \quad \vee \quad m = 2$$

حل: $x=1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1) - 2}{(a+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \text{یا} \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخارج کسرهای معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی‌کنند، پس هردو قابل قبول اند.

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x}$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

ت) $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

چند مسئله کاربردی از معادلاتی عبارت‌های گویا دارند



۱. گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

حل: $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با x در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با $9x$ است.

اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $9x + 100$ است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جواب (ت): $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

$$\frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y-1)(3-y)}{(3-y)(y+3)} - 1$$

$$\frac{y^2 - y - 6 - y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{3 - y - 3 + y}{(3-y)(y+3)} - 1$$

$$\frac{-y - 6}{(y-3)(y+3)} = \frac{0}{(3-y)(y+3)} - 1$$

$$\frac{-y - 6}{(y-3)(y+3)} = -1$$

$$\frac{-y - 6}{(y-3)(y+3)} + 1 = 0$$

$$\frac{-y - 6 + (y-3)(y+3)}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{-y - 6 + y^2 - 9 + 3y + 3y - 9}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{y^2 - 3y + 6}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(6) = 9 - 24 = -15 < 0$$

$$\Delta = -15 < 0$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{-2}$$

$$y = \frac{-3 - \sqrt{-15}}{2} \quad \vee \quad y = \frac{-3 + \sqrt{-15}}{2}$$

جواب (ث): $x=2 \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$

$$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2-a}{2} = 0$$

$$\frac{2}{a-2} - \frac{1 \times (a-2)}{1 \times (a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{4-a}{(a-2)} = 0 \Rightarrow a=4$$

از آنجا که $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم:

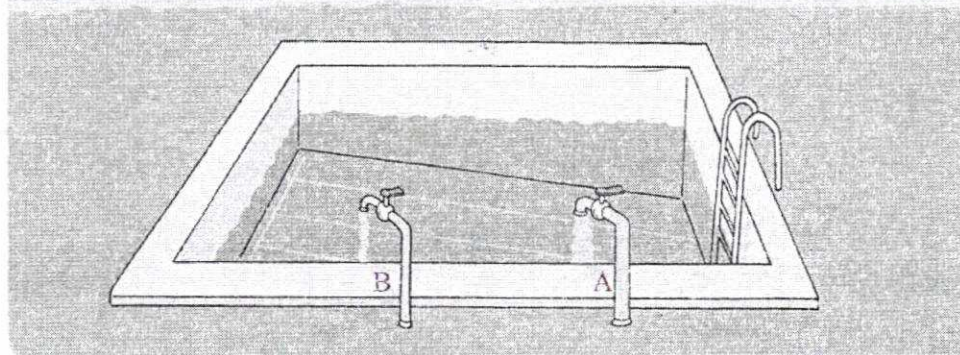
$$\frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8x}{9x+100} - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8x \times 5}{(9x+100) \times 5} - \frac{4(9x+100)}{5(9x+100)} = 0 \Rightarrow \frac{40x - 36x - 400}{5(9x+100)} = 0 \quad (9x+100 \neq 0 \text{ با شرط})$$

$$4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100$$

از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن $9x$ است، در نتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با 900 گرم است.

۲) دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می شود.



حل: فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پر می شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ استخر پر می شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

مراقب باشیم بر $(x \neq 0)$

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \times 12(x-10) + 1 \times 12x}{x \times 12(x-10)} - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 34x - 120}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 34x - 120 = 0$$

$$\frac{12x - 120 + 12x - x^2 + 10x}{12x(x-10)} = 0$$

روش حل دیگر

$$x^2 - 34x + 120 = 0$$

$$(x-20)(x-4) = 0$$

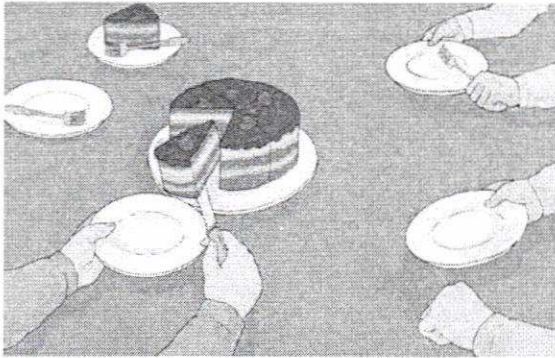
$x=20$ یا $x=4$
غتی

$\Delta = 34^2 - 4(-1)(-120) = 476$
 $\Delta = 476 > 0$ معادله ۲ ریشه دارد

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{476}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ x=4 \end{cases}$$

غتی

(یعنی شیر B استخر را در ۲۰ ساعت پر می کند، شیر A در $20 - 10 = 10$ ساعت و دو شیر با هم در ۱۲ ساعت پر می کنند)



۳: یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

حل: فرض کنید در ابتدا n نفر بوده اند؛ بنابراین به هر یک $\frac{1}{n}$ کیک رسید، در مرحله بعد به هر یک

$\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هر یک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1 \times (n+1) - 1 \times n}{n \times (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله $n=2$ به دست می آید.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1 \times (n+1) - 1 \times n}{n \times (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6}$$

$$6(1) = n(n+1) \Rightarrow 6 = n^2 + n \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = -3$$

تصویر تعداد افراد در ابتدا $n=2$

معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

۲) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

۳) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

۴) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

۵) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$

۶) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

۷) مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۸) هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. اگر چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

۹) به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-6t}$ دارای جواب $t=-3$ است.

$$t = -3 \Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-6(-3)}$$

این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به جای (کیک)، کلمه درهم آمده است.

$$\frac{7}{1} = \frac{27+k}{32} \Rightarrow \frac{27+k}{32} - \frac{7}{1} = 0 \Rightarrow \frac{27+k-224}{32} = 0 \Rightarrow k-197 = 0 \Rightarrow k=197$$

جواب ۷) $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{1 \times (k+2) + 1 \times k}{k \times (k+2)} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{k+2+k}{k(k+2)} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{2k+2}{k(k+2)} = \frac{5}{12}$

$$-2k^2 + 14k + 24 = 0 \Rightarrow \Delta = 14^2 - 4(-2)(24) = 272 > 0$$

$$k = \frac{-14 \pm \sqrt{272}}{-4} \Rightarrow k = 4 \text{ یا } k = -4$$

جواب ۸)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \times (x+3) + 1 \times x}{x \times (x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(2x+3) = x(x+3) \Rightarrow 8x+12 = x^2+3x \Rightarrow x^2-5x-12 = 0$$

$$\Delta = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{-2}$$

$$-x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\Delta = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2}$$

① $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

$\frac{(3x-5)(x)}{(x+3)(x)} - \frac{1(x+3)}{1(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+5x-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+4x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow 3x^2+4x-3 = 0 \Rightarrow x = -1$

② $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

$\frac{(3x-2)(x+3)}{x(x+3)} + \frac{(2x+5)x}{(x+3)x} - \frac{5x(x+3)}{1x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+9x-2x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0$

$\frac{-3x^2-4x-6}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow -3x^2-4x-6 = 0 \Rightarrow x = -2$

③ $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow \frac{(x+2)x}{(x+2)x} - \frac{(x+3)(x+2)}{1x(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x+2-x^2-5x-6}{(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{(x+2)} = 0$

$-x^2-4x-4 = 0 \Rightarrow x^2+4x+4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$
 معادله جواب ندارد چون مربع کسر را صفر کند

پس معادله جواب ندارد چون مربع کسر را صفر کند

تهیه کننده :

④ $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

$\frac{(x^2-2x+2)x}{x(x-2)x} - \frac{(1+x)(x-2)}{xx(x-2)} - \frac{(x-1)xx}{(x-2)xx} = 0$

$\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-2-x^2+2x}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+4x}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x^2+4x = 0 \Rightarrow x^2-4x = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$x = -2$ و $x = +2$
 غلطی چون مربع کسر را صفر کند

⑤ $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$
 $\frac{3x(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x-2)} - \frac{2x(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)(x-2)} - \frac{4x(x-1)(x+3)}{(x-2)x(x-1)(x+3)} = 0$

$\frac{3x^2-3x-12-2x^2+4x-4-4x^2-12x+12}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2-5x-10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0$

$-3x^2-5x-10 = 0 \Rightarrow 3x^2+5x+10 = 0 \quad \Delta = 5^2 - 4(3)(10) = 25 - 120 = -95$

$\Delta = -95 < 0$
 معادله ریشه ندارد

$$\textcircled{4} \quad \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{\cancel{1-x} \cdot (x-2)} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$-3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \quad ; \quad \text{دو معادله جواب ندارد.}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

سوالات تکمیلی ریاضی و آمار دهم انسانی
(فصل دوم : معادله ی درجه ی دوم)

۱- معادله های درجه ی دوم زیر را به روش خواسته شده حل کنید :

الف) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(روش تجزیه)

ب) $x^2 + 10x - 11 = 0$

(روش مربع کامل)

ج) $5x^2 - 3x + 7 = 0$

(روش کلی)

۲- اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله ی درجه ی دوم در ستون بعدی است ، با یک خط به یکدیگر وصل کنید . سپس معادله ها را در ستون آخر حل کنید .

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
عامل یابی (فاکتورگیری)	$9x^2 - 25 = 0$
اتحاد مربع دو جمله ای	$3x^2 + 9x = 0$
اتحاد مزدوج (روش ریشه گیری)	$x^2 - 10x + 16 = 0$
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 8x + 16 = 0$

۳- معادله ی $(x+4)^2 = a$ ، به ازاء چه مقادیری از a :

ج) ریشه ی حقیقی ندارد

ب) دو ریشه ی حقیقی دارد

الف) ریشه ی مضاعف دارد

۴- معادله ی درجه دومی بنویسید که $x = -3$ ریشه ی مضاعف آن باشد .

۵- اگر x_1, x_2 ریشه های معادله ی $5x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند ، بدون حل معادله ، مجموع و حاصلضرب ریشه ها را به کمک فرمول به دست آورید .

۶- معادله ی درجه ی دومی بنویسید که :

الف) ریشه ی مضاعف دارد ب) دو ریشه ی حقیقی دارد ج) ریشه ی حقیقی ندارد

۷- به کمک اتحادها ، جاهای خالی را با جمله ی مناسب کامل کنید :

الف) $(2x + \dots)^2 = 25y^2 + 4x^2 + 20xy$

ب) $(xy - 3)(xy + 8) = x^2y^2 + \dots - 24$

ج) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)^2 = \dots + \dots + \frac{1}{16}$

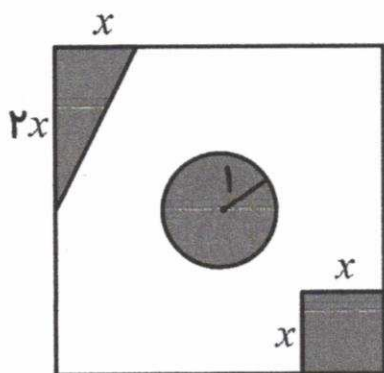
د) $(2x + y)(\dots - \dots) = 4x^2 - \dots$

ه) $(3 - \dots)^2 = \dots - 12xy + \dots$

و) $(x + 4)(x - \dots) = x^2 + \dots - 12$

ز) 96×104

۸- در زمینی مربعی شکل به ضلع $10m$ سه باغچه ی کوچک به شکل زیر ساخته شده است . مساحت زمین باقیمانده $85m^2$ است . طول x را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۹- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $4\sqrt{2}$ است .

۱۰- مجموع معکوس دو عدد فرد طبیعی متوالی $\frac{12}{35}$ است . آن دو عدد را پیدا کنید .

۱۱- معادله های کسری زیر را حل کنید .

الف) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1}$

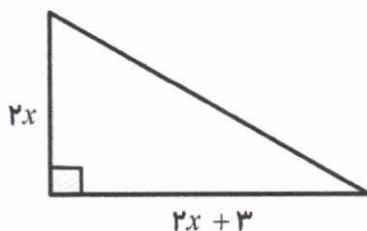
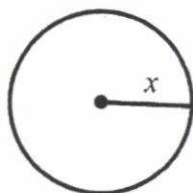
ب) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$

ج) $\frac{x^2+4}{x} = 5$

د) $2x-1 = \frac{3x}{1-x} + 2$

۱۲- به ازای چه مقدار m معادله ی $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{m} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است؟

۱۳- مساحت دایره و مثلث با هم برابر است . قاعده و ارتفاع مثلث و شعاع دایره را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۱۴- تعداد جواب های معادله های زیر را فقط تعیین کنید .

الف) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

ب) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

ج) $x^2 + 1 = 0$

د) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

۱۵- نام اتحادهای زیر را نوشته و سمت راست آن ها را بنویسید .

الف) $(x-5)(x+5) = \dots\dots\dots$

ب) $(2x+x^2)^2 = \dots\dots\dots$

ج) $(3x-2)(3x+7) = \dots\dots\dots$

د) $(a-7)^2 = \dots\dots\dots$

۱۶- سود حاصل از فروش x پیراهن در یک تولیدی ، از رابطه ی $P(x) = x^2 + x - 12$ به دست می آید .

الف) اگر این تولیدی ، هیچ پیراهنی نفروشد ، چقدر از دست می دهد ؟

ب) به ازاء چه تعداد فروش پیراهن ، تولیدی به نقطه ی سر به سر خود می رسد ؟

ج) چندمین تولید پیراهن ، برای این تولیدی سودآور است ؟

۱۷- یک پیتزا را بین چند نفر تقسیم کرده ایم و به هر کدام مقداری مساوی رسید. سپس یک نفر به آنها اضافه شد و دوباره پیتزا را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر کدام $\frac{1}{6}$ کمتر رسد. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

۱۸- تابع درآمد و تابع هزینه هفتگی یک کارخانه به صورت زیر است:

$$R(x) = 21x - x^2 \quad \text{تابع درآمد} \quad , \quad C(x) = 100 + x \quad \text{تابع هزینه}$$

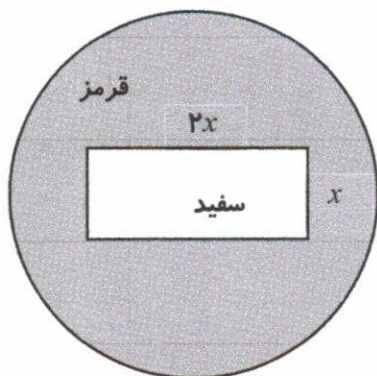
الف) معادله سود این کارخانه را بنویسید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند کالا حاصل می شود؟

۱۹- برای ساخت یک تابلو مانند شکل زیر، از برچسب های قرمز و سفید استفاده می شود.

هزینه 1 cm^2 برچسب سفید ۲۰ تومان و هزینه 1 cm^2 برچسب قرمز ۱۰ تومان است. (مساحت دایره ۲۴۰ سانتی متر مربع است). مجموع هزینه های برچسب های سفید و قرمز ۳۴۴۰۰ تومان شده است.

اندازه x چقدر است؟



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



تابع

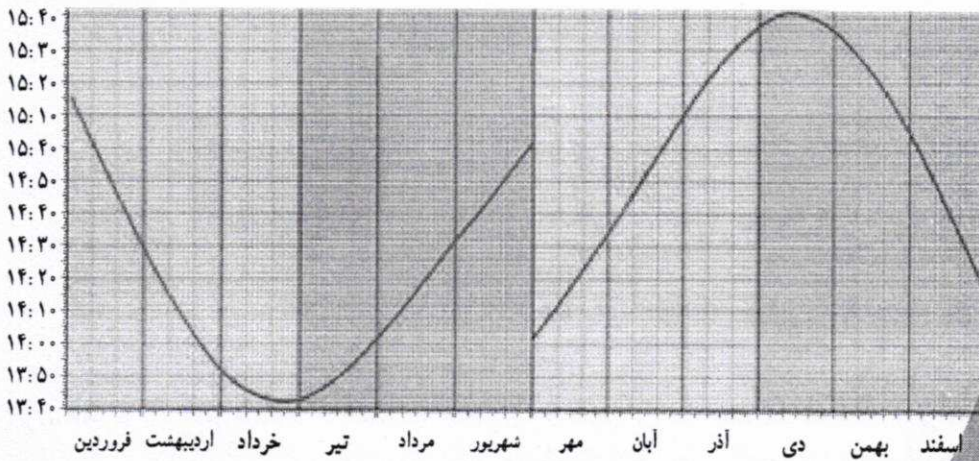
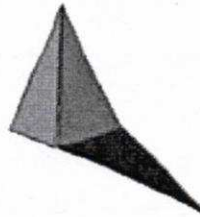
فصل سوم

مفهوم تابع ۱ درس

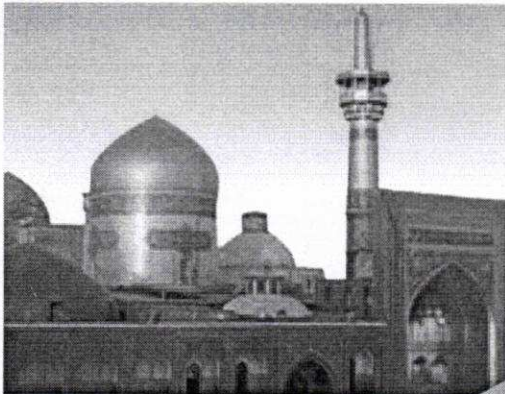
ضابطه جبری تابع ۲ درس

نمودار تابع خطی ۳ درس

نمودار تابع درجه ۲ ۴ درس



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می گیرد.



یکی از شیوه‌های جهت‌یابی قبله استفاده از سایه شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می گیرد می توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.



درس ۱

مفهوم تابع

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	۳	۴/۵	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	۴	۵	۸	۹	۱۰

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) بر اساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می‌توان آن را به صورت جبری و به شکل $d=2t$ نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به صورت $y=ax+b$ ، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نقاطی است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $y=2x+1$ معادله یا ضابطه یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادله $y=2x+1$ صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطه روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوه ۱ یعنی $(2x+1)$ ؛ بنابراین رابطه بین x و y کاملاً معین است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها بر اساس ضابطه داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	۱	۵	۲	۰	۱/۲	۰	۳
y	۱	-۷	-۳	۲	۲	۳	۰

$$y = -2x + 3$$

$$y = -2(3) + 3 = -6 + 3 = -3$$

$$-2x + 3 = 3 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{-2} \Rightarrow x = 0$$

$$y = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



او که مبنای جهان، «زوج» آفرید
خود به ما نزدیک تر شد از ورید
«تابعی» را از زمین تا آسمان
کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان
تابع منظور ما، «بی‌بسته» است
«حد»، به امیال دل ما بسته است
دل به بالا تا عنایت می‌کند
حدّ تابع، «بی‌نهایت» می‌کند
هر کسی تایی نهایت را شناخت
چون «مُجانب» سوی آن بالا شناخت



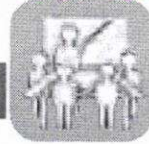
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

طول قد و نماتوب متغیرهایی هستند که وزن مطلوب، متغیری است که وابسته به این دو متغیر است. آیا می‌توانید با توجه به جدول قبل اگر فردی در گروه سنی ۵۴-۴۵ قرار داشته باشد و طول قد این فرد

۱۸۹ سانتی متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟
 تبدیل به متر شود $۱۸۹ \div ۱۰۰ = ۱.۸۹$ متر
 $۲۵ =$ نماتوب
 $۲۵ \times (۱.۸۹)^۲ = ۸۹.۳۰۲۵$

فعالیت



می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی است ثابت که تقریباً $\pi = ۳.۱۴$ در نظر گرفته می‌شود و شعاع دایره است:

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟ **بله**
۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟ **بله** $P = ۲\pi r$
۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟ **شعاع (r) متغیر مستقل**
۴. جدول زیر را کامل کنید. **محیط (P) و مساحت (S) متغیر وابسته**

r بر حسب سانتی متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S بر حسب سانتی متر مربع (مساحت)	π	0.785π	4π	9π	16π
P بر حسب سانتی متر (محیط)	2π	3π	4π	6π	8π

در رابطه خطی $y = 3x + 1$ نیز y ، تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است، یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر x ها را روی محور افقی و y های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم (به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود که آن را با یک زوج به شکل (x, y) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را **یک زوج مرتب می‌نامیم**) در زوج مرتب (x, y) ، x را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم. اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $a = c$ و $b = d$ و برعکس اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه $(a, b) = (c, d)$

یک مثال از تساوی دو زوج مرتب زده شود

فعالیت



۱. جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۰	$\frac{1}{3}$	۱	$\sqrt{2}$	۲	$y = 3x + 1$
y	-۲	۱	$\frac{2}{3}$	۴	$3\sqrt{2} + 1$	۷	
(x, y)	(-۱, -۲)	(۰, ۱)	($\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$)	(۱, ۴)	($\sqrt{2}, 3\sqrt{2} + 1$)	(۲, ۷)	

$$3x + 1 = 1 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0$$

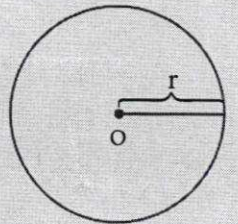
$$3x + 1 = 3\sqrt{2} + 1 \Rightarrow 3x = 3\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$y = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$



$$\frac{2\pi r}{2r} = \pi$$



ریاضی‌دان و منجم ایرانی، جمشید غیاث‌الدین کاشانی در اوایل قرن هشتم هـ. ق توانست عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال بعد از وی بی‌نظیر ماند، محاسبه کند. او کتاب رساله محیطیه خود را با این جمله شروع می‌کند: «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

$$y = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$y = (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x^2 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} - 1 \quad x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	1	2	$\frac{1}{2}$... $-\frac{1}{2}$...	-1
y	2	5	$\frac{5}{4}$...	2

$$y = x^2 + 1$$

در محیط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیز پدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطه بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایه توده بدنی یا نامتوب (BMI) است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{وزن بر حسب کیلوگرم} \\ \text{نامتوب} = \frac{\text{مجذور طول قد بر حسب متر}}$$

با استفاده از این رابطه، برای هر فرد نامتوب محاسبه می‌شود که بر اساس این شاخص و به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

الف) شخص لاغر است و کمبود وزن دارد \Rightarrow نامتوب < 19

ب) شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است \Rightarrow نامتوب $19 \leq$ نامتوب ≤ 25

پ) شخص اضافه وزن دارد \Rightarrow نامتوب $25 <$ نامتوب ≤ 30

ت) شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد \Rightarrow نامتوب ≥ 30

گروه سنی	نامتوب
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

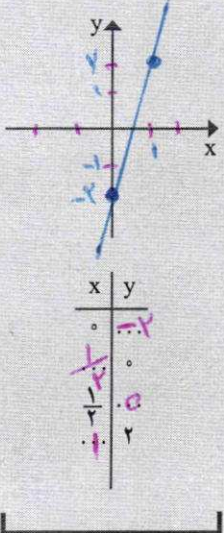
البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نامتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول روبه‌رو نامتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

پس از یافتن نامتوب متناسب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به دست آورد:

$$\text{توان دوم یا مربع قد بر حسب متر} \times \text{نامتوب} = \text{وزن مطلوب بر حسب کیلوگرم}$$

با دقت در رابطه یا تساوی فوق تشخیص می‌دهید که وزن مطلوب، تابعی از طول قد هر فرد است (بستگی به طول قد دارد) و نیز درمی‌یابید که وزن مطلوب به نامتوب نیز بستگی دارد. در فرمول فوق

نمودار خط $y = 4x - 2$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید:



$$y = 4(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$y = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$4x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

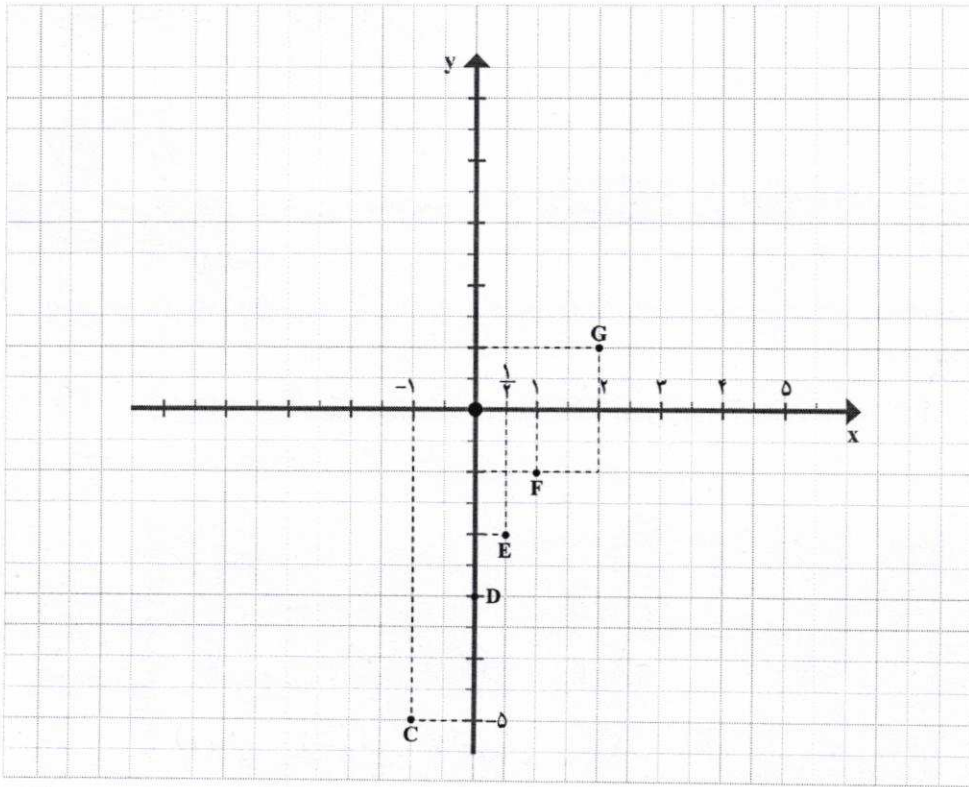
$$4x - 2 = 2 \Rightarrow 4x = 2 + 2 \Rightarrow$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 1$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر هر یک از «زوج مرتب»های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می شود:



$$y = x^2$$

$$y = (-3)^2 = 9$$

$$y = (-2)^2 = 4$$

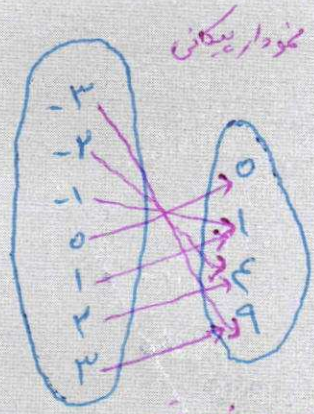
$$y = (-1)^2 = 1$$

$$y = (0)^2 = 0$$

$$y = (1)^2 = 1$$

$$y = (2)^2 = 4$$

$$y = (3)^2 = 9$$



سؤال: برای رابطه $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار بیکنی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

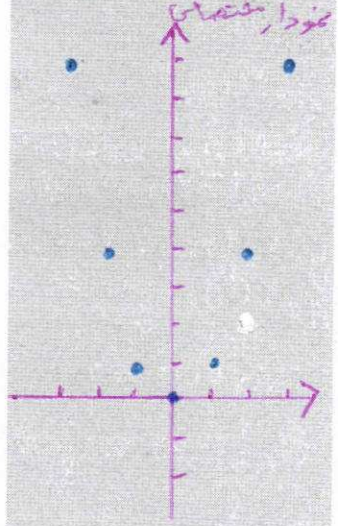
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9
	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

مفهوم تابع

در تمام فعالیت ها، مثال ها و تمرین های قبل، رابطه ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل مانند x ، دقیقاً یک مقدار برای y به دست می آید؛ مثلاً در رابطه $y = 2x + 3$ اگر x را مساوی 2 فرض کنیم، $y = 2 \times 2 + 3 = 7$ به دست می آید.

اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می نامند. به عبارت دقیق تر:

یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

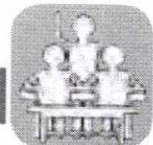


x					
y					
(x, y)					

۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.
 استفاده از نمودار وین و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:



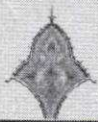
کار در کلاس



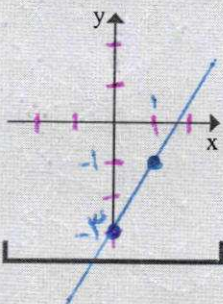
با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه

$A = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید.)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	
y	-5	-3	-2	-1	1	$y = 2x - 3$
(x, y)	$(-1, -5)$ C	$(0, -3)$ D	$(\frac{1}{2}, -2)$ E	$(1, -1)$ F	$(2, 1)$ G	



نمودار خط $y = 2x - 3$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید:

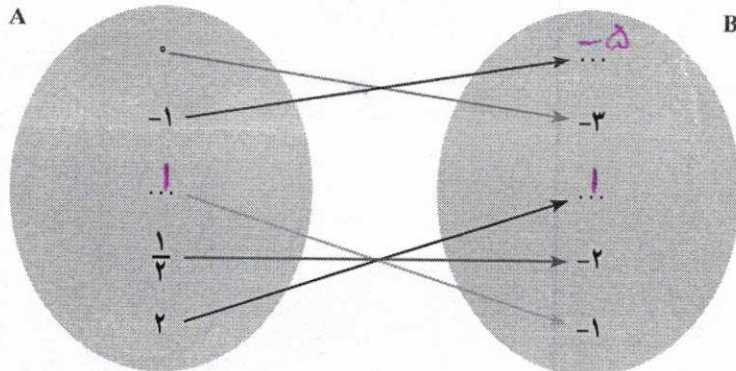


$$y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$(0, -3)$$

$$y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$(1, -1)$$



سوال خوب

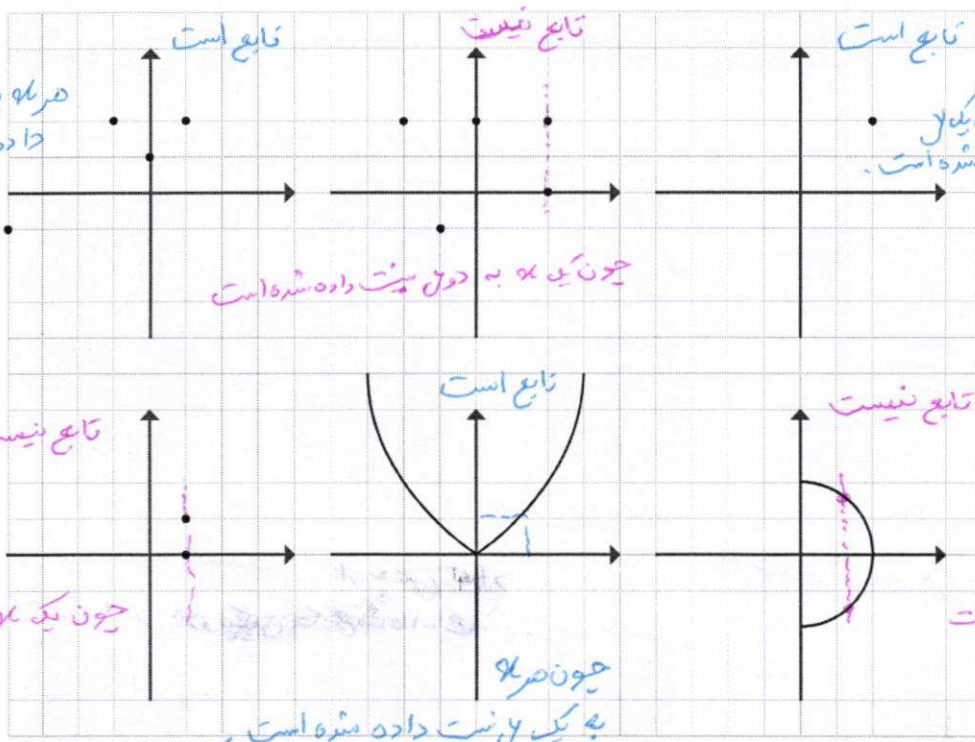
$$D: y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$E: y = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$F: y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$G: y = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع است؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

(الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغانی آن شهر را نسبت می‌دهد.

یک سوغانی ممکن است چند سوغانی داشته باشد.

تابع است تابع نیست

(ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

هر فرد یک روز تولد دارد.

تابع است تابع نیست

(پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

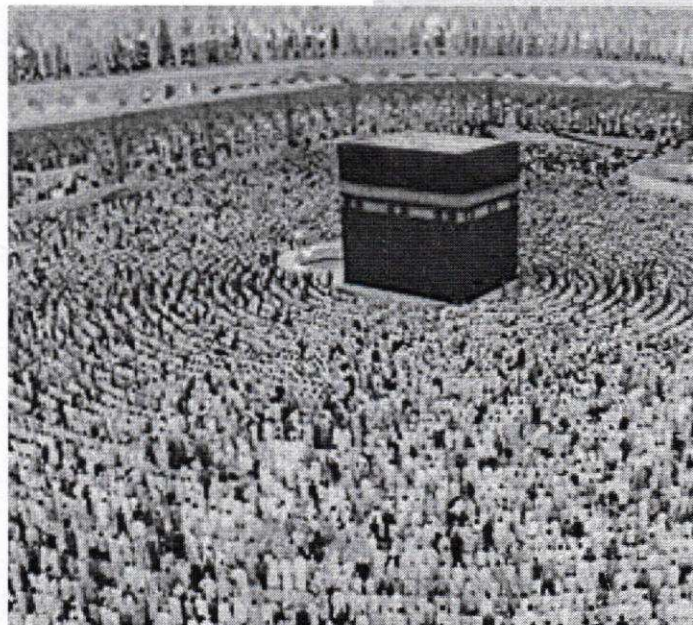
چون ممکن است یک شهر چند نماینده داشته باشد.

تابع است تابع نیست

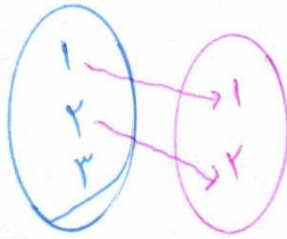
(ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

هر مسلمان یک قبله دارد.



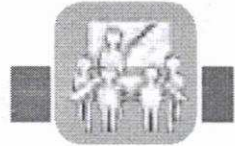
در فعالیت زیر بهتر است یک مثال به این صورت نیز آورده شود



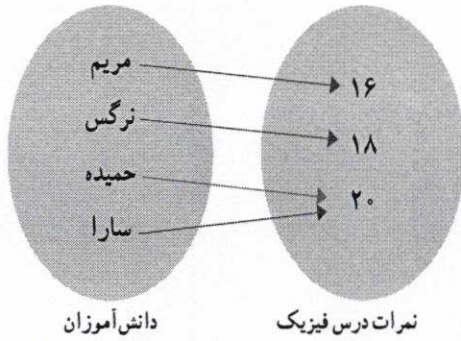
که تابع نیست



فعالیت

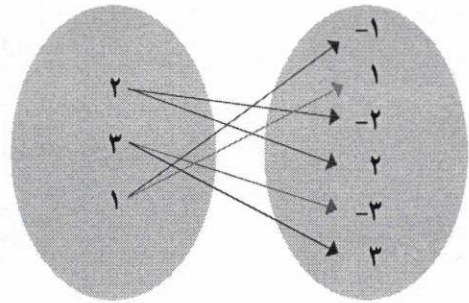


۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع است؟ چرا؟



دانش آموزان

نمرات درس فیزیک

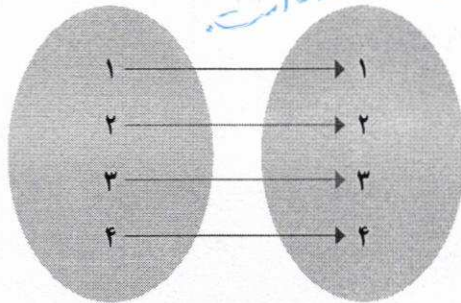


هر عضو از مجموعه اول در مجموعه دوم

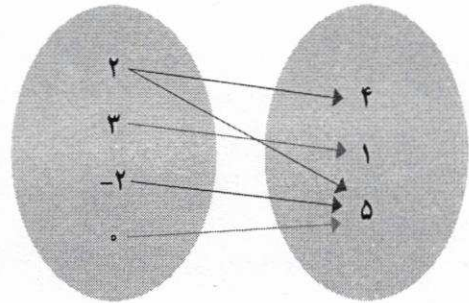
تابع است... زیرا به هر فرد یک نمره نسبت داده شده.

تابع نیست... زیرا

بعضی از اعضای اول دو عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است.



تابع است... زیرا



تابع نیست... زیرا

بعضی از اعضای اول دو عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است.

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$ تابع است.

ب) $G = \{(4,1), (2,-1), (1,-1), (4,2)\}$ تابع نیست.

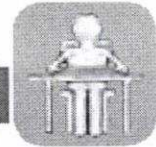
پ) $H = \{(2,3)\}$ تابع است.

ت) $I = \{(3,3)\}$ تابع است.

ث) $J = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,4)\}$ تابع نیست.

تهیه کننده:

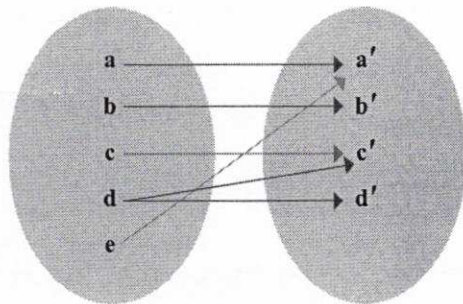
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



تمرین

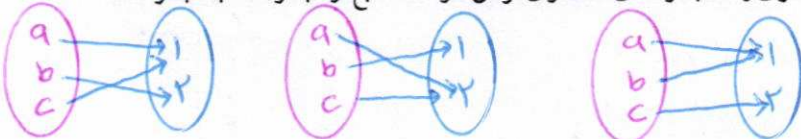
۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟

نکته: اگر c حذف شود
به هیچ عضوی وصل نمی شود
و باز هم نمودار یک تابع خواهد بود



یا باید c حذف شود
تا نمودار پیکانی
نمودار یک تابع شود

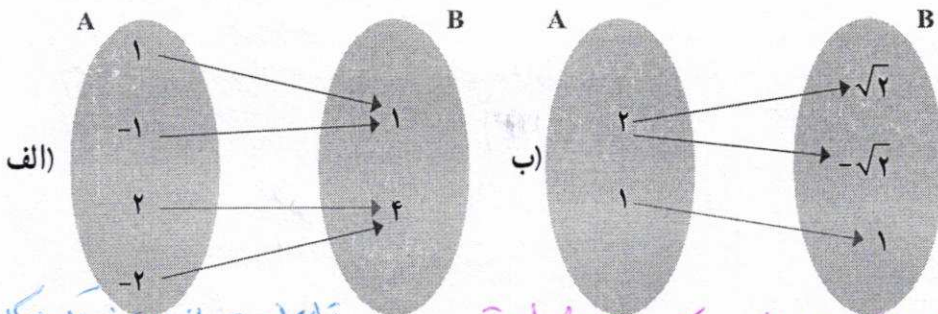
۲. اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.



۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



(الف) $f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$

تابع نیست زیرا

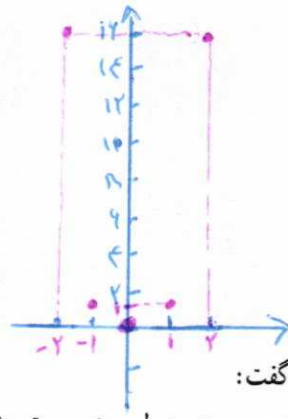
دو زوج مرتب متمایز دارند مولفه اول برابر هستند.

(ب) تابع نیست زیرا دو پیکان خارج شده است

(ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می دهد.

تابع است زیرا هر شخص یک شماره ملی

تفصیلات داده می شود



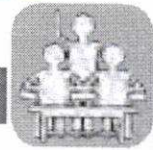
با توجه به فعالیت قبل و تعریف تابع می توان گفت:

* اگر رابطه بین x و y را $(x$ متغیر مستقل) به صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

* اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار بیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

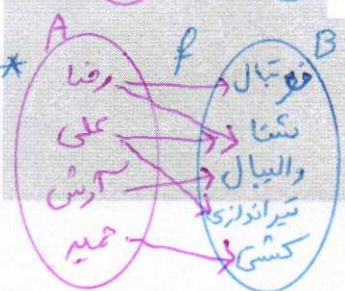
* اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه ای روی خطی که موازی محور y ها باشد، قرار نگیرند.

کار در کلاس

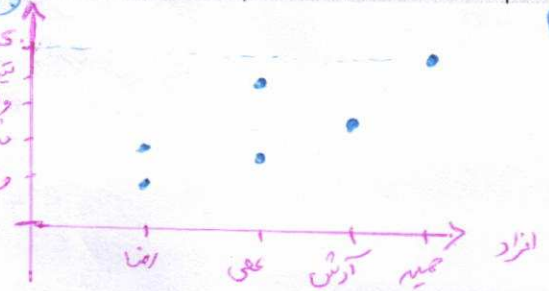


در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش های رابطه ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

نمایش بیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی										
		$F = \{(2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$	F رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A یک واحد بیشتر از آن را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td></tr> </table>	x	y	2	3	3	4	4	5	5	6
x	y													
2	3													
3	4													
4	5													
5	6													
		$F = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,14)\}$	F رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A توان دوم آن را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>16</td></tr> </table>	x	y	1	1	2	4	3	9	4	16
x	y													
1	1													
2	4													
3	9													
4	16													
	<p>نمودار بالاس صفحه</p>	$F = \{(0,14), (1,5), (2,1), (-1,1)\}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{0, 1, 2, -1\}$ توان چهارم آن را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>0</td><td>14</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>14</td></tr> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> </table>	x	y	0	14	1	5	2	14	-1	1
x	y													
0	14													
1	5													
2	14													
-1	1													
		$F = \{(رضا, 40), (امیر, 50), (حمید, 60), (قاسم, 70)\}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A مورد علاقه را نسبت می دهد.	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>رضا</td><td>40</td></tr> <tr><td>امیر</td><td>50</td></tr> <tr><td>حمید</td><td>60</td></tr> <tr><td>قاسم</td><td>70</td></tr> </table>	x	y	رضا	40	امیر	50	حمید	60	قاسم	70
x	y													
رضا	40													
امیر	50													
حمید	60													
قاسم	70													



دورترین کشتی، شیراندازی، والیبال، تنیس، فوتبال

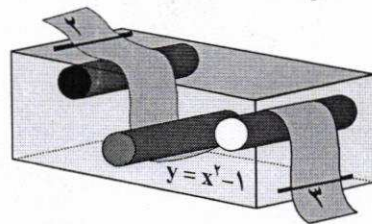
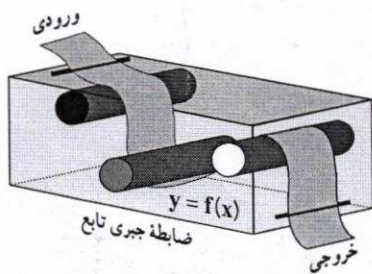


x	y
رضا	فوتبال
علی	تنیس
آرش	والیبال
رضا	تنیس
علی	شیراندازی
حمید	کشتی

درس ۲

ضابطه جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با



یک ضابطه (فانسون) بیان کنیم. به طور مثال تابع

$$f = \left\{ (1, 4), (2, 5), (-1, 2) \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\}$$

در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفه اول

مؤلفه دوم، به دست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$,

در این صورت $y = x + 3$. معادله $y = x + 3$ را ضابطه

تابع f می‌نامیم. اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم

و x متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f

روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y

(متغیر وابسته) است؛ یعنی، $y = f(x)$

متغیر مستقل

دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعه شامل همه مؤلفه‌های

اول را دامنه تابع و مجموعه شامل همه مؤلفه‌های دوم را بُرد تابع می‌نامیم.

دامنه تابع f را با D_f و بُرد آن را با R_f نشان می‌دهیم.

متغیر وابسته

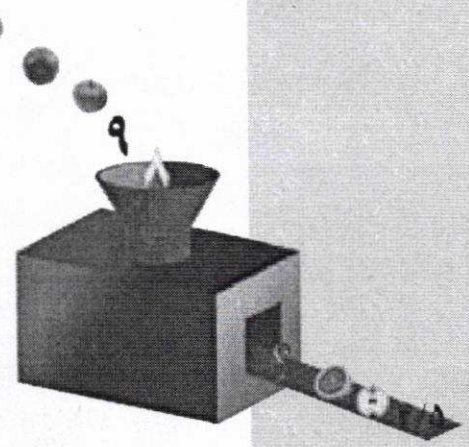
یک تابع مانند f از مجموعه A به مجموعه B ، قانون یا ضابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت دهد.

۱. Domain

۲. Range

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



الف) ۵)

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=2$$

$$x+y=4 \Rightarrow y=4-x \Rightarrow y=2$$

$$x^2+y^2=(2)^2+(2)^2=4+4=8$$

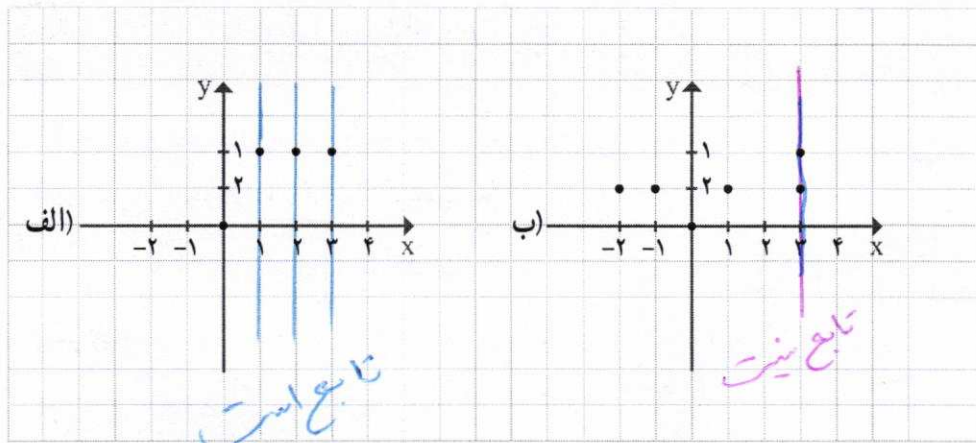
۵. اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل x^2+y^2 را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید.)

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

$$(2, x+y) = (2, 4) \Rightarrow x+y=4$$

$$(5, 2) = (5, x-y) \Rightarrow x-y=2$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می کند؟



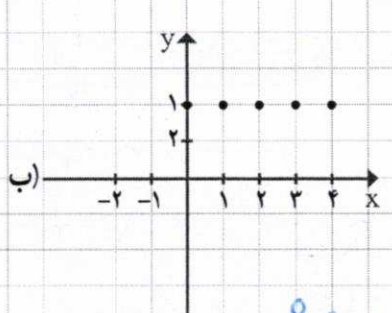
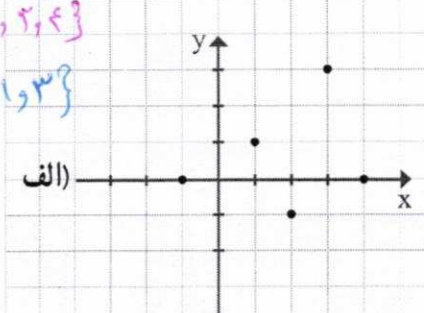
خواندنی

توابع در شاخه های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم گیری های اقتصادی استفاده می شود و یا در فیزیک، هنگامی که می خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می شود. توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می شوند و کاری را بر روی ورودی های خود انجام می دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل سازی ساختمان داده ها و تأثیرات الگوریتم می بینیم.



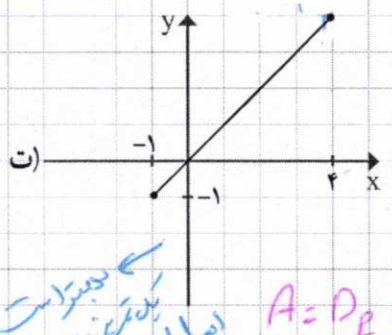
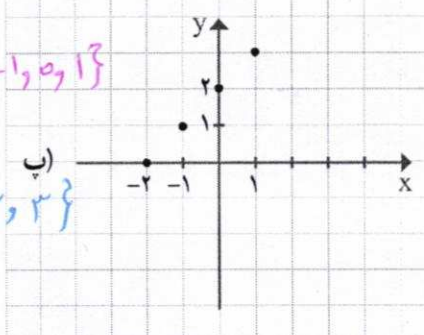
۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

$D_f = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$
 $R_f = \{0, 1, 2, 3\}$



$D_f = A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $R_f = B = \{1\}$

$A = D_f = \{-2, -1, 0, 1\}$
 $R_f = B = \{0, 1, 2, 3\}$



$B = R_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1.5 \leq x \leq 4\}$

$A = D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1.5 \leq x \leq 4\}$

بصورت
 بدترین به همین صورت
 اصل داشته و
 نابرابری نه

۲. دامنه و برد هریک از تابع های زیر را مشخص کنید.

الف) $f: A \rightarrow B$ $R = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

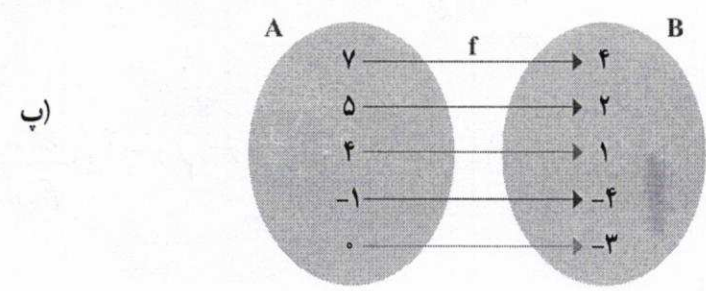
$f(x) = x + 4$ $A = \{2, -1, 0, 1, \dots\}$

ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

$= \{1, 2, 3, 4, \sqrt{2}\}$
 $= \{-1, -2, -3, -4, -\sqrt{2}\}$

$= \{7, 5, 4, -1, 0\}$

$= \{4, 2, 1, -4, -3\}$



تهیه کننده:

برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.



فعالیت

با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

مجموعه B

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

x	f(x) = 2x^2 + 1
-1	f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3
$\sqrt{2}$	f($\sqrt{2}$) = 2(\sqrt{2})^2 + 1 = 5
2	f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9
1	f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3
0	f(0) = 2(0)^2 + 1 = 1
$\frac{1}{2}$	f($\frac{1}{2}$) = 2(\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}

مجموعه B

$$R_f = \{3, 5, 9, 1, \frac{3}{2}\}$$

الف

$$f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

الف

$$f: A \rightarrow B, A = \{1, -1, 0, 2, \sqrt{2}, \frac{1}{2}, 2\}, B = \{0, -2, -1, 4, 3, 2, \frac{-22}{25}, 27\}$$

ب

$$f: A \rightarrow B, A = \{0, -1, 8, 3, 2\}, B = \{0, -1, 2, 1, \sqrt{3}, -1\}$$

ب

$$f: A \rightarrow B, A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}, B = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}, -1\}$$

ب

$$f(0) = \sqrt{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$f(-1) = \sqrt{-1+1} - 1 = 0 - 1 = -1$

$f(8) = \sqrt{8+1} - 1 = 3 - 1 = 2$

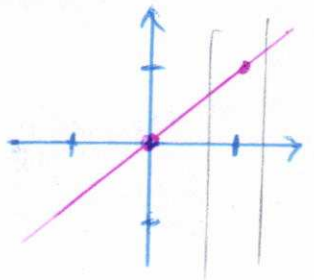
$f(2) = \sqrt{2+1} - 1 = \sqrt{3} - 1$

ب

$$f(-2) = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} < f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2} < f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1 \times 2}{1 \times 2}}{\frac{1}{2} - \frac{2 \times 2}{1 \times 2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1$

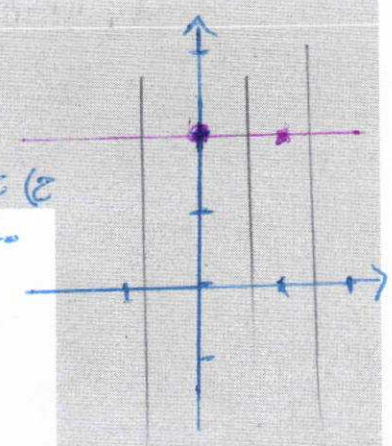
ج) تابع است
 $f(0) = 0$
 $f(1) = 1$



چون هر خط موازی محورین ها نمودار
 واحد اکثر در یک نقطه
 قطع می کنند
 ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$

ج) تابع است چون هر خط موازی محورین نمودار واحد اکثر در یک نقطه قطع می کنند
 ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2$
 $f(0) = 2 = f(1) = 2$



۲. بُرد هر یک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$
 $B = \{1, 3, 7\}$

$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
 $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
 $f(1) = (1)^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
 $f(2) = (2)^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$
 $f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$
 $B = \{3, 2, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

پ) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$
 $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3\}$

$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$
 $f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$
 $f(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
 $f(4) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
 $f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x$, $A = W = \{0, 1, 2, \dots\}$
 $B = W = \{0, 1, 2, \dots\}$

$f(0) = 0$
 $f(1) = 1$
 $f(2) = 2$

ث) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 0$, $A = \mathbb{R}$
 $B = \{0\}$

$f(0) = 0$
 $f(1) = 0$
 $f(-100) = 0$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(3)$ را بیابید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x-4)^3$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

پ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^2 - 4$

ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt[3]{x-4}$

$f(3) = 2(3)^3 - 4 = 2(27) - 4 = 54 - 4 = 50$

$f(x) = 2\sqrt[3]{x-4}$

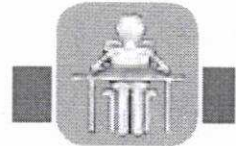
ج) $f(1) = \frac{1}{1} + 1 = \frac{1}{1} = 1$
 $f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
 $f(-1) = \frac{-1+1}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$
 $f(-2) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{1\}$$

$$\{1, 2, 3, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, 5\}$$

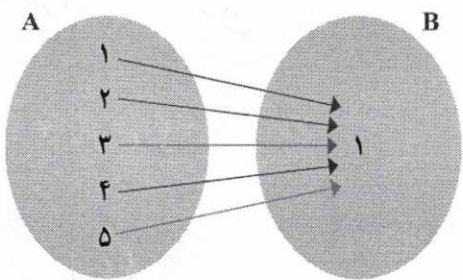
$$\{1, 2, 3, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, 5\}$$



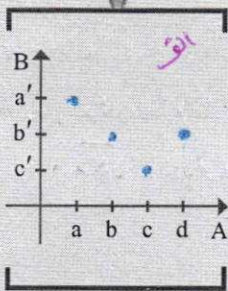
تمرین

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.

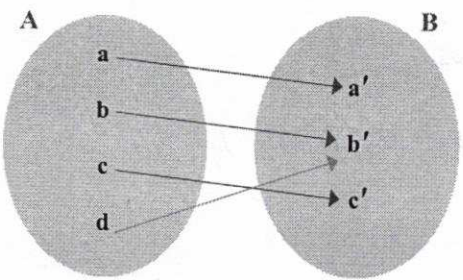
ن)



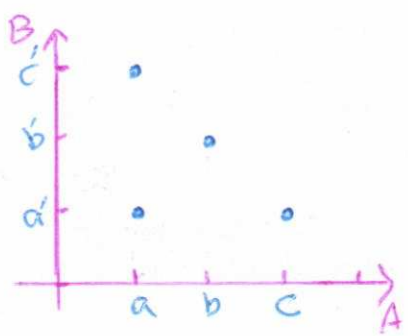
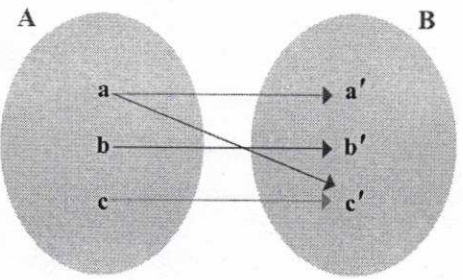
$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0)\}$$



تابع است
چون از هر عضو A یک بیگانه خارج شده است.

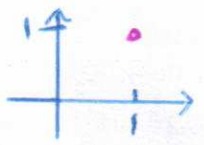


تابع نیست
چون از یک عضو مجموعه A دو بیگانه خارج شده است.



پ) $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$

ت) $g = \{(1, 1)\}$

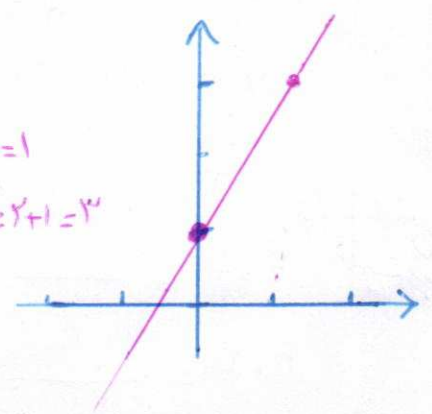


ث) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

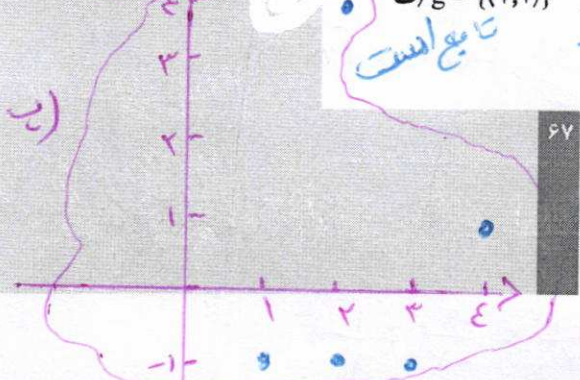
$f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

$f(1) = 2(1) + 1 = 3$



تابع نیست - دوزخ رتیب مقایسه با مولفه اول برادر دارد

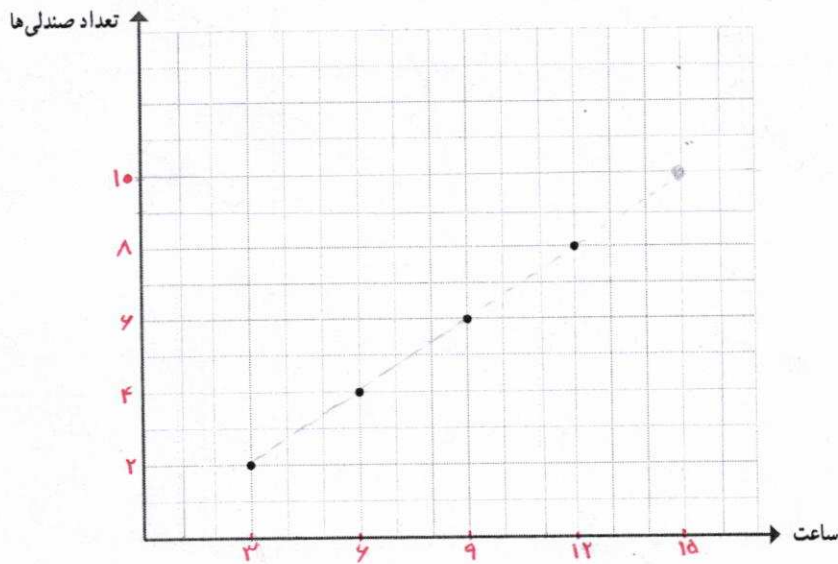


ب)

درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟ **آیا**



- آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟ **بله**
- آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟ **خیر**

سأره ی فعالیت

فعالیت ۱

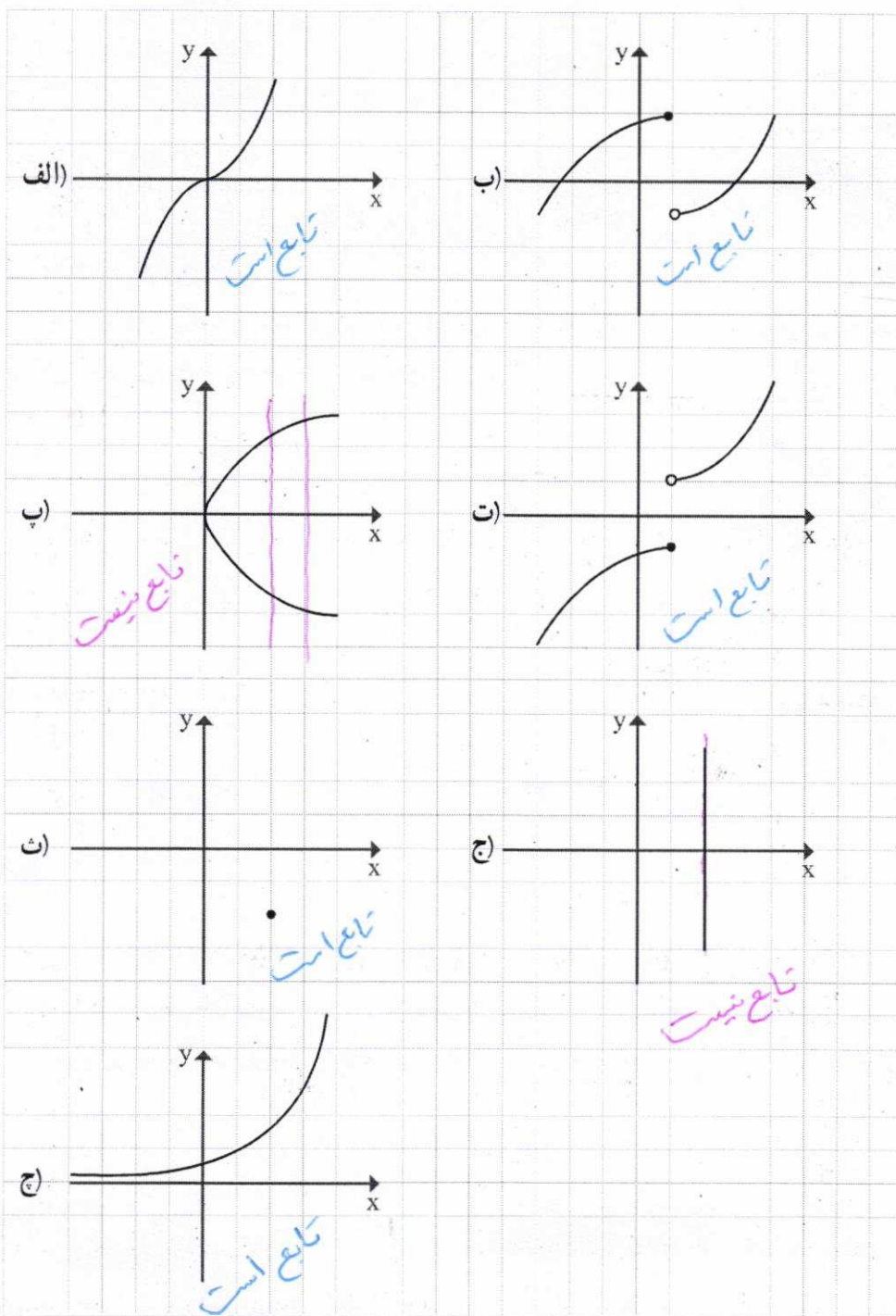


الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟



تهیه کننده:

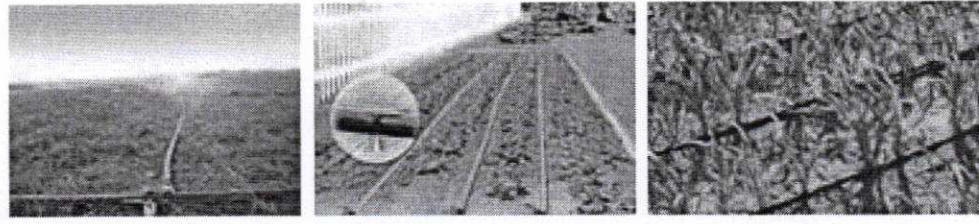
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تیم‌های فعالیت



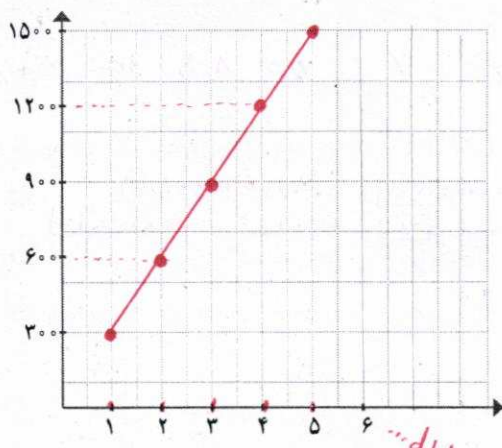
فعالیت ۲

یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی^۱ در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می‌کند.



x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$ بر حسب متر	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰

اگر متر از لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.



نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

می‌خواهم بهترین تابع خطی رسم کنم.



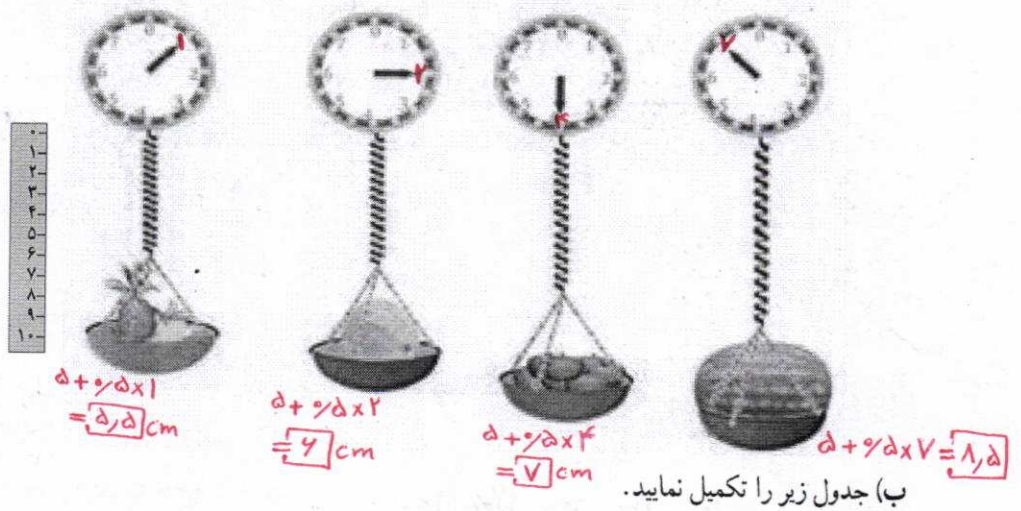
کتاب و آب
هر دو در بحران‌اند!
یکی از کم‌مصرفی،
دیگری از پر مصرفی!

هر تابع به صورت $y=f(x)$ که در آن $y=mx+h$ یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به دست آمده در فعالیت ۱ و ۲ هر دو توابع خطی‌اند.

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد اشتغال‌زایی، تأمین ۸۵ درصد غذای جامعه، ۲۵ درصد صادرات غیر نفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را عهده‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهنده این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در دسترس، محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب یا استحصال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کشت آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف‌کننده آب در کشور به شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد اتلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)‌های پیشرفته آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آبی زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیر کشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید.



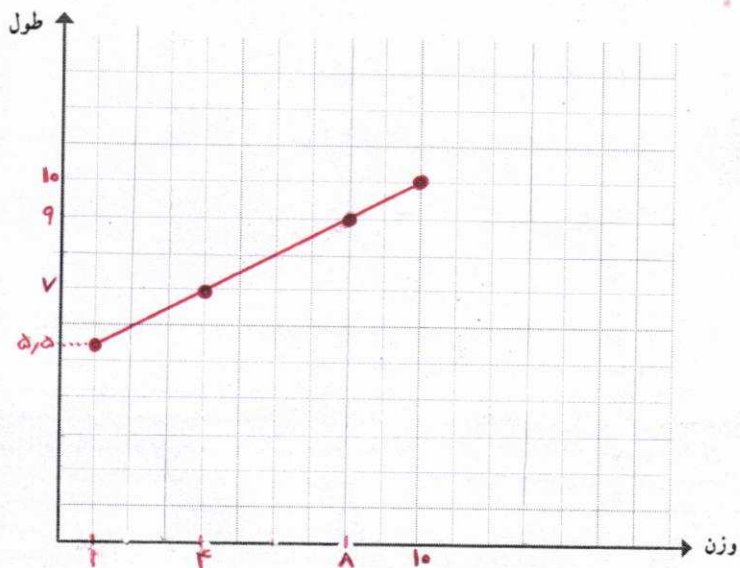
اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتیمتر)	۵,۵	۷	۹	۱۱,۵	۱۵	$\delta + \gamma \delta a$

استفاده از فرمول $f(x) = L$

(پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(10)$, $f(8)$, $f(4)$, $f(1)$ و $f(10)$ (بر حسب سانتی متر) را محاسبه کنید.

$L = f(a) = \delta + \gamma \delta a \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \delta + \gamma \delta \times 1 = \boxed{5,5} \\ f(2) = \delta + \gamma \delta \times 2 = \boxed{7} \\ f(4) = \delta + \gamma \delta \times 4 = \boxed{9} \\ f(7) = \delta + \gamma \delta \times 7 = \boxed{11,5} \\ f(10) = \delta + \gamma \delta \times 10 = \boxed{15} \end{cases}$

(ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بر حسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به 44° درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

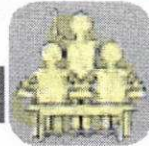
$44 = 55x - 35$
 $55x = 79$
 $x = 1.436$

$x = 1.436$

شیب خط: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	معادله خط یا ضابطه تابع: $y=f(x)=mx+h$	$f(1)$	$f(2)$
$m = \frac{185 - 75}{2 - 1} = 110 = 55$	$(2, 75) \rightarrow 75 = 55 \times 2 + h$ $h = 75 - 110 = -35$ $y = 55x - 35$	75	185

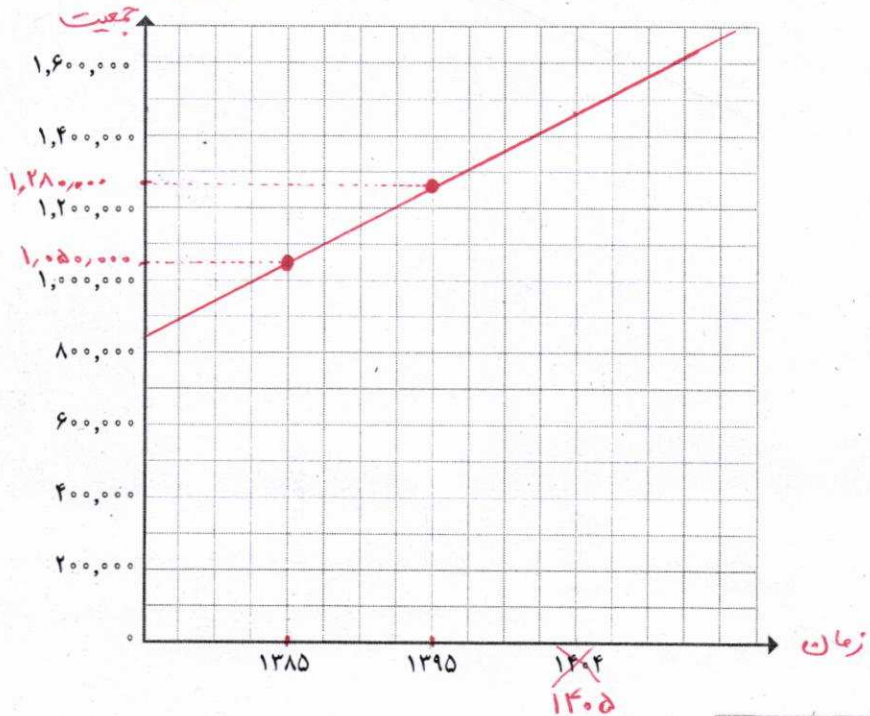
$x=2 \Rightarrow y = 55 \times 2 - 35 = 75$
 $x=1 \Rightarrow y = 55 \times 1 - 35 = 20$

کار در کلاس



در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پانجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به طور تقریبی برآورد کنید.

نرخ رشد:
 به میزان افزایش
 یک کمیت
 (نظیر جمعیت)
 در واحد زمان،
 نرخ رشد گفته می‌شود.



رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع $y=mx+h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

کار در کلاس



در یک تابع خطی $f(0)=2$ و $f(2)=3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$

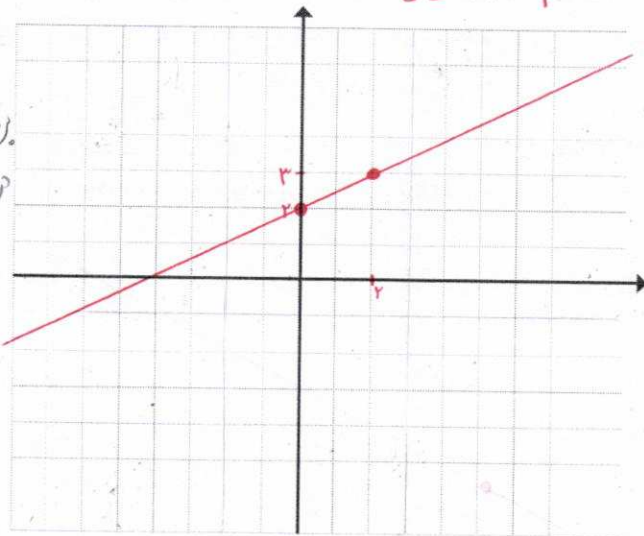
$$y = mx + h$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \times 0 + h \Rightarrow h = 2$$

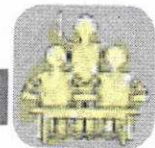
$$y = mx + h \Rightarrow \text{معادله خط: } y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\text{بنابراین } y = f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

برای رسم از شرط داده شده در مسئله استفاده کردیم



کار در کلاس



جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$m = \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{y}{x} \quad ; \quad 0 = \frac{y}{x} x + h \Rightarrow h = 0$$

جواب (د)

$$\text{معادله خط } f(x) = \frac{y}{x} x + 0 \Rightarrow f(x) = \frac{y}{x} x$$

$$* f(0/1) = \frac{y}{x} \times 1 = \frac{y}{x}$$

$$** f(-1) = \frac{y}{x} \times (-1) = -\frac{y}{x}$$

$$** \text{تفاوت مثبت رادیکال} = \frac{y}{x} - (-\frac{y}{x}) = \frac{2y}{x}$$

۴ نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ و از نقطه $A(0, 5)$ بگذرد.

۵ نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/1)$ و $f(-0/1)$ را به دست آورید.

۶ رابطه بین درجه دما بر حسب سانتی گراد و فارانهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن بر حسب فارانهایت چقدر افزایش داشته است؟

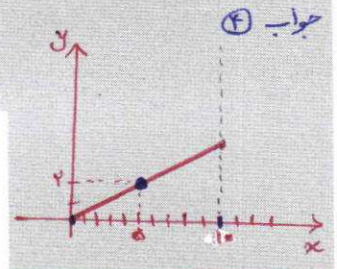
۷ یک شرکت برای تولید x کالا $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری - چابهار



جواب ۶

$$F = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 36 + 32 = 72$$

$$F = 72$$

جواب ۷ الف

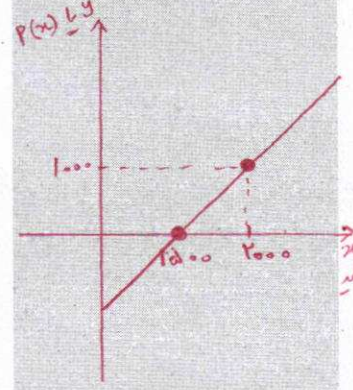
$$R(x) = 70x$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 70x - (3000 + 50x)$$

$$P(x) = 20x - 3000$$

x	1500	2000
y	0	1000



ب

$$P(x) = 0$$

$$20x - 3000 = 0$$

$$\frac{20x}{20} = \frac{3000}{20} \Rightarrow x = 150$$

لازم باید بین ۱۵۰۰ کالا بفروشد تا سوددهی آغاز شود.

$$x = y + 4$$

$$P = 2(x + y) = 2(y + 4 + y) \Rightarrow P = 2(2y + 4)$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 4y + 8}$$

محیط تابع خطی است چون به شکل $y = mx + h$ درآمده است.

کار در کلاس



ضابطه تابع محیط مستطیل هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟ خیر

مساحت $S = x \times y = (y + 4) \times y$

$$\boxed{S = y^2 + 4y}$$

مساحت یک تابع خطی نیست؛ چون به شکل $y = mx + h$ در نیامده است (متغیر با توان ۲ دارد)

کار در کلاس

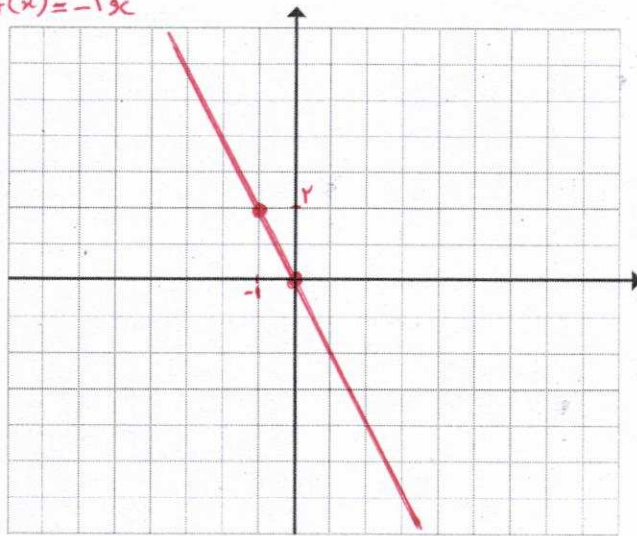


اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.

$$m = \frac{2 - 0}{-1 - 0} = -2$$

$$0 = -2 \times 0 + h \Rightarrow \boxed{h = 0}$$

معادله ضابطه تابع f : $y = f(x) = -2x$



$$m = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2$$

$$1 = 3 \times 1 + n \Rightarrow n = 1 - 3$$

$$\boxed{n = -2}$$

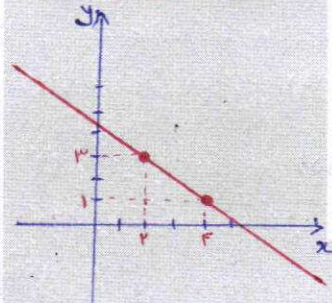
$$\boxed{f(x) = 3x - 2}$$

$$m = \frac{3 - 1}{2 - 4} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$3 = -1 \times 2 + h \Rightarrow h = 3 + 2$$

$$\boxed{h = 5}$$

$$\boxed{f(x) = -x + 5}$$



تمرین



۱) مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(1) = 1$ و $f(2) = 4$.

۲) ضابطه تابع خطی f را که از نقاط $(2, 3)$ و $(4, 1)$ می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳) در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$ ، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

$$m = \frac{8 - 5}{2 - 1} = 3$$

$$5 = 3 \times 1 + h \Rightarrow h = 5 - 3 \Rightarrow \boxed{h = 2}$$

معادله خط: $y = f(x) = 3x + 2$

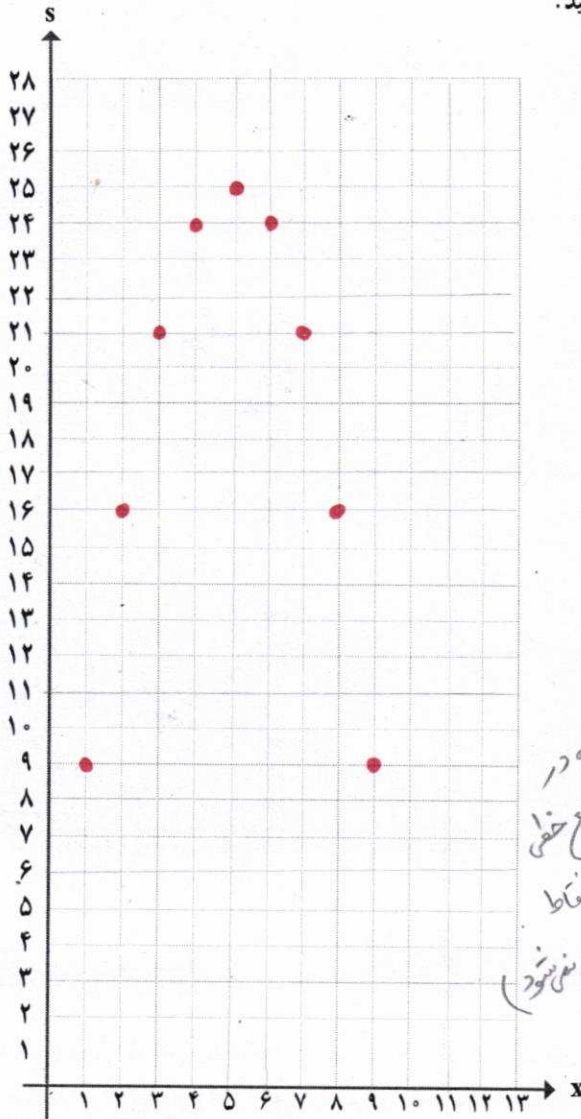
$$f(-3) = 3(-3) + 2 = -9 + 2 = \boxed{-7}$$

$$f(5) = 3(5) + 2 = 15 + 2 = \boxed{17}$$

تهیه کننده:

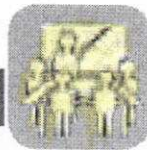
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



باید وقت در نقاط مشخص شده در دستگاه، منبسط کنیم تا به تابع خطی نسبت (با وصل کردن نقاط) به هم، خط راست ایجاد می شود.

فعالیت



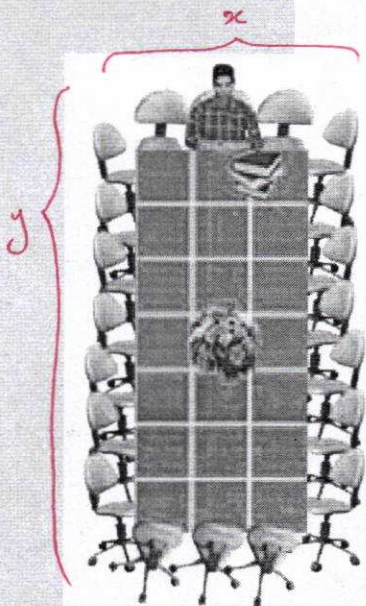
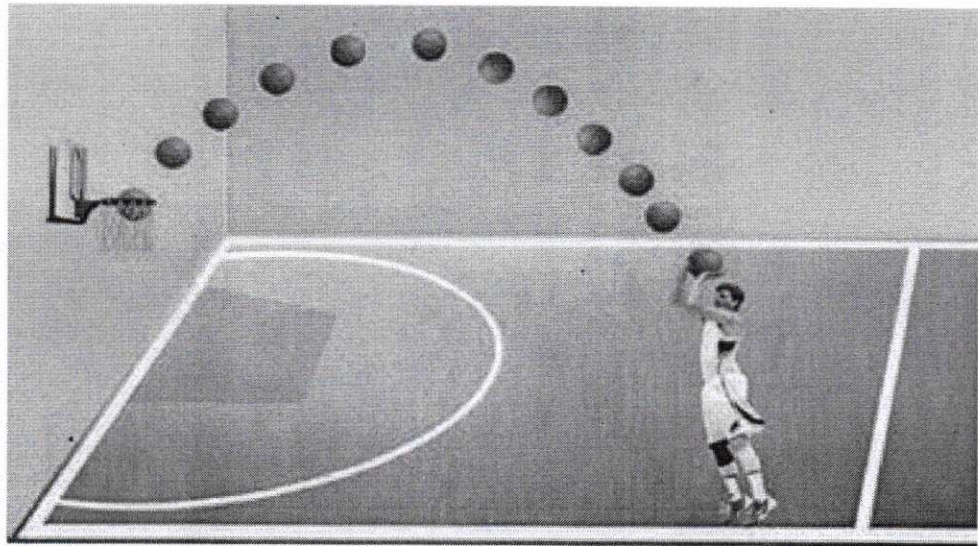
یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $1200 - x$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 200 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

نیازی به ضرب کردن نیست چون در سمت (ب) شده است) $R(x) = (1200 - x) \times x$ در آمد

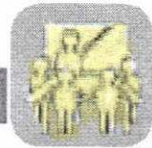
$$C(x) = 30000 + 200x$$

درس ۴

نمودار تابع درجه ۲



فعالیت

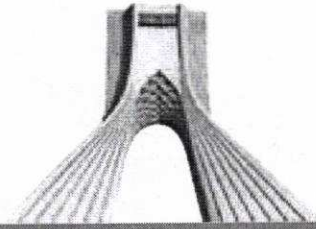


برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع هایی 1×1 ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت 20 تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرد با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می دهیم. الف) جدول زیر را کامل کنید.

$\frac{20}{2} = x + y$
 $x + y = 10$

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
s	۹	۱۶	۲۱	۲۴	۲۵	۲۴	۲۱	۱۶	۹
(x, s)	(۱, ۹)	(۲, ۱۶)	(۳, ۲۱)	(۴, ۲۴)	(۵, ۲۵)	(۶, ۲۴)	(۷, ۲۱)	(۸, ۱۶)	(۹, ۹)

با توجه به محیط باید جمع طول در عرض عدد باشد



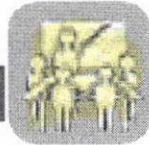
رسم نمودار تابع درجه دوم

معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت \cup یا \cap است که به آن سهمی می گوئیم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است. *این محور تقارن من عمل شود*

- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cup خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

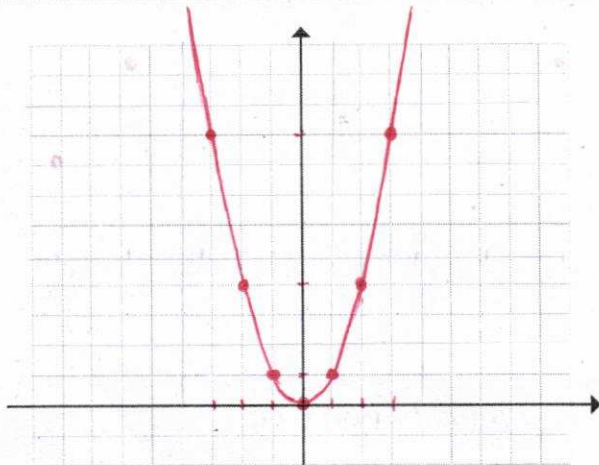
- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cap خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید. *درجه ی ۲ - سهمی*

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...



تهیه کننده:

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ آمیزی به ازای $x=200$ (۲۰۰ متر کار در یک روز) و $x=300$ چقدر است؟
 $x=200 \Rightarrow$ قیمت = $1200 - 200 = 1000$ تومان
 $x=300 \Rightarrow$ قیمت = $1200 - 300 = 900$ تومان

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x=200$ و $x=300$ چقدر است؟
 $x=200 \Rightarrow$ هزینه $C(200) = 30000 + 200 \times 200 = 70000$
 $x=300 \Rightarrow$ هزینه $C(300) = 30000 + 200 \times 300 = 90000$
 پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(200)$ ، $P(100)$ ، $P(300)$ را محاسبه کنید.

پ) $P(x) = R(x) - C(x)$

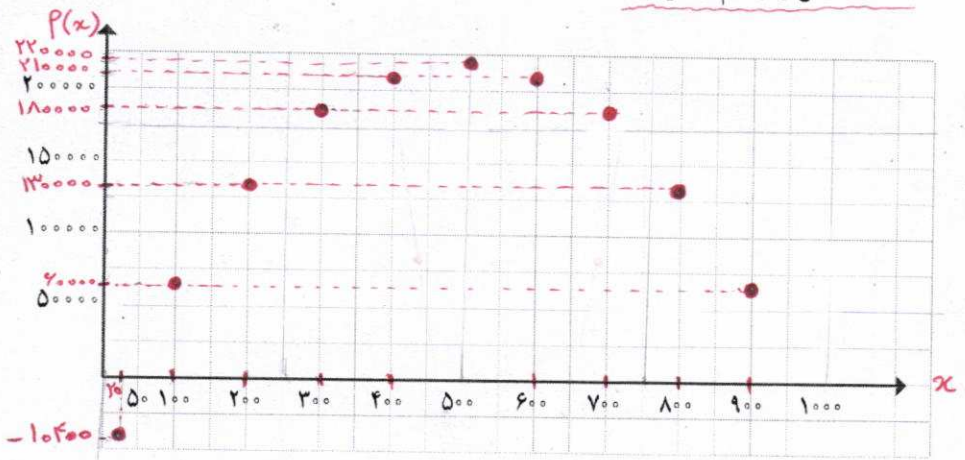
$P(x) = x(1200 - x) - (30000 + 200x)$

$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = -10400$
 $P(100) = 100 \times (1200 - 100) - (30000 + 200 \times 100) = 40000$
 $P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = 130000$
 $P(300) = 300 \times (1200 - 300) - (30000 + 200 \times 300) = 180000$

ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید: $P(x) = 1000x - x^2 - 30000$
 ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

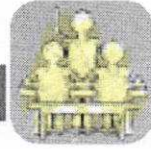
x	200	100	200	300	400	500	600	700	800	900
P(x)	-10400	40000	130000	180000	210000	220000	210000	180000	130000	40000

ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



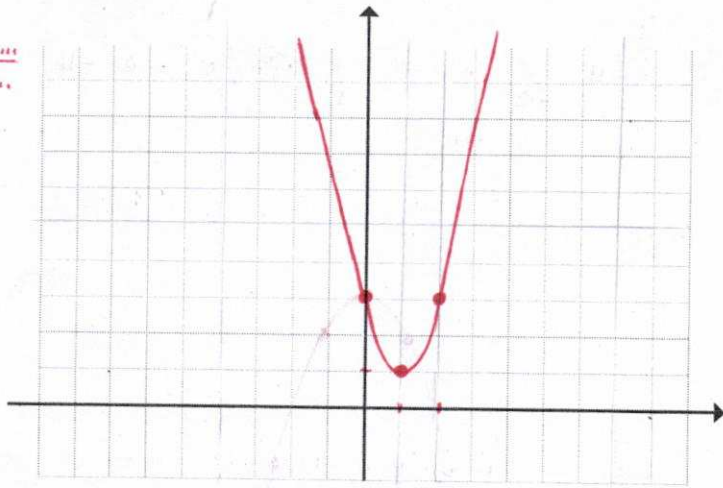
چ) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه مترهاژ بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می کند؟
 چون $P(x)$ منفی شده (یعنی شرکت ضرر داشته است)
 خیر - از $x=500$ به بعد سود کمتر شود.

کار در کلاس



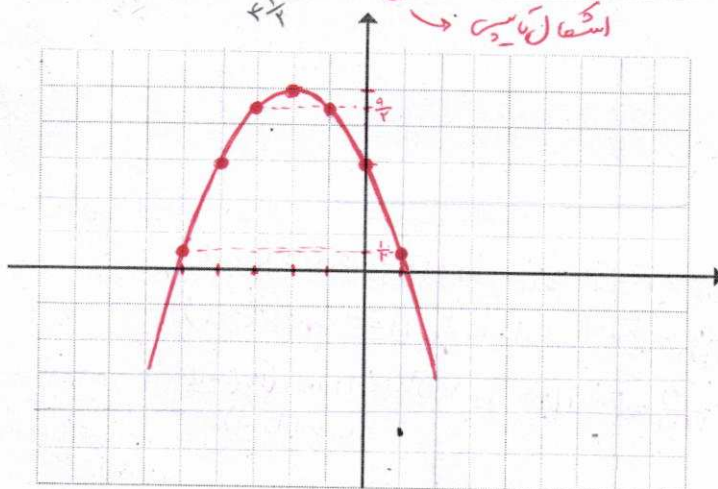
به کمک صفت (ت) کار در طلاس صفت قبل
 الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.
 (رأس سهمی (۱، ۱))
 بخش اول و دوم را

	رأس	
x	۱	۲
y	۱	۳



ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.
 رأس سهمی (-۲، ۵)

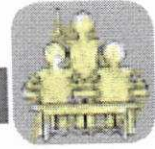
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{9}{4}$	5	$\frac{9}{4}$	3	$\frac{1}{4}$...



تهیه کننده:

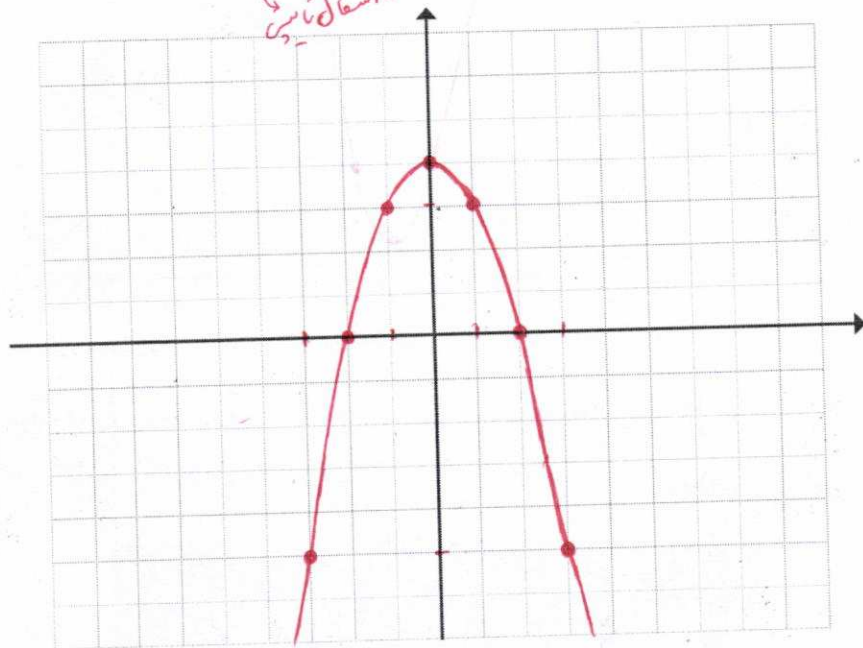
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

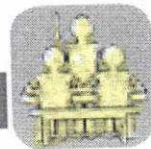


جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	...



کار در کلاس



نقاط رأس سهمی‌هایی را که معادله‌های آنها داده شده است، مشخص کنید.

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0^2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{رأس (0, 0)}$

الف) $y = x^2$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 - 0^2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \text{رأس (0, 4)}$

ب) $y = 4 - x^2$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \text{رأس (1, -1)}$

پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

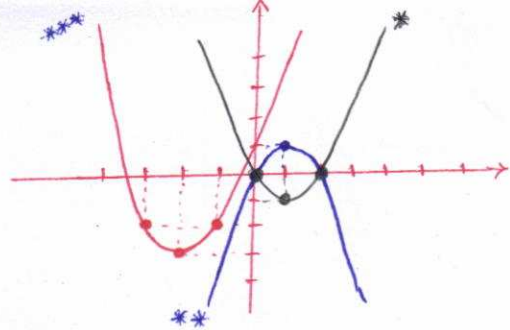
ت) $y = 2(x-1)^2 + 1$

اول ساده کردن: $y = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 2 + 1$

$y = 2x^2 - 4x + 3$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{رأس (1, 1)}$

توجه: عرض رأس، همان عدد بعد از پرانتز در لایه توان ۲ است. طول رأس، همان عرضی عدد داخل پرانتز در لایه توان ۲ است.



*** $y = x^2 + 4x + 1$

x	...	3	...
y	...	-2	...

*** $y = -(x-1)^2 + 1$

x	...	1	2	...	
y	...	0	1	0	...

* $y = x^2 - 2x$

x	...	0	1	2	...
y	...	0	-1	0	...

تمرین



1. نمودار سهمی های $y = x^2 + 4x + 1$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 - 2x$ را رسم کنید.
2. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشند، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.
3. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می شود. **بازای $x = 7.5$**
4. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.
5. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پژوهشی تولید می شود. این تولیدی هر یک از لامپ ها را می تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 400x + 100$ باشد:

حل 1

حزین درآمد
سود $P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - (18x + 40)$

$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 40$

در ۲۵ روز سهمی - ماکزیم در رأس اتفاق می افتد

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+12)}{2(-\frac{1}{4})} = +12$

$x = 12$ بازینه

$P(12) = -\frac{1}{4}(12)^2 + 12(12) - 40$

$P(12) = 32$ ماکسیم مقدار سود

حل 3

مساحت مستطیل $P = x(x+y) = 26$

$x+y = 13 \Rightarrow y = 13-x$

مساحت مستطیل $S = x \cdot y = x(13-x)$

$S = 13x - x^2$ سهمی

x	...	4	5	6	...
y	...	9	8	7	...

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

$P(x) = R(x) - c(x) = 200x - (x^2 + 400x + 100)$

$P(x) = -x^2 + 140x - 100$

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

ب) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟ **$x = 70$ را در تابع سود جایگزین می کنیم**

$P(70) = -70^2 + 140(70) - 100$

$P(70) = 4900$ بیشترین سود روزانه کارگاه

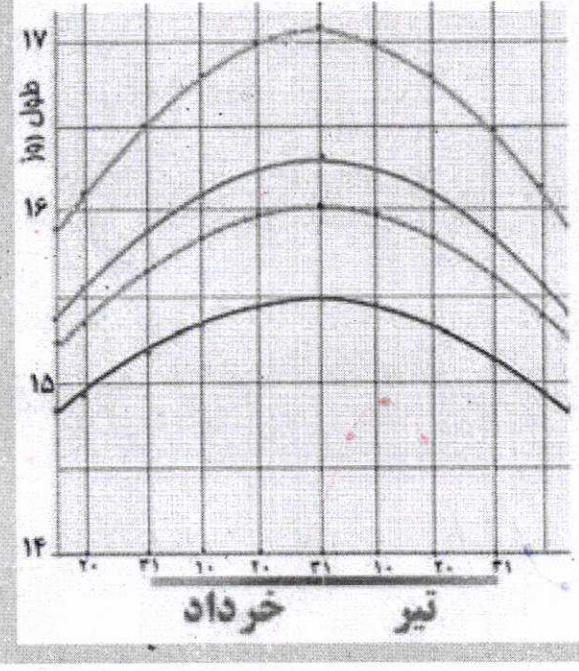
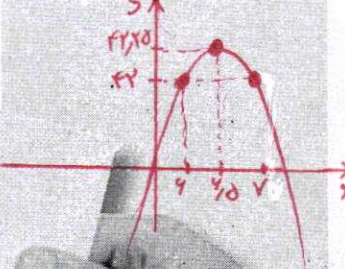
تابع سود ۲ درصدی ۲۰ سهمی است و ۶۰ روز سهمی

در رأس آن اتفاق می افتد

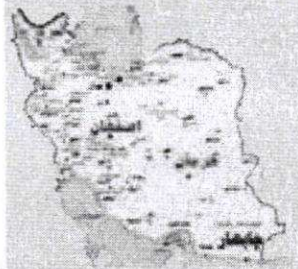
$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-140}{2(-1)} \Rightarrow x = 70$

یعنی ۷۰ لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد

خواندنی



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک تر و هر چه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ تری می باشد. نمودار مقابل نشان می دهد که طول روز در ایران در ایام خرداد ماه و تیر ماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.



حل 4

$2x + a = 100 \Rightarrow a = 100 - 2x$

$y = xa = x(100 - 2x) \Rightarrow y = 100x - 2x^2$ در ۲۵ سهمی

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} \Rightarrow x = 25$

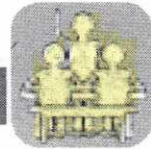
$a = 100 - 2(25) \Rightarrow a = 50$

$y_{max} = xa = 25 \times 50 = 1250$

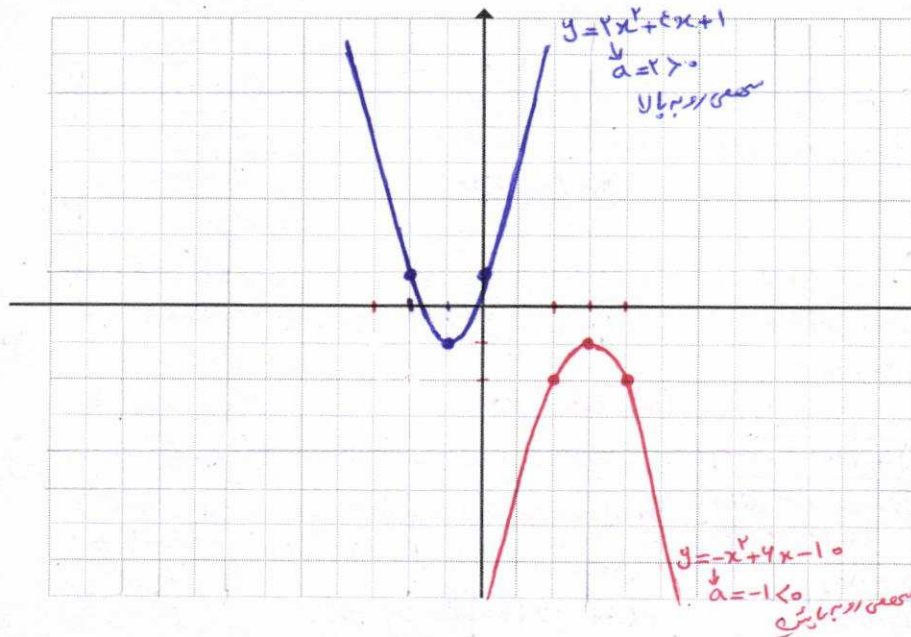
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



۱) نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 4x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



$$y = -x^2 + 4x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

طول رأس

x	...	2	3	4	...
y	...	-2	-1	-2	...

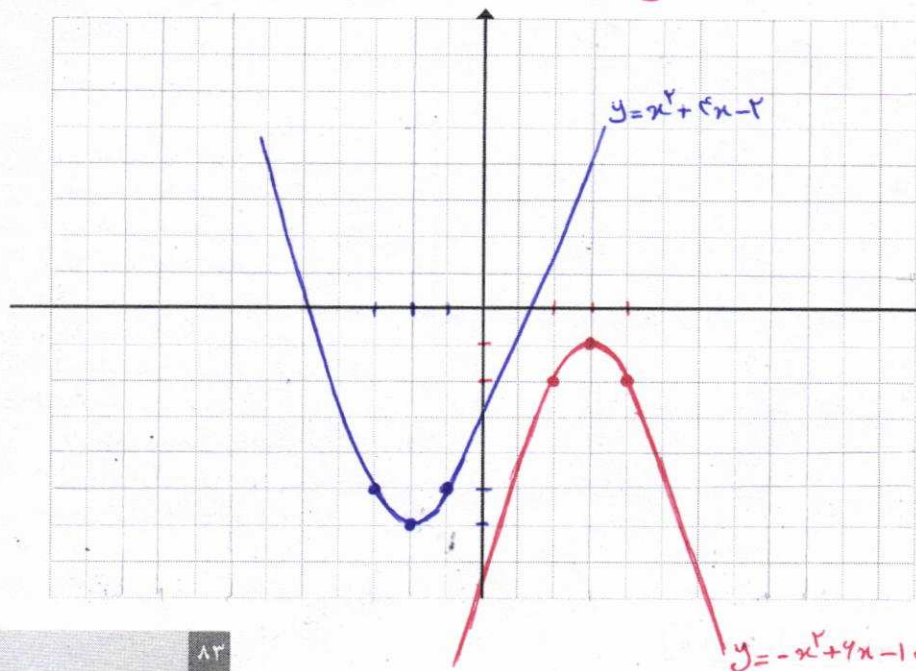
$$y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1$$

طول رأس

x	...	-2	-1	0	...
y	...	1	-1	1	...

۲) نمودار توابع $y = x^2 + 4x - 2$ و $y = -x^2 + 4x - 10$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید. بعضی نقاط ندارند.



$$y = -x^2 + 4x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

طول رأس

x	...	2	3	4	...
y	...	-2	-1	-2	...

$$y = x^2 + 4x - 2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2$$

طول رأس

x	...	-3	-2	-1	...
y	...	-5	-2	-5	...

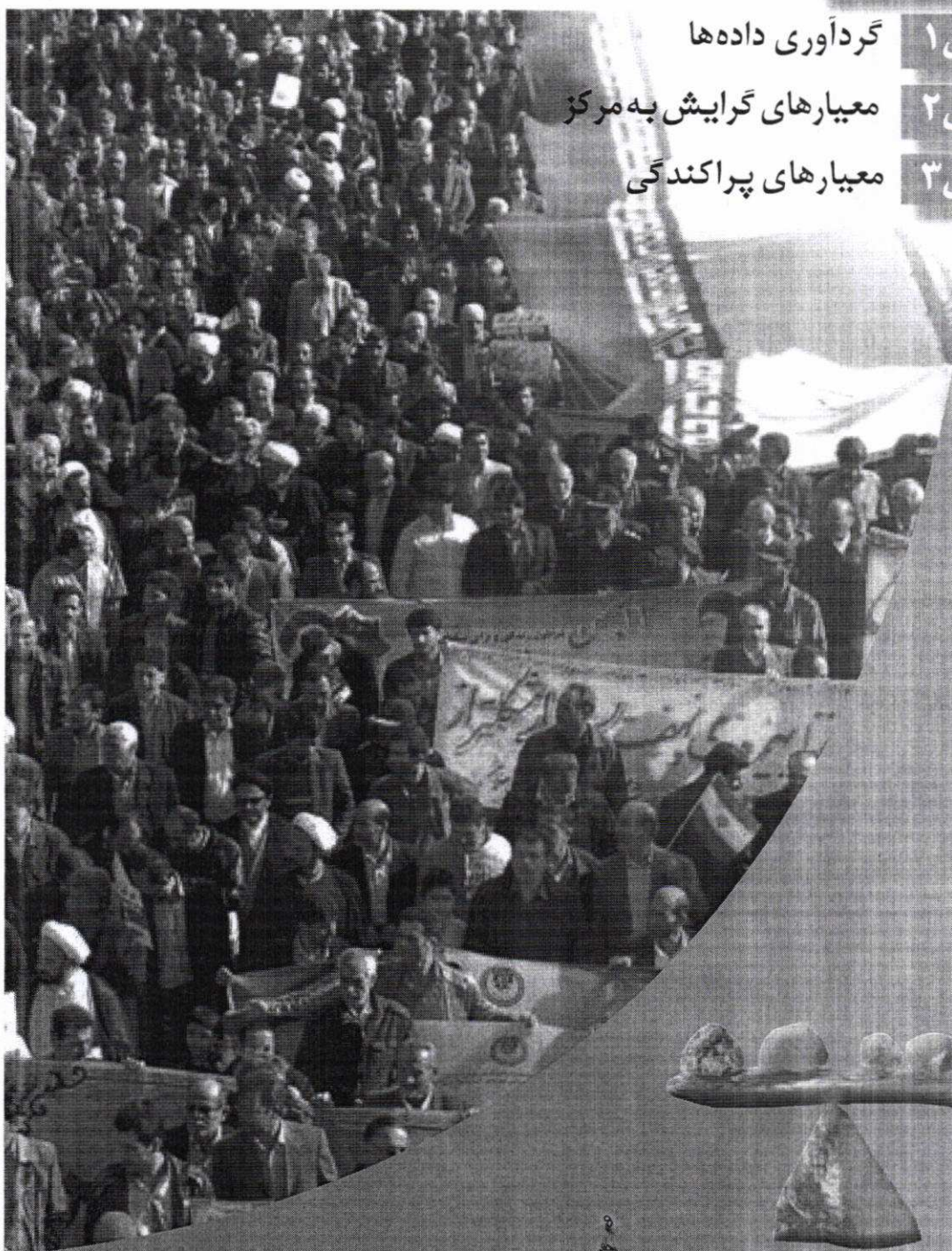
کار با داده‌های آماری

فصل چهارم

درس ۱ گردآوری داده‌ها

درس ۲ معیارهای گرایش به مرکز

درس ۳ معیارهای پراکندگی



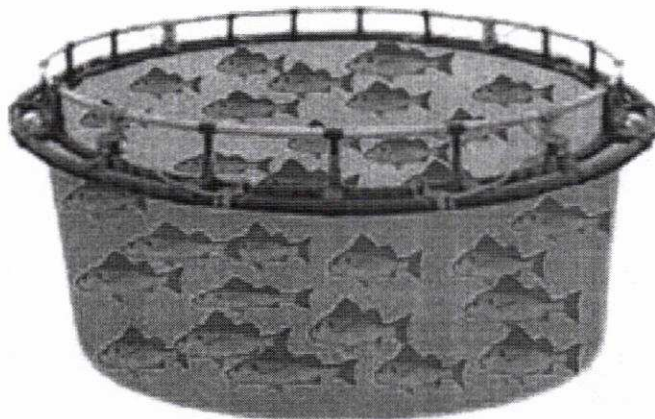
درس ۱

گردآوری داده‌ها

فعالیت



می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم. ابتدا از قسمت عمیق و در مرحله بعد، از قسمت کم عمق ۵ ماهی صید می‌کنیم.



انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق



انتخاب ۵ ماهی از قسمت کم عمق



۱. آیا انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق، تخمین خوبی از وزن ماهی‌های حوضچه به ما می‌دهد؟ یعنی آیا می‌توان برای فروش آنها اعلام آمادگی کرد؟ **چرا**

۲. به نظر شما کدام تخمین بیش از مقدار واقعی است و کدام یک کمتر از مقدار واقعی؟

**تخمین از قسمت عمیق بیشتر - از قسمت کم عمق بیشتر
از مقدار واقعی است.**

ز قلم مصطفیٰ
مناسب کریمت

۳. اگر شما امکان صید ۵ ماهی داشتید، چگونه آنها را انتخاب می‌کردید تا منجر به تخمین بهتری از وزن ماهی‌های حوضچه می‌شد؟ فرض کنید ماهی‌ها، همانند شکل در حوضچه پخش شده‌اند و تحرک زیادی ندارند.

۴. اگر از نحوه پخش شدن ماهی‌ها اطلاعی نداشتیم، بهتر بود ۵ ماهی را چگونه انتخاب می‌کردیم؟ آیا انتخاب تصادفی چند پخش از حوضچه (مثلاً زمانی که آن را شطرنجی کرده‌ایم) به ما کمک می‌کند ماهی‌های انتخابی معرف بهتری از کل ماهی‌ها باشند؟ **انتخاب تصادفی مناسب کریمت.**

داده‌ها و واقعیت‌هایی درباره یک چیزاند که در محاسبه، استنباط، یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند. واحد آماری به هر یک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود. مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌نامند. هر زیرمجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک نمونه می‌نامند. نمونه‌ای را که در آن، همه اعضای جامعه، شناس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند نمونه تصادفی می‌نامند.

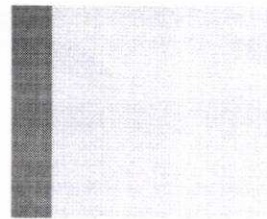
در مثال حوضچه ماهی، هر ماهی درون حوضچه یک واحد آماری است. به کل ماهی‌های حوضچه که عبارت است از مجموعه همه واحدهای آماری جامعه گفته می‌شود. اگر وزن تک‌تک ماهی‌ها را در اختیار داشته باشیم داده‌های جامعه را داریم. وزن نمونه ۵ ماهی از قسمت کم عمق معرف داده‌های یک نمونه پنج‌تایی است. اگر ۵ ماهی با یک روش تصادفی از حوضچه استخراج شود، عملاً یک نمونه تصادفی ۵ تایی از حوضچه در اختیار داریم.

تفاوت زیادی بین عدد در ریاضی و داده در آمار وجود دارد. به عبارت دیگر عدد 5^0 یک مفهوم در ریاضی دارد و داده‌ای که مقدار آن 5^0 است، علاوه بر مقدار آن حاوی اطلاعات زیادی است. به‌عنوان مثال این داده می‌تواند متوسط تلفات روزانه جاده‌های کشور در یکی از سال‌های اخیر باشد.



خواندنی

از قدیم گفته‌اند که
مشیت نمونه خروار است،
ولی نه هر مشیتی. چرا؟
اگر نمونه تصادفی
انتخاب شود
آنگاه نمونه
معرف جامعه
خواهد بود.



فعالیت

می خواهیم طول قد دانش آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می کنید؟ اندازه گیری قد نامی دانش آموزان مدرسه

آمارگیری: گردآوری داده ها به یکی از روش های ممکن
آمارگیر: کسی که آمارگیری را انجام می دهد.

بسیار قد در این مدرسه
بسیار کم قد در این مدرسه
بسیار قد در این مدرسه
بسیار کم قد در این مدرسه
بسیار قد در این مدرسه
بسیار کم قد در این مدرسه

اگر قرار شد آمارگیر باشیم، می توانیم جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.
مثالی از جدول طراحی شده برای ثبت داده ها

تعداد دانش آموزان	جوب خط برای شمارش	اندازه طول قد
		کوتاه تر از ۱۴۰ سانتی متر
		۱۴۰-۱۴۹ سانتی متر
		۱۵۰-۱۵۹ سانتی متر
		۱۶۰-۱۶۹ سانتی متر
		۱۷۰ سانتی متر یا بلندتر



چگونه مطمئن می شوید که دانش آموزی از قلم نیفتاده است؟ چه راهکاری برای این منظور پیشنهاد می کنید؟

آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگیر دارد. آیا راه حل ساده تری برای انجام آن دارید؟ یکی از مرسوم ترین روش های آمارگیری، استفاده از پرسش نامه است. پرسش نامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت نام در مدرسه، شما یا والدین، آن را تکمیل کرده اید. پرسش نامه را می توانند واحدهای جامعه یا نمونه تکمیل کنند.

مثالی از پرسش‌نامه طراحی شده

سلام، می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان مدرسه را آمارگیری کنیم.
لطفاً یکی از گزینه‌ها را انتخاب کنید.
طول قد شما چقدر است؟

- کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر
- ۱۴۰-۱۴۹ سانتی‌متر
- ۱۵۰-۱۵۹ سانتی‌متر
- ۱۶۰-۱۶۹ سانتی‌متر
- ۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر

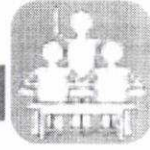
خواندنی

برای به انجام رساندن یک آمارگیری
باید پاسخ سؤال‌های زیر را بدانید:

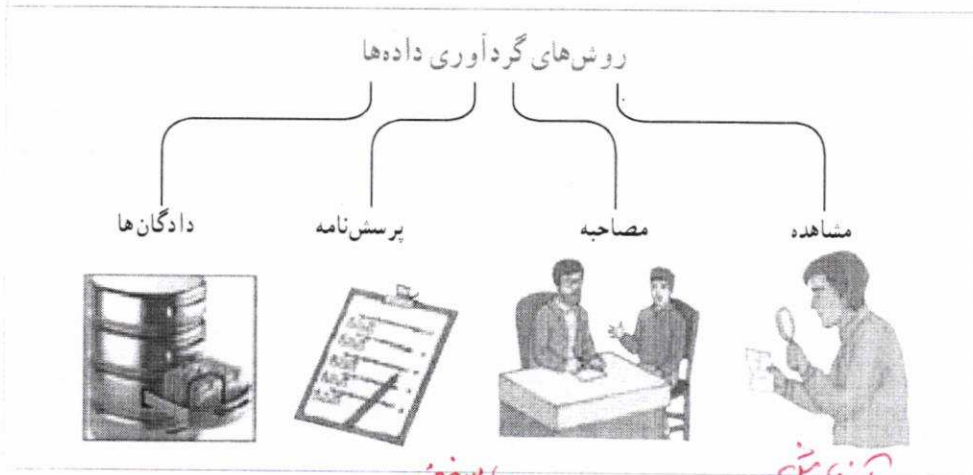
۱. می‌خواهید چه چیزی پیدا کنید؟ چرا؟
۲. چه داده‌هایی را باید گردآوری کنید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۳. کدام راه، بهترین راه گردآوری داده‌ها است؟ چرا؟ آیا به ابزار خاصی نیاز دارید؟
۴. به چه مقدار داده نیاز دارید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۵. داده‌های شما باید چقدر دقت داشته باشند؟ چرا؟
۶. داده‌هایتان را چگونه ثبت می‌کنید؟ چرا این روش را انتخاب کرده‌اید؟
۷. داده‌ها را چگونه ارائه می‌کنید؟ چرا؟
۸. آیا داده‌ها از الگوی خاصی پیروی می‌کنند؟ داده‌ها بیانگر چه هستند؟
۹. چه نتیجه‌گیری یا پیشگویی خاصی می‌توانید از داده‌ها ارائه کنید؟
۱۰. آیا نتایج، با آنچه انتظار داشتید، تطبیق دارد؟
۱۱. چگونه نتایج کار را ارائه می‌کنید؟ برای چه کسانی ارائه می‌کنید؟
۱۲. با توجه به نتایج به دست آمده، آیا می‌توانید سؤالات دیگری را نیز بررسی کنید، به نظر شما در مرحله گردآوری داده، به کدام یک از سؤالات فوق باید پاسخ داده شود؟

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۱. چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش آموزان یک مدرسه پیشنهاد می کنید؟ *پرسش از تعدادی از درون آموزان*
۲. فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری تمامی داده های دانش آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟ *از هر کلاس چند درون آموز به طور تصادفی انتخاب می کنیم.*



پاسخ فرز

و از نمایش

۱. مشاهده: گردآوری داده ها بدون نیاز به فرد پاسخ گو، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه گیری وزن محصولات یک باغ میوه.

*در کلاس آموزان
آزمایش تراشه سوز*

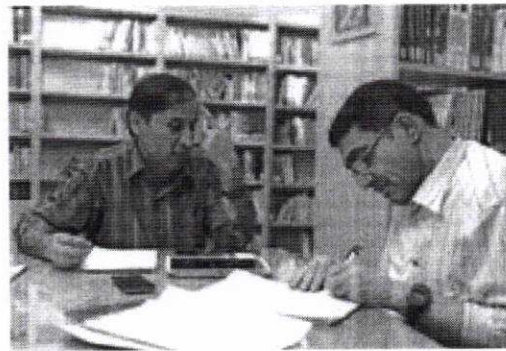


تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۲. پرسش‌نامه: مجموعه‌ی سؤالات از پیش تعیین‌شده که توسط تعدادی پاسخ‌دهنده تکمیل می‌شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰ سال یک‌بار با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات تمامی خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوییم.



۳. مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد، یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده یا پاسخ‌گو است. مثلاً اگر بخواهیم درباره‌ی مسائل فرهنگی کاهش شدآمد (ترافیک) پژوهش کنیم، مصاحبه از صاحب نظران راه‌حل مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌های ممکن را ندارد.

۴. دادگان‌ها: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره‌شده‌اند. در بسیاری از موارد، داده‌ها را می‌توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده‌اند، به‌دست آورد. اگر قرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام شود، اطلاعات ثبتی اداره کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به‌صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها به‌سرعت رواج یافته است.

تمرین

کدام روش جمع‌آوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

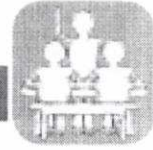
۱. میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه‌ی برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها. *پرسش‌نامه*
۲. سن همه‌ی دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه‌ی دهم. *دارگان*
۳. تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر. *مشاهده*

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمار، تصویر دیروز،
آئینه‌ی امروز، دورنمای فردا

آمار، سنجش گذشته؛
شناخت حال؛
درک آینده



کار در کلاس



مصاحبه
مشاهده

الف) کدام روش برای جمع‌آوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱. تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس.

۲. ساعات خواب دانش‌آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.

۳. طول قد دانش‌آموزان یک کلاس.

مشاهده

ب) می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر آمارگیری کنیم.

هریک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را از بین برد؟

برد؟

نمونه برداری کنید.

پرسش‌نامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

مشاهده: اگر به‌دقت زیادی نیاز داریم، مناسب نیست.

دادگان‌ها: همیشه اطلاعات ثبتی را در اختیار آمارگیر قرار نمی‌دهند.

پرسش‌نامه: نمونه‌گیری مشاهده: اندازه‌گیری است. از وسایل دقیق در دادن‌ها: کوچک‌ترین واحدها: اطلاع

آمارگیری را می‌توان به روش‌هایی بسیار سریع‌تر یا کم‌هزینه‌تر مانند آمارگیری پستی، تلفنی، اینترنتی یا پیامکی انجام داد. همچنین می‌توان با ایزاری نظیر گوگل فرم یک پرسش‌نامه طراحی کرد، و آن را به نشانی نمونه انتخابی ارسال کرد و نتایج را از گوگل فرم بازبازی کنیم.

خواندنی

فعالیت



قرار است دربارهٔ افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همهٔ افرادی هستند که توانسته‌اند به قله برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی یا علمی باشند. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) موردنیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد متغیر می‌گویند. سایر متغیرها می‌توانند مواردی مانند: سن، وزن، ملیت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمی یا کیفی باشند.

تهیه‌کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

متغیر: هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.
متغیر کمی: متغیرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آنها عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.
متغیر کیفی: متغیرهایی هستند که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌روند و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرند.

در مثال کوهنوردان دنا، سن، وزن، قد و درآمد یک کوهنورد متغیرهای کمی هستند. متغیرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیر عددی‌اند و در مثال کوه‌نوردان دنا، جنسیت و ملیت را در بر می‌گیرند. به‌عنوان مثال جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

پارامتر جامعه: یک مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک‌تک کوهنوردان را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعه کوهنوردان، معرف یک پارامتر است.

اگر داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردان کوهنورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره‌ها از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنند؛ این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند، چرا؟ **چون جامعه تعیین نمی‌گردد.** در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان‌پذیر نیست. بنابراین علی‌رغم اینکه پارامتر دارای مقدار ثابتی است، این مقدار مجهول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

آماره نمونه: مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

مسئله: اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آماده برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیر، «وزن» آنهاست. وزن یک متغیر کمی است، زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک‌تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، سرشماری از جامعه انجام داده‌ایم (که امکان‌پذیر نیست). متوسط وزن تمامی هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.

حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت مزه هندوانه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزه هندوانه‌ها را امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کل هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا متغیر «مزه» متغیری کیفی است. از آنجا که نمی‌توانیم تمام هندوانه‌ها را مزه مزه کنیم، تنها بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت هندوانه‌های با مزه «خوب» در نمونه، یک «آماره» است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

محدودیت‌های سرشماری

عبارت است از:

۱. هزینه زیاد
۲. زمان بردن
۳. خطای بیشتر در گردآوری داده‌ها
۴. امکان استفاده در بررسی‌های مخرب (واحدهای انتخاب شده را از بین می‌برند) ندارد.



یک شبکه تلویزیونی می خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز را، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می کنند، بداند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر بررسی می کند.

الف) داده ها و متغیرهایی را که بررسی می شوند، مشخص کنید.

جواب: داده ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تلویزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تلویزیون است که پاسخ آن «تماشا می کند» یا «تماشا نمی کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده ها یک نمونه اند؟ جامعه آماری کدام است؟ **بله - جامعه آماری شیراز هستند.**

پ) متغیر کمی است یا کیفی؟ **کمی**

ت) چند متغیر کمی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب: سن، درآمد، **وزن**

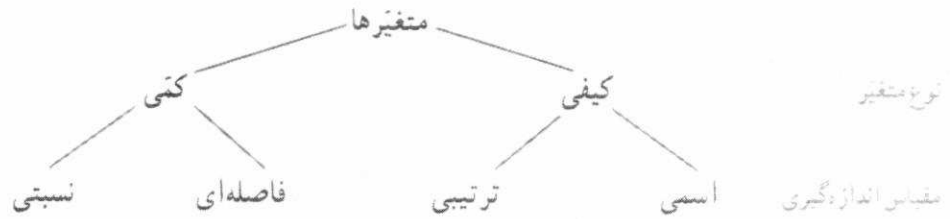
ث) نسبت افرادی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می گوئیم). **آماره**

مقیاس های اندازه گیری

داده ها را به دو گروه کمی و کیفی تقسیم کردیم. از نگاهی دیگر، می توان متغیرهای داده ها را در چهار مقیاس اندازه گیری دسته بندی کرد. اندازه گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. دو نوزاد دو قلو را نام گذاری می کنیم تا آنها را تفکیک کنیم، در واقع اندازه گیری کرده ایم. بسته به دقتی که این اندازه گیری صورت می گیرد آن را به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله ای و نسبتی تقسیم می کنیم. هدف بررسی این مقیاس ها بیانگر نوع محاسبه ای است که برای این داده ها مناسب است: نظیر: ترتیب، محاسبه اختلاف و نسبت گرفتن.

<p>اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام ها، برجسب ها و گروه ها می شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد. مانند گروه خونی انسان ها و شماره دانش آموزی. کدهای عددی در این مقیاس به واقع عدد نیستند بلکه صرفاً برای گروه بندی به کار می رود.</p>	<p>ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت نیز قائل می شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند؛ در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده ها، یا امکان پذیر نیست و یا بی معناست، مانند رتبه دانش آموزان در یک کلاس. اگر رتبه های اول تا سوم معدل ۱۹، ۱۸، ۱۶ کسب کرده باشند رتبه ۲۰، ۲۱ می دهیم و توجه نمی کنیم که اختلاف نمرات آنها چقدر است.</p>	<p>فاصله ای: این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم با قواعد دقیق اندازه گیری ویژگی افراد یا اشیا به دقت اندازه گیری می شود. به بیان دیگر مقیاس فاصله ای برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین، اختلاف بین مقادیر داده ها بامعناست. مانند درجه حرارت در شهرهای مختلف برحسب سلسیوس. مقادیری که به دو نفر یا دو شیء داده می شود صرفاً بیانگر فاصله بین آنهاست. در نتیجه صفر در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر دمای بوشهر ۲۰ و تهران ۱۰ درجه سلسیوس باشد نمی توان گفت دمای تهران دو برابر بوشهر است ولی اختلاف دما ۱۰ می باشد.</p>	<p>نسبتی: این مقیاس برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند، اختلاف بین مقادیر داده ها، و نسبت مقادیر داده ها نیز بامعنا است. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند نمره، وزن و قید دانش آموزان و متغیرهایی که با واژه تعداد شروع می شوند در این مقیاس اندازه گیری می شوند. در این مقیاس صفر به معنی نبود ویژگی در فرد یا شیء است.</p>
--	---	--	--

اگر فقط یک متغیر از داده‌ها اندازه‌گیری شده باشد، به جای ذکر «مقیاس متغیر» از واژه «مقیاس داده‌ها» استفاده می‌کنند.



شعارهای برتر
سال جهانی آمار



بهترین برنامه‌ریزی
مستلزم بهترین آمار

با آمار بهتر نفهمیم.
بهتر تصمیم بگیریم.

کار در کلاس



نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید:

- الف) محسن، محمود، محمد و میثم همگی اسامی مذکر هستند. *اسمی (کیفی)*
- ب) در یک دبیرستان ۳۱۹ دانش‌آموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم، صادق رتبه دهم و جواد رتبه چهارم را کسب کرده است و می‌دانیم که رتبه یک، بالاترین است. *رتبته (کمی)*
- پ) دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز (برحسب درجه سلسیوس) *فاصله‌ای (کمی)*
- ت) طول ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز *نسبتی (کمی)*

تمرین



داده‌های زیر مربوط به یک نماینده مجلس است. در هر یک از سؤالات زیر نوع داده‌ها را مشخص کنید.

- الف) نام نماینده حسین ایرانی است. *اسمی (کیفی)*
- ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد. *نسبتی (کمی)*
- پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۴ است. *فاصله‌ای (کمی)*
- ت) مجموع حقوق این نماینده در سال گذشته ۶۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. *نسبتی (کمی)*
- ث) این نماینده در حال بررسی لایحه پیشنهادی حفاظت از منابع آبی کشور است. گزینه‌های مورد نظر: حمایت کامل، حمایت، بی‌طرف، مخالف و کاملاً مخالف است. *کیفی (کیفی)*
- ج) وضعیت تأهل این نماینده: متأهل *اسمی (کیفی)*
- چ) می‌گویند این نماینده در رأی‌گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری است که از آن حمایت کرده است. *نسبتی (کمی)*

آمار چیست؟

علوم تجربی نظیر کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، بسیار کاربردی‌اند و مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک پزشک معمولاً به صورت دقیق بیماری را تشخیص نمی‌دهد و داروی بیماری نیز به همین وضع دچار است. ولی پزشک بر اساس تجربه حکم به بیماری می‌دهد و دارو تجویز می‌کند و در اکثر مواقع نیز نتیجه می‌گیرد. از سوی دیگر در علوم ریاضی روابط به صورت صد درصد حاکم هستند و هیچ شک و شبهه‌ای به آن راه ندارد. وجود رابطه بین برخی پدیده‌ها در علوم تجربی باعث کشف حقایقی است که موجب پیشرفت آنها می‌شود. معمولاً روابط حاکم بر علوم تجربی را نمی‌توان به صورت ریاضی بیان کرد. علم آمار راهی برای بیان ریاضی چنین پدیده‌هایی است.



فعالیت

به نظر شما یک شهروند در زندگی روزمره خود از اطلاعات بیان شده در دو مثال زیر، چه استفاده‌ای می‌کند؟ این اطلاعات در رسانه‌ها منتشر شده‌اند.

صنایع مختلف یک جهت آغاز تصمیم رزومینه مختلف است.

■ سلامت

- بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل، افتادن یا زمین خوردن است.
- پنج درصد افراد به واکنش آنفولانزا واکنش شدید نشان می‌دهند.
- افراد سیگاری دو برابر دیگران در معرض سرطان قرار دارند.
- مصرف روزانه ۵ نوع میوه و سبزی بیشتر ویتامین‌های مورد نیاز بدن را تأمین می‌کند.

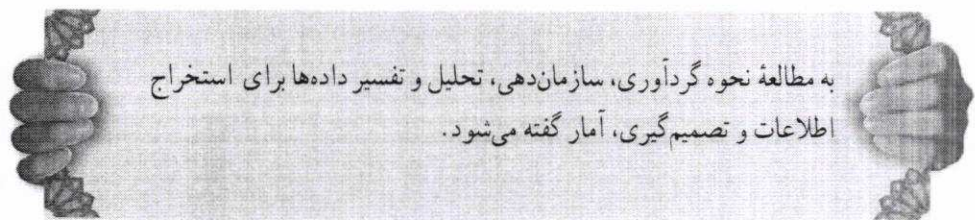
حمل و نقل

- اولین دلیل تماس با امداد خودرو فراموش کردن کلید داخل خودرو است.
 - بیشتر راننده‌های مرد و زن یک کشور خارجی، در پشت چراغ قرمز به ترتیب با بینی خود کلنجار می‌روند و در آینه نگاه می‌کنند.
 - راندن بین خطوط راهنمایی در اتوبان‌ها باعث کاهش ۳۰ درصدی شدآمد می‌شود.
 - متوسط تعداد کشته‌های تصادفات حدود ۵ نفر در روز اعلام شده است.
- به کمک روشی که ۴۸ آوری اطلاع صنایع مختلف با هم یک*
- چگونه این اطلاعات را به دست آورده‌اند؟ آیا تعریف دقیق کلمات پررنگ شده را حدس می‌زنید؟ جامعه، و پارامتر یا نمونه و آماره را در هر یک از مثال‌ها مشخص کنید.

تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین جنبه‌های زندگی ماست. ما بر اساس اطلاعاتمان و ارزش‌هایمان تصمیم‌گیری می‌کنیم. روش‌های آماری برای بررسی این اطلاعات به ما کمک می‌کنند. به علاوه، آمار در شرایطی که با عدم

تهیه کننده:

قطعیت در تصمیم‌گیری روبه‌رویم، هم به یاری ما می‌آید. چگونه به اطلاعات گزارش‌شده در فعالیت قبل دست‌یافته‌اند؟ به‌عنوان مثال، اگر درصدد برآورد نسبت افرادی هستیم که به واکنش آنفلوآنزا واکنش شدید نشان می‌دهند، بدون تزریق بر روی همهٔ افرادی که مایل به انجام آن هستند، آمار روش‌های مناسبی را پیش رویمان می‌گذارد. روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با نگاه کردن به اطلاعات به دست آمده از مجموعهٔ کوچکی از افراد یا اقلام، برای گروه‌های بزرگ‌تری از این افراد یا اقلام تصمیم‌گیری کنیم. شیوهٔ تحلیل داده‌ها، در کنار قواعد استنباطی، موضوعات اصلی مطالعات آماری را تشکیل می‌دهند.



به مطالعهٔ نحوه گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری، آمار گفته می‌شود.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمار، جهت‌نمای
توسعهٔ پایدار
آمار، راهنمای ما
در تصمیم‌گیری
و برنامه‌ریزی صحیح

گفتنی است که روش‌های آماری به‌تنهایی نمی‌توانند معجزه کنند؛ این روش‌ها می‌توانند به ما کمک کنند تا تصمیم‌هایی بگیریم؛ اما نه هر تصمیمی. به یاد داشته باشید که حتی یک روش آماری مناسب، نمی‌تواند دقیق‌تر یا صحیح‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد. در نهایت، نتایج آماری باید توسط فردی که نه‌تنها روش‌ها، بلکه موضوع مورد بحث را کامل درک کرده باشد، تفسیر شود.



تمرین

۱. فرق بین داده و متغیر چیست؟
۲. داده‌های در سطح اسمی، کتی هستند یا کیفی؟
۳. فرق بین آماره و پارامتر چیست؟
۴. در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازهٔ یکسان از یک جامعه داشته باشیم، آیا می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟
۵. در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاه‌خوار، سؤال شده است که برای کدام وعدهٔ غذایی (ناهار یا شام) غذا سفارش داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید. **همه نهاره شام**

ب) این متغیر کتی است یا کیفی؟ **کیفی**
ج) جامعهٔ آماری در اینجا چیست؟ **کل مشتریان غذاخوری که گیاه‌خوار هستند.**

تهیه‌کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

داده: واقعی درباره یک چیز است که در جامعه، ارتباط با برنامه ریزی بخار دارد.
متغیر: هر چیزی از آن نقطه من یا اینجا؛ را متغیر می‌نامند.
کیفی: هر صفه‌ای عددی در مورد کل جامعه را پارامتری و هر شخصی عددی در مورد نمونه را آماره می‌نامند.
الف) جامعه آماری در اینجا چیست؟ کل مشتریان غذاخوری که گیاه‌خوار هستند.

۶. موضوعات زیر مرتبط است. متغیرهای آنها را در چهار مقیاس: اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سوالات یک امتحان *نسبی*

ب) زمان اولین کلاس *فاصله‌ای*

پ) رشته تحصیلی *اسمی*

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی و خوب *ترتیبی*

ث) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز) *نسبی*

ج) سن دانش‌آموز *نسبی*

لقمان و مرد پیاده

خواندنی

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای نشسته بود. مردی که از آنجا

می‌گذشت از لقمان پرسید: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید.

لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان نشنیده است. دوباره سؤال کرد: مگر نشنیدی؟

پرسیدم: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید؟ لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان

دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند

گفت: ای مرد، یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت: چرا اول نگفتی؟ لقمان گفت:

چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌روی یا کند. حالا که دیدم دانستم که تو یک ساعت

دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آماری رعایت شده است. چرا؟

نکته ظریف این داستان این است که لقمان فقط می‌گوید، راه برو و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان

نمی‌گوید که می‌خواهم راه رفتن تو را ببینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی،

زیرا لقمان فکر می‌کند این اطلاع ممکن است در راه رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که

لقمان تخمین می‌زند، سرعت واقعی راه رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد،

مدت زمان دقیقی نباشد.

درس ۲

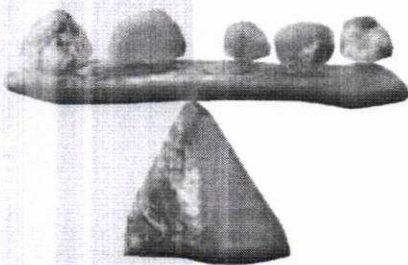
معیارهای گرایش به مرکز

فعالیت



امسال خیرین مدرسه چقدر به مدرسه کمک می‌کنند؟ مدیر مدرسه بر اساس اطلاعات سال‌های گذشته خود می‌گوید: معمولاً خیرین، به‌طور متوسط، ۱۰ درصد درآمد سالانه خود را به این امر اختصاص می‌دهند. فرض کنید درآمد ماهیانه حضار در انجمن خیریه این دبیرستان در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر باشد:

درآمد (میلیون ریال)	نجمیه	سیحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵



س برای پاسخ به سؤال طرح شده باید میانگین این اعداد را محاسبه کنیم. میانگین همان چیزی است که ما به آن معدل می‌گوییم. برای محاسبه آن شما تمامی درآمدها را باهم جمع و بر تعداد افراد حاضر تقسیم می‌کنید. اگر تمامی درآمدها را باهم جمع کنید (۱۸۹)، و بر تعداد افراد تقسیم کنید (۷)، به عدد میانگین ۲۷ میلیون ریال در ماه می‌رسید. در نتیجه ۱۰ درصد درآمد سالانه برابر است با ۳۲/۴ است.

اگر n داده به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، میانگین آنها را با نماد

\bar{x} نشان می‌دهیم، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



کار در کلاس

$$\bar{x} = \frac{۱۰+۲۰+۳۰+۴۰+۵۰}{۵} =$$

۱. میانگین داده‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ چقدر است؟

۲. اگر میانگین داده‌های ۱۰، x، ۴۰ شود مقدار x چقدر است؟

۳. میانگین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چقدر است؟

۴. میانگین اعداد ۲، ۴، ۶، ۸، ۵ چقدر است؟

۵. میانگین اعداد ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چقدر است؟

۶. میانگین اعداد ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰ چقدر است؟

۷. آیا می‌توانید چند قاعده کلی از تمرین‌های قبل درباره خواص میانگین ذکر کنید.

میانگین
جمع داده‌ها به عدد
فرض داده‌ها را عدد است

حال اگر یک میلیارد در با درآمد ماهیانه یک میلیارد ریال به انجمن خیریه دبیرستان ما بیاید، میانگین درآمد حضار چه تغییری می‌کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می‌گویند. آمارشناسان او را دور افتاده می‌نامند.) درآمد او میانگین را تا حدود ۱۴۸ میلیون ریال در ماه بالا می‌آورد (دقیقاً ۱۴۸/۶۲۵) و بر اساس شیوه تخمین گذشته، خیرین معادل ۱۷۸ میلیون ریال (دقیقاً ۱۷۸/۳۵) را به دبیرستان کمک خواهند کرد! که غیر واقعی به نظر می‌رسد یا امکان محقق شدن آن ضعیف است.

دور افتاده: مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده‌هاست. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگ‌تر یا بسیار کوچک‌تر از بقیه داده‌هاست.



در مثال خیریه، داده دور افتاده باعث اشتباه ما در تخمین متوسط داده‌ها شد. میانگین مرسوم‌ترین معیار گرایش به مرکز است که گاهی ممکن است ما را به اشتباه بیندازد، ولی می‌توان از معیار دیگری نیز برای بیان متوسط درآمد استفاده کرد. برای این منظور از میانه که داده وسطی داده‌های مرتب شده است، می‌توان استفاده کرد. پس از مرتب کردن داده‌ها، داده‌ای که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر میانگین دو داده وسطی مرتب شده است.

برای محاسبه میانه داده‌ها، قبل از ورود میلیارد، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. وسط (۷ام) عدد چهارمین عدد است، پس میانه داده‌ها عدد ۲۸ است که با میانگین داده‌ها تفاوت زیادی ندارد.

ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
درآمد مرتب شده	۱۲	۲۲	۲۵	۲۸	۳۰	۳۲	۴۰

حال فرض کنید میلیارد در خیریه حضور دارد. میانه برای ۸ عدد وجود ندارد یا به عبارتی ۸ عدد، عدد وسط ندارد. پس بین داده چهارم و پنجم میانگین می‌گیریم. جایگاه چهارم درآمد ۲۸ و جایگاه پنجم آن ۳۰ و در نتیجه میانه جدید درآمد ۲۹ است.

مد، داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد. فروشنندگان پوشاک از معیار گرایش به مرکز مد بسیار استفاده می‌کنند. آنها با آمارگیری‌های خود درمی‌یابند که چه نوع پوشاکی مورد پسند مصرف کنندگان است. از همان پوشاک برای فروش سفارش می‌دهند. در رأی‌گیری‌ها، اساس تصمیم‌گیری مد است، چون موضوعی که بیشترین فراوانی را داشته باشد، انتخاب می‌شود. در انتخاب رئیس جمهور، نامزدی انتخاب می‌شود که بیشترین فراوانی (رأی) را داشته باشد. برای محاسبه مد فقط کافی است فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه کنیم و داده با بیشترین فراوانی مد است. مد ممکن است منحصر به فرد نباشد.

بیشتر افراد معتقدند که عدد ۲۹ میلیون ریال گویای مقدار صحیح متوسط درآمد افراد است و عدد ۱۴۸ میلیون ریال کاملاً بی ربط است. پس ما به یک نتیجه می‌رسیم: اگر در داده‌هایمان، دورافتاده وجود داشت - دقیقاً مانند زمانی که یک میلیارد در هوس کار خیر می‌کند - باید از میانه استفاده کنیم.



تمرین

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۱. میانه داده‌های ۱، ۹۹، ۲، ۶۸، ۱۴، ۸۶، ۱۰، ۱ چقدر است؟

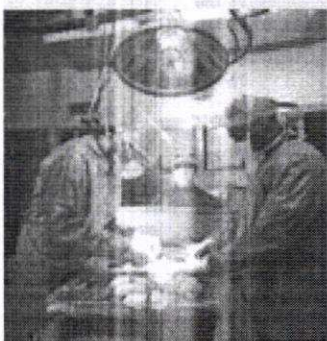
۲. میانه داده‌های ۱، ۹۹، ۲، ۶۸، ۱۴، ۸۶، ۱۰، ۱۱ چقدر است؟

نکته اصلی در اینجا است: اگر در آمار در جایی به یک نتیجه شسته و رفته برخوردید، خیلی احتیاط کنید. به دست آوردن «یک استنباط درست از داده‌ها تنها چیزی نیست که شما در یک بررسی آماری خواهان آن هستید؛ خواسته دیگر ما برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری است».

تصور کنید که به جای انجمن خیریه با یک بیمارستان سر و کار داریم و داده‌ها به جای مبلغ درآمد، هزینه‌های جراحی هستند. فرض کنید به جای میلیارد، با یک بیمار روبه‌رویم که گرفتار بعضی از مشکلات بعد از عمل است و مجموع هزینه‌هایش بالغ بر ۲۵۰ میلیون ریال است.

بیمار	هزینه‌های جراحی میلیون ریال	هزینه‌های جراحی مرتب شده
الف	۲	
ب	۵	
پ	۴۵	
ت	۷	
ث	۳۵	
ج	۳۰	
ح	۵۰	
ح	۲۵۰	

میانه مناسبتی است.



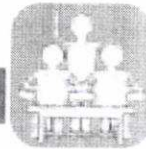
داده نگراری
تکلیف
بهرت

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

میانگین هزینه‌های جراحی این بیمارستان برابر ۵۳ میلیون ریال و میانه آن برابر ۳۲/۵ میلیون ریال است. اگر شما مدیر این بیمارستان بودید، کدام عدد برایتان از همه مهم‌تر بود؟ عدد ۳۲/۵ میلیون نشان دهنده هزینه‌های معمول نگهداری یک بیمار است، اگر بخواهیم بودجه سال بعد را با فرض این عدد بنویسیم، به احتمال زیاد با کسر بودجه مواجه می‌شویم. با قدری تفکر به میانگین و میانه، دلیل اینکه افراد از بیمه تأمین اجتماعی استفاده می‌کنند، روشن می‌شود؛ (میانه هزینه‌های سالیانه درمان معمولاً بسیار کمتر از حق بیمه پرداختی است، اما با نگاه به میانگین سالیانه هزینه‌ها، حساب می‌کنم که معامله خوبی کرده‌ام) و من همیشه کمربند ایمنی را می‌بندم، اگرچه میانه تعداد زخمی‌ها در هر سفر با خودرو صفر باشد.

این نتیجه را نیز به یاد داشته باشید: گاهی هیچ آمار درست یا غلطی وجود ندارد، و همه چیز به اینکه شما چرا می‌خواهید از آنها استفاده کنید، بستگی دارد.



کار در کلاس

- با سه واژه: داده دورافتاده، میانه، و میانگین، ۵ جمله زیر را کامل کنید.
۱. آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به **میانگین** معروف است. برای محاسبه **میانگین**... به داده‌های خود به‌عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را باهم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.
 ۲. **میانگین**... در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتب‌شده است. نیمی از اعداد مقادیر بالاتر از **میانگین**... و نیمی دیگر مقادیر پایین‌تر از **میانگین**... قرار دارند.
 ۳. زمانی با **خارج‌رو** مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌ها پیروی نکند.
 ۴. وقتی با **داده دور** مواجه هستید، **میانگین**... معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا **میانگین**...
 ۵. به‌طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، **میانگین**... بهتر از **میانگین**... است.

میانگین موزون:

شما قطعاً شنیده‌اید که برخی از نمرات شما ضریب دارند. مثلاً اگر چهار بار از شما آزمون گرفته باشند، نمره آخرین آزمون را ممکن است در ۳ ضرب کنند، یعنی به آن ضریب ۳ بدهند. پس اگر نمرات شما به صورت زیر باشند:

نمره	۱۶	۱۵	دوم	سوم	چهارم
	۱۷	۱۸			

نمره‌ای که برای این درس در کارنامه شما خواهد آمد میانگین ۶ عدد است یعنی نمره درس مذکور عبارت است از:

$$\frac{16+15+18+17+17+17}{6} = 16.66$$

میانگین نمره‌ها بدون احتساب ضریب ۱۶/۵ می‌شود.

از میانگین موزون برای معدل دروسی که با واحدهای مختلف (تعداد ساعات متفاوت) در طول سال تحصیلی ارائه می‌شود نیز استفاده می‌شود.

خواندنی

شخصی دست راست خود را در یخچال و دست چپ خود را در فر کرده است. زمانی که از او درباره احساسش سؤال می‌شود پاسخ می‌دهد: «به‌طور متوسط خوب هستم». نتیجه اخلاقی این لطیفه این است که یک عدد به‌تنهایی، معمولاً مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌خوبی توصیف نمی‌کند. بنابراین، اندیشه خوبی است که علاوه بر معیار گرایش به مرکز معیاری را نیز گزارش دهیم که نوسان و تغییر داده‌ها را هم بیان کند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس ۳

معیارهای پراکندگی

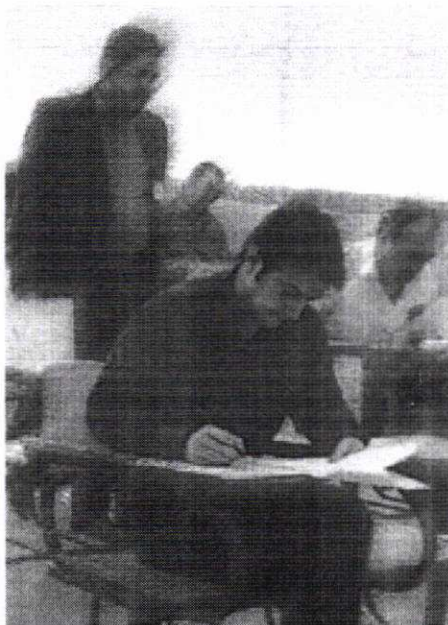
فعالیت



می‌خواهیم کلاس‌های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که هم‌زمان بین دانش‌آموزان ممتاز برگزار شده است، رتبه‌بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به تصادف انتخاب شده‌اند. نمرات آزمون جامع هر سه کلاس از ۱۲۰ نمره است.

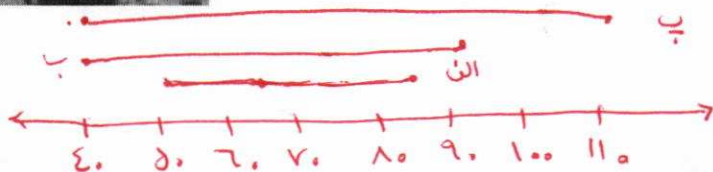
داده‌های مربوط به سه کلاس دهم:

الف) {۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵}	$\bar{x} = 67$
ب) {۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹}	$\bar{y} = 67$
پ) {۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱}	$\bar{z} = 67$



میانگین سه کلاس را محاسبه کنید. به نظر شما پراکندگی نمرات در کدام کلاس بیشترین و در کدام کلاس کمترین است؟ برای پاسخ به این سؤال، داده‌ها را روی سه محور موازی نمایش دهید. کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده شده کسب کرده است؟ چرا؟ مثلاً اگر والدین برای ثبت نام فرزند بازگوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج یکی از مدرسه‌ها را انتخاب کنند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن کمتر است در مقابل برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می‌خواهد مدرسه را انتخاب کند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن بیشتر باشد. چرا؟

۱۱
۱۰
۹
۸
۷
۶
۵
۴



بهتر است دانش‌آموزان بیشتر نمرات را در آن کلاس بزنند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

یک معیار معمول سنجش میزان پراکندگی که نشان دهنده تغییرات داده‌های مورد مطالعه است، انحراف معیار است. انحراف معیار را با به کارگیری یک فرمول از داده‌ها به دست می‌آوریم (اختلاف هر عدد با میانگین داده‌ها را حساب کنید؛ به توان ۲ برسانید؛ میانگین اعداد حاصل را به دست آورید؛ و سپس جذر بگیرید.) توان دوم انحراف معیار را واریانس می‌نامند. داده‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند. همچنین انحراف معیار نمرات هر سه کلاس محاسبه و در شکل نشان داده شده است.

اگر n را به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، انحراف معیار آنها را با نماد σ (سیگما) نشان می‌دهند، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

کار در کلاس



۱. اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیار برابر با صفر خواهد شد؛ چرا؟
 ۲. انحراف معیار نمرات آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

مشاهدات	انحراف مشاهدات از میانگین	انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲
۶۵	۶۵ - ۶۷	(-۲)²
۷۵		
۷۳		
۵۰		
۶۰		
۶۴		
۶۹		
۶۲		
۶۷		

مشاهده می‌شود که انحراف معیار نه تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین پراکندگی نمرات را تأیید می‌کند، بلکه به شما امکان مقایسه کتی آنها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

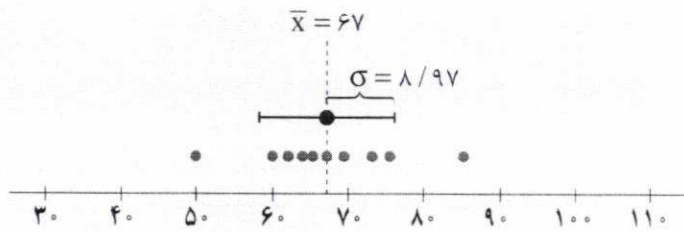
۸۵

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جدول باید
 در صفر
 داشته باشد
 که ایراد دارد.

کلاس الف)



{۶۵، ۷۵، ۷۳، ۵۰، ۶۰، ۶۴، ۶۹، ۶۲، ۶۷، ۸۵}

داده‌ها:

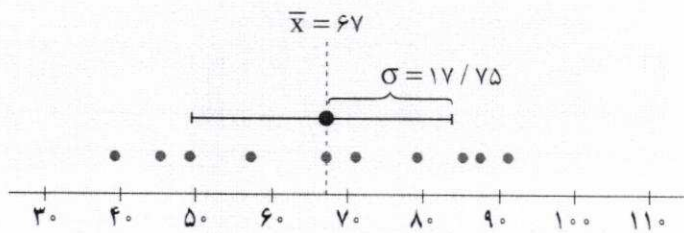
$$\bar{x} = 67$$

میانگین:

$$\sigma = 8/97$$

انحراف معیار:

کلاس ب)



{۸۵، ۷۹، ۵۷، ۳۹، ۴۵، ۷۱، ۶۷، ۸۷، ۹۱، ۴۹}

داده‌ها:

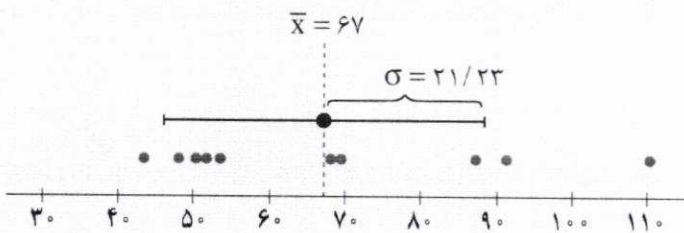
$$\bar{x} = 67$$

میانگین:

$$\sigma = 17/75$$

انحراف معیار:

کلاس ج)



{۴۳، ۵۱، ۵۳، ۱۱۰، ۵۰، ۴۸، ۸۷، ۶۹، ۶۸، ۹۱}

داده‌ها:

$$\bar{x} = 67$$

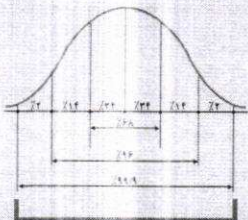
میانگین:

$$\sigma = 21/23$$

انحراف معیار:

پراکندگی در خم بهنجار
(متخنی نرمال)

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت‌نگاشت (هیستوگرام) آنها را می‌توان به صورت یک خم تصور کرد. اگر این خم به صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم بهنجار گفته می‌شود. خداوند بسیاری از پدیده‌ها را بهنجار آفریده است. مثلاً طول قد یا وزن دانش‌آموزان بهنجاراند. یعنی بافت‌نگاشتی زنگی شکل دارند. خواص این خم کمک زیادی برای تصمیم‌گیری بر اساس داده‌ها یا کسب اطلاعات از آنها می‌کند. به یاد دارید که گفته شد اگر σ انحراف معیار داده‌ها باشد چند درصد داده‌ها به طور تقریبی بین میانگین که در واقع گرانگه یا مرکز نقل بافت‌نگاشت است و ضرابی از انحراف معیار قرار دارد. این اطلاعات را به طور مختصر در شکل زیر ملاحظه می‌کنید (مقادیر روی نمودار تقریبی هستند):



فعالیت



حتماً بر روی قوطی‌ها یا پاکت‌های مواد غذایی یا بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده‌اید. به نظر شما هر یک از این اعداد چه چیزی را نشان می‌دهند.

250 ± 10 گرم

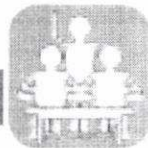
عدد ۲۵۰ وزن خالص ماده غذایی است که قرار است به دست مصرف کننده برسد. ولی معمولاً این چنین نیست. کمی خطا اجتناب ناپذیر است. این خطا چقدر است و چگونه آن را محاسبه کنیم؟ اگر تعداد زیادی از محتوای پاکت‌ها یا قوطی‌های یک تولیدی را وزن و انحراف معیار آنها را محاسبه کنیم، دو برابر آن عدد ۱۰ است. یعنی عدد ۱۰ دو برابر انحراف معیار مواد غذایی در بسته‌بندی‌های مختلف است. به عبارت دقیق‌تر اگر ما ۱۰۰ قوطی حاوی این ماده غذایی را وزن کنیم، انتظار داریم حداقل ۹۶ تا از آنها وزنی بین ۲۴۰ تا ۲۶۰ گرم داشته باشند. درج چنین اعدادی بر روی کالاها از الزامات استاندارد هر کشوری است. چگونه به عدد ۹۶ رسیده‌اند؟

مجموع سؤالات متن حائز نمره منفی است که ۱

برای بی بردن به میزان تغییراتی که داریم، معمولاً با محاسبه مقدار انحراف از میانگین اطلاعات دقیق‌تری در خصوص میانگین و انحراف معیار به دست خواهیم آورد. برای این منظور از یک قانون مشهور در آمار استفاده می‌کنیم: تقریباً ۹۶ درصد از داده‌ها بین «دو انحراف معیار از میانگین» هستند. این جمله یعنی اگر بازه‌ای تعریف کنیم که ابتدای آن $\bar{x} - 2\sigma$ و انتهای آن $\bar{x} + 2\sigma$ باشد، تقریباً ۹۶ درصد داده‌ها در این فاصله قرار دارند این مانند آن است که بگوییم، ۴ درصد نمره‌ها بیش از دو برابر انحراف معیار از میانگین فاصله دارد. البته مشابه همین قانون در شکل‌های قبل برای یک برابر انحراف معیار نمایش داده شده است. در این حالت قانون قبل به «تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات بین یک انحراف معیار از میانگین هستند»، تغییر می‌کند. دو برابر انحراف از میانگین را روی همان شکل رسم کنید.

بازه بی‌نقص چه؟

کار در کلاس



جدول زیر را تکمیل کنید.

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات بین سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً ۹۶ درصد مشاهدات بین دو برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً ۶۸ درصد مشاهدات بین یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند

فعالیت



می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم نزدیک است؛ اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به این صورت محاسبه می‌شود:

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به کمک جدول زیر این کار را انجام دهید.

مشاهدات		انحراف مشاهدات از میانگین		انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲	
قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد
۴۰	۴۰				
۱۲	۱۲				
۲۸	۲۸				
۳۲	۳۲				
۳۰	۳۰				
۲۲	۲۲				
۲۵	۲۵				
	۱۰۰۰				

انحراف میانگین / ۸,۵۸

زمانی که میلیارد در وارد انجمن خیریه می شود، انحراف معیار داده ها برابر است با $۱۰,۱۸$ این دو مقدار باهم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟ زمانی را به خاطر بیاورید که ما معیار گرایش به مرکز را برای این داده ها محاسبه کردیم. ما برای رفع آن مشکل به جای میانگین، میانه را به کار بردیم. مشابه همان کار را می توانیم انجام دهیم. معیار پراکندگی که تعریف می شود، انحراف معیار نیست. ما آن را دامنه میان چارکی، که با IQR نشان می دهیم، می نامیم. «میانه» جایی در وسط داده ها است؛ به طور مشابه، چارک ها هم یک چهارم و سه چهارم مشاهدات هستند. به عبارت ساده تر اگر برای داده های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، همان چارک اول است و به همین صورت میانه داده های بعد از میانه، چارک سوم خواهد بود. برای سادگی از نمادهای Q_1 ، Q_2 و Q_3 به ترتیب برای چارک اول، میانه (چارک دوم)، و چارک سوم استفاده می شود.

جدول زیر را برای مثال خیرین مدرسه تکمیل کنید.

σ	$IQR = Q_3 - Q_1$	Q_3	Q_2	Q_1	
انحراف معیار	دامنه میان چارکی	چارک سوم	میانه	چارک اول	
	۱۰				درآمد ماهیانه اعضای خیریه
	۱۲,۵				درآمد بعد از ورود میلیارد

این اعداد امکان مشاهده چند چیز را به شما می دهند: میلیارد در مسبب درهم ریختگی میانگین درآمد و انحراف معیار بوده است. اما میانه و دامنه میان چارکی همچنان ثابت ماندند. این یکی از دلایلی است که ما می گویم، اگر داده دور افتاده داشته باشیم، از میانه (و در نتیجه دامنه میان چارکی) به جای میانگین استفاده کنید، در این صورت نتیجه بهتری از داده ها به دست می آورید. زمانی که تعداد داده ها زیاد باشد، به نحو دیگری می توان از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی نتیجه بگیرید که داده دور افتاده وجود داشته است.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار

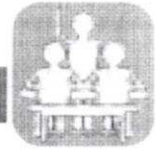


آمارهای دقیق
بشنوایند توسعه یابدار

آمار، ابزاری علمی
در توسعه ی مبتنی بر
داناتی

دلیل دیگر استفاده از میانه و دامنه میان چارکی تفسیر ساده آنها در مقابل تفسیر میانگین و انحراف معیار است. اگر نتایج مطالعات مربوط به سرطان را مطالعه کنیم، اولین چیزی که در گزارش‌ها مشاهده می‌کنیم، مشخصات عمومی بیماران مورد مطالعه است: آنها چند سال سن دارند؟ نسبت مردان به زنان چقدر است؟ چند نفر بیمارشان زود تشخیص داده شده و در مراحل ابتدایی است و چند نفر بیمارشان عود کرده است؟ اگر در گزارش، میانگین و انحراف معیار را ذکر کنیم، هر خواننده‌ای می‌تواند از روی اطلاعات داده شده با توجه به دو قانون ذکر شده نحوه توزیع سنین بیماران را به دست آورد. اما نکته در اینجاست که، آنها این کار را نخواهند کرد. به ندرت می‌توانید یک پزشک متخصص سرطان بسیار پر مشغله را در حال فکر کردن به این مسئله ببینید که، «خوب میانگین $64/3$ و انحراف معیار $9/8$ است؛ 68 درصد از بیماران در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین هستند؛ این یعنی $9/8 \pm 64/3$ ، که می‌شود، یک لحظه صبر کنید، مائین حساب کجاست؟» شما تنها می‌توانید با نگاهی سریع به میانه و دامنه میان چارکی تصور خوبی نسبت به توزیع داده‌های پیش رویتان به دست آورید. به عبارت دیگر، میانه و دامنه میان چارکی در توصیف مجموعه داده‌ها بسیار مفیدند و این دقیقاً همان کاری است که ما از آنها انتظار داریم انجام دهند:

تمام آمارهایی که در اینجا ذکر شد (میانگین‌ها، میانه‌ها، انحراف‌های معیار، دامنه‌های میان چارکی) تحت عنوان آمار توصیفی شناخته می‌شوند.



کار در کلاس

جملات زیر را کامل کنید:

۱. میانگین‌ها و میانه‌ها برای توصیف مجموعه داده‌ها مفیدند. ... میانگین ... و ... میانه ... انواعی از معیارهای گرایش به مرکزی هستند.
۲. شما معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می‌خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار **انحراف از میانگین** است.
۳. معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می‌شود، ... **انحراف معیار** است.
۴. معیار پراکندگی که معمولاً با میانه بیان می‌شود **دامنه میان چارکی** دارد. **IQR**
۵. **میانه**، ... و **دامنه میان چارکی** اطلاعات سریعی درباره داده‌ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می‌دهند.
۶. آماری که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین‌ها و میانه‌ها، انحرافات معیار و دامنه‌های میان چارکی به کار می‌رود، **آمار توصیفی** دارد.
۷. 50 درصد داده‌ها قبل از ... **میانه** ... و 50 درصد داده‌ها بعد از ... **میانه** ... قرار دارند.
۸. 75 درصد داده‌ها قبل از ... **چارک دوم** ... یا بعد از ... **چارک اول** ... قرار دارند.
۹. 25 درصد داده‌ها قبل از ... **چارک اول** ... یا بعد از ... **چارک سوم** ... قرار دارند.
۱۰. 50 درصد داده‌ها بین ... **چارک اول** ... و **چارک سوم** ... قرار دارند.

تهیه کننده:

شایسته است تمرینی اجتناف بشود که در آن لازم است راننده میان چارگی نرزیجا لبسه بشود.

دو اجزای مهم

۱۱. تقریباً ۹۶ درصد مشاهدات در فاصله ... از میانگین هستند.

۱۲. تقریباً ۶۸ درصد مشاهدات در فاصله ... از میانگین هستند.



تمرین

۱. یک نمونه ۲ تایی از بین اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه راهی را پیشنهاد می‌کنید. اگر بخواهید اعضای انتخابی این نمونه تصادفی، تکراری نباشند، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟ **استفاده از تاس پرتاب مجدد در صورت تکرار**

۲. سؤال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید. (راهنمایی: می‌توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید) **دو تاس همزمان پرتاب می‌کنیم.**

۳. مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بنویسید و آنها را شماره‌گذاری کنید. سپس یک نمونه ۴ تایی از این جامعه انتخاب کنید. **موضوع‌های زیر را در نظر بگیرید. درباره بهترین روش جمع‌آوری داده برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:**

الف) بیشتر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت در اتوبان‌ها باید تعیین شود».

ب) آبی، رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است.

پ) در زمان مطالعه، گوش دادن به موسیقی کلاسیک به یادگیری کمک می‌کند.

ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال مرتکب می‌شوند.

ث) رژیم گرفتن، باعث کاهش هوش می‌شود.

۴. دو موضوع برای هر یک از روش‌های جمع‌آوری داده بیان کنید.

الف) از طریق مصاحبه (ب) از طریق مشاهده (پ) از طریق دادگان (ث) از طریق پرسش‌نامه

۵. کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است. در هر یک واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.

الف) با تمام پلیس‌های یک پاسگاه پلیس برای پیدا کردن نظر آنها راجع به تخلفات مصاحبه شد.

ب) با بچه‌هایی که وارد یک پارک بازی می‌شدند، پنج در میان مصاحبه شد تا وسیله بازی مورد علاقه کودکان بررسی شود.

پ) برای بررسی PH شامپوهای تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادیم.

۶. برای تحقیقات و بررسی‌های زیر جامعه را مشخص کرده و روش نمونه‌گیری پیشنهاد کنید.

الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران. (ب) مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می‌دهند؟

۷. می‌خواهیم مدت زمانی را که دانش‌آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعه کتاب‌های غیردرسی می‌کنند، آمارگیری کنیم.

الف) در این آمارگیری جامعه را مشخص کنید.

این تمرین دو تمرین جداگانه تبدیل بشود.

شعارهای برتر سال جهانی آمار



آمار دقیق،

برنامه‌ریزی بهتر،

آینده روشن



آمار سیمای واقعیت،

ابزار مدیریت

حل تمرین ۲ به بعد پشت برگه

۳

اسامی آنها را روی کاغذهای یکسان می نویسیم و سپس به قید قرعه ۴ نفر آنها را انتخاب می کنیم .
کی روش نیز استفاده از اعداد تصادفی است .

بقیه تمرین ۳ که به نظری رسیدیم این تمرین مرتبط است .
الف) پرسش نامه (ب) پرسش نامه (پ) مشاهده (آزمایش)
ت) دادگان (ث) آزمایش (مشاهده)

۴

الف) بررسی علل موفقیت مدیر (برستاک) - بررسی عوامل موفقیت یک فرد در تکنولوژی سراسری
پ) بررسی میزان استفاده از کمربند ایمنی در جاده ها توسط رانندگان
بررسی رفتار دانش آموزان در هنگام وقت استراحت آنها
ب) بررسی میزان تصادف در یک نقطه ی خاصی در شهر - بررسی عزت در آن آموزا رشته ی ریاضی در دهه ۷۰
ت) نظر خواهی در مورد (برای) آموزشگاه توسط مدیر - نظر خواهی در مورد رضایت مشتریان از برخورد کارکنان
فردی نگاه

۵

نمونه	جامعه	واحد آماری	روش آماری
—	مجموعی کولیس ها پاسگاه	هر یک از کولیس ها پاسگاه	ایچ عمل سرشماری است و نمی تواند عنوان گیری باشد.
بچه ها که با آنها مواجهه شد.	کل بچه ها وارد شده به پارک	هر یک از بچه ها وارد شده به پارک	عنوان گیری تصادفی (منظم، سیستماتیک)
شامپوها بر سر گذاشته	کل شامپوها تولیدی	هر یک از شامپوها	عنوان گیری تصادفی (منظم)

۶

الف) مجموعی کل ساکنین استان مازندران مستقار - تهیه ی پرسش نامه و توزیع آن بین تعداد معینی از
خانوارهای این شهرها انتخاب (تصادفی) که بلاک متوالی آنها
مضرب ۳ باشد .

ب) مجموعی کل مراکز کشور که شامپو مصرف می کنند .
تهیه ی پرسش نامه و توزیع آن به متوالی کل شامپو جهت تکمیل

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

- (ب) یک روش نمونه گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید.
 (ب) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می کنید؟
 (ت) اندازه (تعداد) این جامعه چقدر است؟
 (ث) اندازه نمونه مورد بررسی چقدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی مورد نظر مناسب است؟ در صورت مناسب نبودن، روش نمونه گیری و نمونه خود را اصلاح کنید.
 (ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید.
 (ج) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟

اعضا

۸. نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص و بهترین مقیاس اندازه گیری آنها را ذکر کنید.
 (الف) رنگ اتومبیل های موجود در یک نمایشگاه اتومبیل (ب) درجه حرارت کلاس شما در روزهای سال
 (ب) گنجایش آب یک باری مخزنی (تانکر) (ت) تعداد نمکایات رسیده شده به یک پاستاخانه بلیس
 (ت) درآمد دانشجویان شاغل به کار (ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت
 (ج) سن دانشجویان شرکت کننده در یک دوره هنری
 ۹. میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است:

سنت	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	۲ نفر فروشنده	منشی	مستخدم
حقوق میلیون ریال	۱۰۰	۶۰	۳۰	۲۰	۲۰	۱۲	۸

- مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می دارد که میانگین پرداخت حقوق در این شرکت بیشتر از ۲۵۷ ریال است. آیا این رقم می تواند دلیلی برای پرداخت حقوق بالاتر در این شرکت باشد؟ چرا؟ کدام یک از معیارهای گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب تر است؟
 ۱۰. نمرات درس فیزیک دانش آموزی در طول سال برابر است با:

۱۹	۱۸	۷	۱۸	۱۹
----	----	---	----	----

بستگی به امتداد دارد
داده دور افتاده دارد

- (الف) میانگین را برای نمرات این دانش آموز حساب کنید.
 (ب) کدام یک از شاخص های فوق، بیانگر وضع این دانش آموز در درس فیزیک است؟
 (ب) اگر معلم درس فیزیک این دانش آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای اینکه میانگین وی در این درس بیشتر از ۱۸ شود، او در این امتحان چه نمره ای باید کسب کند؟
 ۱۱. دو دسته داده زیر قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه برحسب هزار ریال نشان می دهد.

بازار	۱۰	۱۱	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۱۰	۱۲	۹	۱۳	۸
بازار ۱	۱۰	۱۱	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۱۰	۱۲	۹	۱۳	۸
بازار ۲	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	۱۳	۱۰	۸

$k_1, k_2 = ?$

- (الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟
 (ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.
 (ب) آیا دامنه تغییرات با پراکندگی مشاهده شده در «الف» همخوانی دارد؟
 (ت) ترجیح می دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟
 (ث) اگر داده ها را در اختیار نداشته باشید، فقط به صرف داشتن دامنه تغییرات می توانید تصمیم گیری کنید؟

$a = \text{نمره}$
 $18 = \frac{17+19+18+a+18+19}{6}$
 $\rightarrow a \geq 17$

قبل از خرید دامنه تغییرات توجه کنید!

الف) مجموعی کل دانش آموزان کلاس

ب) انتخاب تعدادی از دانش آموزان به طور تصادفی (مثلاً دانش آموزان که شماره ردیف آنها در کلاس عدد فرد باشند)

۱ ساعت

۲ ساعت

۳ ساعت

⋮

پ) پرسش نامه شامل تعداد ساعت معین قید شده

ت) تعداد دانش آموزان کلاس

ث) تعداد دانش آموزان انتخاب شده، هر چه جامعه کوچک باشد بهتر است سرشماری را جایگزین نمونه گیری کنیم.

ج) میزان ساعت مطالعه کتب غیر درسی

چ) کمی، کیفی، با مقیاس نسبی

ج) کیفی نسبی

چ) کیفی نسبی

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف) کیفی نسبی

ب) کیفی فاصله ای

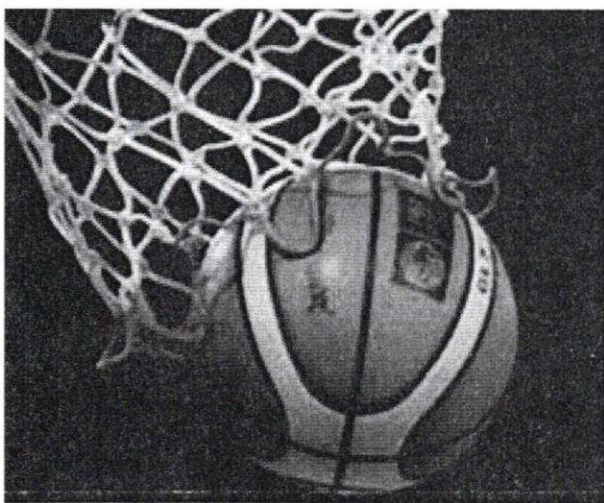
پ) کیفی نسبی

ت) کیفی نسبی

ث) کیفی نسبی

نمایش داده‌ها

فصل پنجم

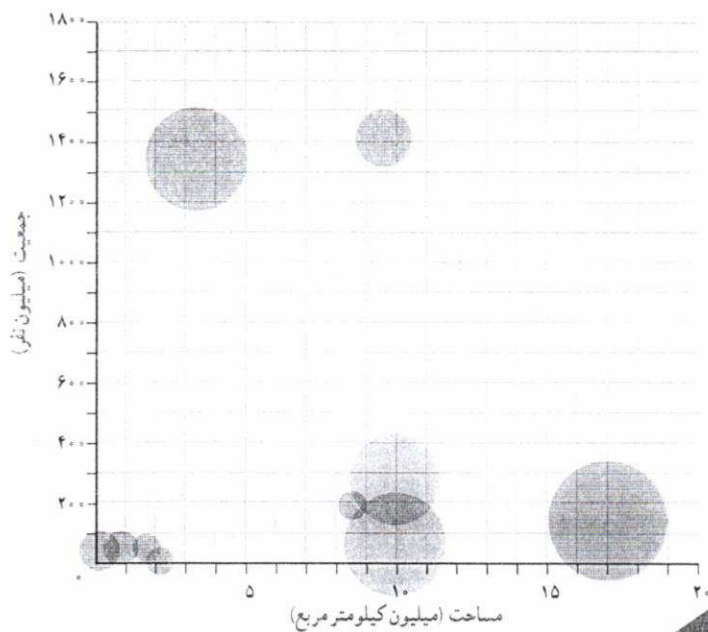
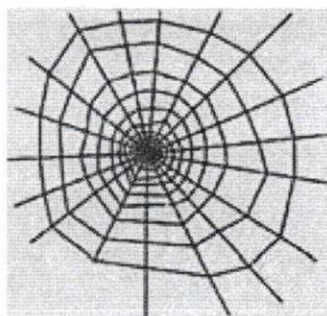


نمودارهای یک‌متغیره

درس ۱

نمودارهای چندمتغیره

درس ۲



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

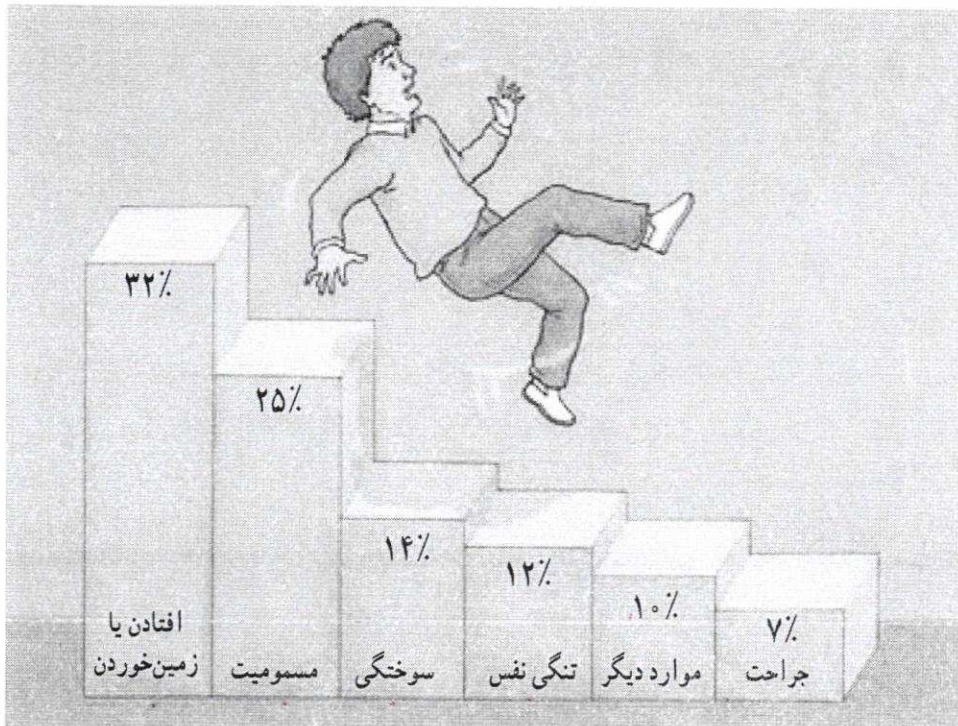
درس ۱

نمودارهای یک متغیره

فعالیت



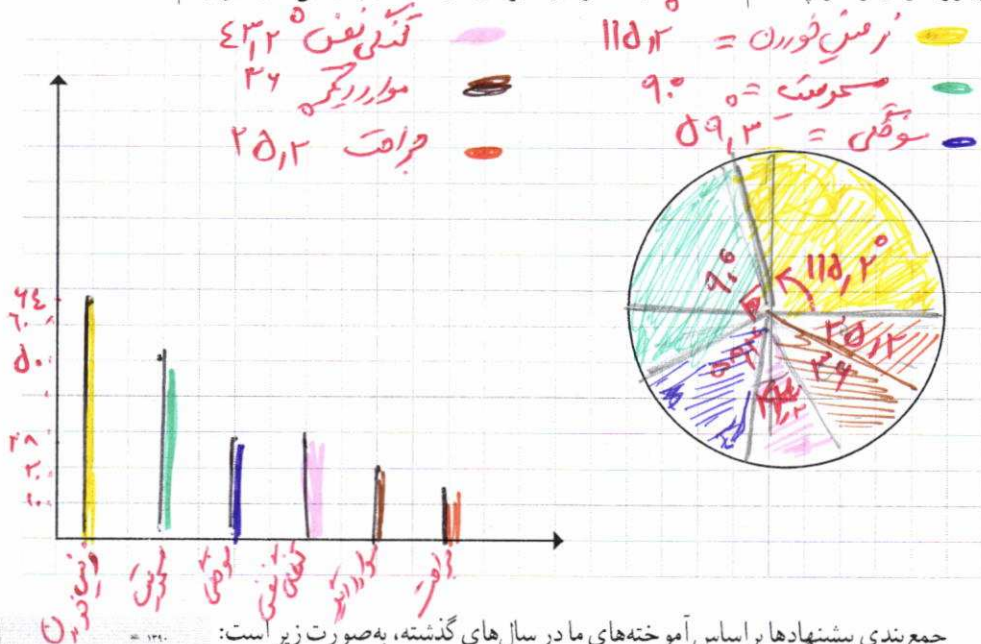
در کلاس قرار شد هر دانش آموز با توجه به داده‌های موجود در رسانه‌ها، درباره یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب‌دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟ به عنوان مثال، بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.



$$\begin{aligned} 32 \times 2 &= 64 \\ 25 \times 2 &= 50 \\ 14 \times 2 &= 28 \\ 12 \times 2 &= 24 \\ 10 \times 2 &= 20 \\ 7 \times 2 &= 14 \end{aligned}$$

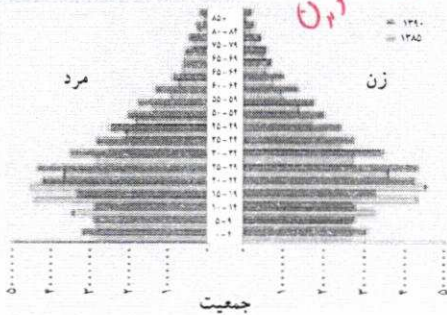
معلم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعبها برحسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش آموزان درخواست کرد که اگر می توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار ارائه کنید؟

نمودار میله ای انواع آسیب دیدگی را، برحسب تعداد رسم کنید. مراحل رسم نمودار دایره ای را به یاد بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره ای درصد آسیب دیدگی ها را نیز رسم کنید.



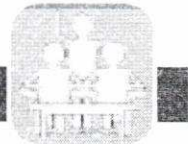
جمع بندی پیشنهادها براساس آموخته های مادر سال های گذشته، به صورت زیر است:

- ✓ رسم مکعب مستطیل به جای مستطیل خوب نیست، چون ممکن است اطلاعات دقیق را به بیننده انتقال ندهد.
- ✓ برای متغیرهای اسمی نمودار میله ای بهتر از بافت نگاشت (هیستوگرام) است.
- ✓ زمانی که درصد را گزارش می کنیم، بهتر است از نمودار دایره ای استفاده کنیم تا بهتر بتوانیم مقایسه انجام دهیم. البته به شرطی که بیشتر از ۶ مقدار نداشته باشیم.



مقایسه هرم سنی جمعیت ایران سال های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰

کار در کلاس



در کلاس درس خود متوسط مصرف روزانه انواع میوه ها یا سبزی ها را به یکی از روش های فصل قبل جمع آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. مثلاً اگر در روز شنبه ۳، یکشنبه ۶، دوشنبه ۵، سه شنبه ۴، چهارشنبه ۳، و پنجشنبه ۷ و جمعه ۸ نوع میوه یا سبزی خورده باشید، میانگین آنها برابر ۵/۱۴ است که آن را ۵ در نظر می گیریم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

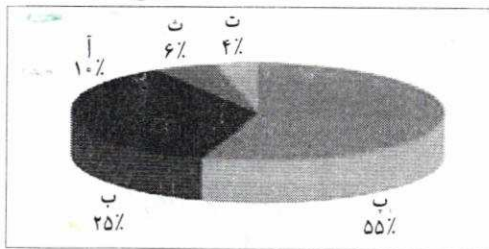
نمایش داده‌ها

نمایش داده‌ها، روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها با حس بینایی است.

فعالیت

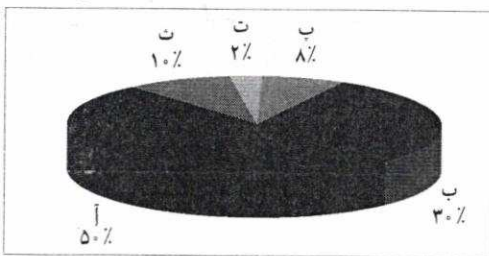


درصد تعداد کاربران اینترنت در پنج کشور



از نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به سؤال قبل کافی است؟ چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟

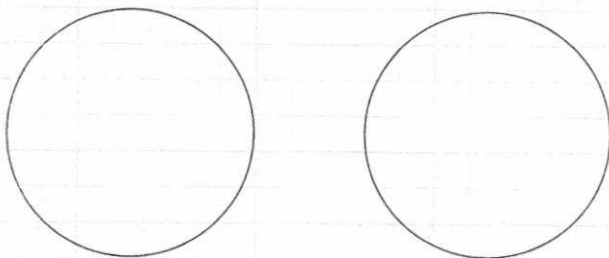
درصد کاربران اینترنت نسبت به کل جمعیت در پنج کشور



اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعه اینترنت و میزان استفاده از آن در کشورهای مختلف را می‌توان به صورت روبه‌رو نشان داد.

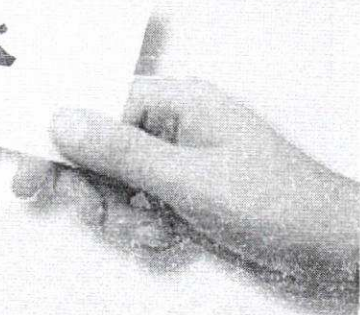
آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟

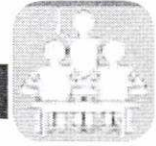
به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به صورت دو بعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید، بهتر است یا سه بعدی؟ مانند دو نمودار قبلی.



انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائه همان اطلاعات در جدول‌هاست. نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند. می‌گویند ارزش یک تصویر به اندازه هزار کلمه است.

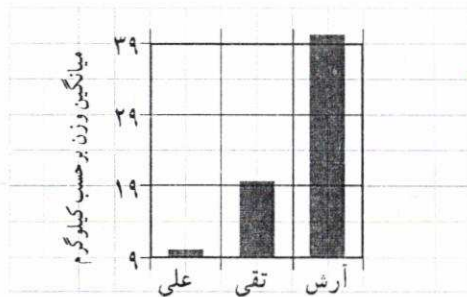
خواندنی





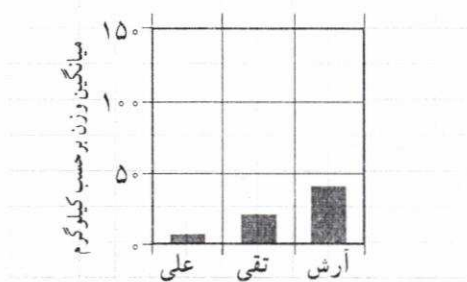
بازی با نمودارها

۳. اگر نقطه شروع محور عرض‌ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می‌شود؟



در واقع اعداد همان اعداد قبلی‌اند، اما محور عرض‌ها تغییر کرده است. اکنون این‌طور به نظر می‌رسد که کدو تنبل‌های **بیانج علی وزن بسیار ناچیزی دارند.**

۴. اینک اگر کسی بخواهد دیگران را متقاعد کند که همه کدو تنبل‌ها حدوداً به یک اندازه‌اند، **از چه کاری می‌تواند بکنند؟** به این نمودار نگاه کنید:

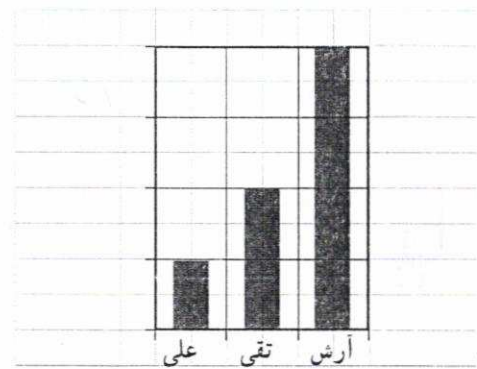


اعداد تغییری نکرده‌اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟

مقیاس محور را تغییر دادند.

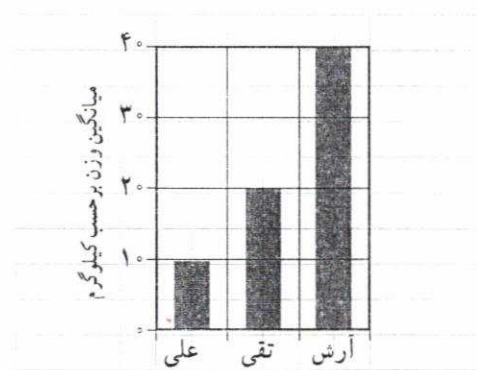
به‌کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.

۱. بیایید از کدو تنبل‌های باغ‌های آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به‌صورت زیر است:



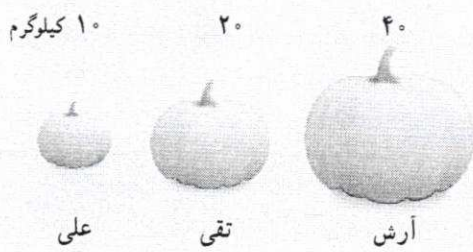
این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدو تنبل‌ها را؟ **سودم نرسد.**

۲. نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟



این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می‌کند؟

معنی می‌کند که وزن کدو تنبل‌ها باغ‌ها میانگین آرش بیشتر از تقی و علی است.



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو.

این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدو تنبل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدو تنبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل علی (۱۰ کیلوگرم) است؛ ارتفاع کدو تنبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدو تنبل علی است. آیا این شکل اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض و مساحت دایره = πr^2)

شما چگونه این شکل را رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟
 به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظر تان به بیننده تأثیر دارد؟

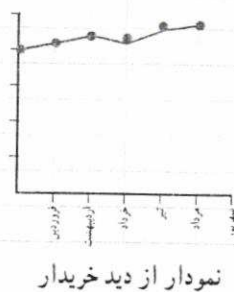
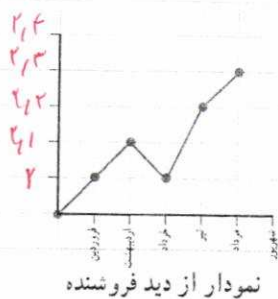


تمرین

۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین
۲/۴	۲/۳	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۰

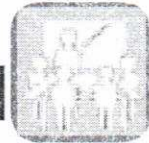
خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



به نظر شما کدام یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟

نمایش از رسم می‌کند

۲. اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای دایره‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است؟ **فهر**
۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟ **کی**



فعالیت

مربی گروه (تیم) بسکتبال شهر می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب‌شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

۱۱ بازی بازیکن الف:

۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲	تعداد بازی‌ها
۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳	امتیاز کسب‌شده

۱۰ بازی بازیکن ب:

۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی‌ها
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب‌شده

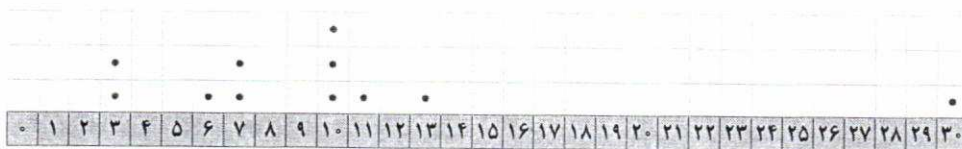
می‌توان داده‌های مرتب‌شده را به صورت زیر نشان داد:

۳	۳	۶	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰	بازیکن الف
۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۲	۱۳	بازیکن ب

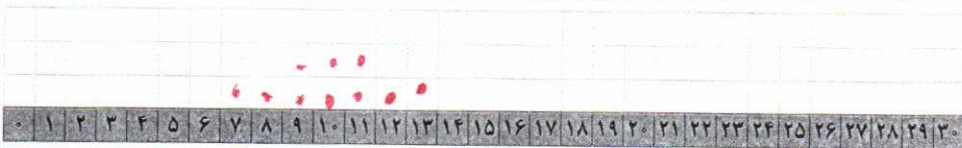
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

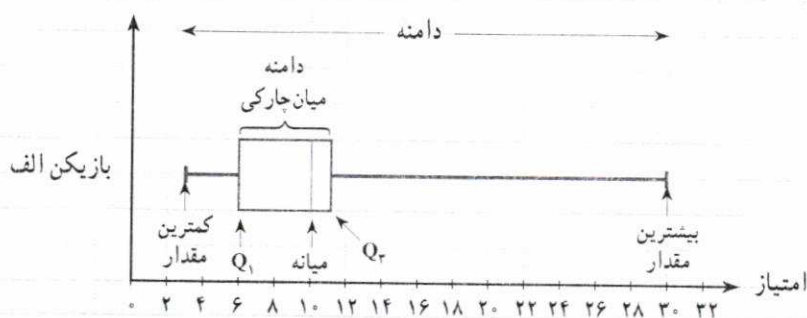
اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل نمودار نقطه‌ای داده‌ها می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیازهای بازیکن الف را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته سؤال کلی است و اگر به شما بگویم این بازی آخر است یا گروه مقابل تیمی است که تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود. در فصل گذشته برای تصمیم درست‌تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به طور هم‌زمان استفاده می‌شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه‌های گوناگون از داده‌ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیازهای بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید. برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنه دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای. برای این منظور خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.



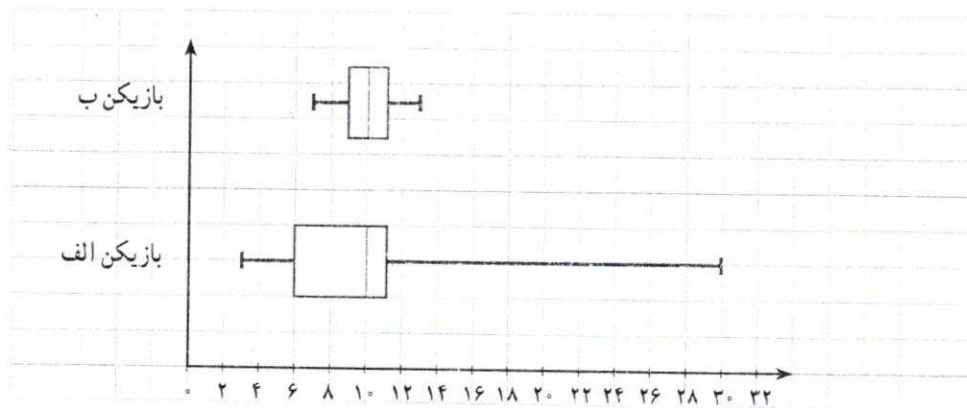
این نمودار دامنه، دامنه میان چارکی و میانه مجموعه داده‌ها را به طور هم‌زمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسه داده‌ها بسیار عالی است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر داده‌ها در برگیرنده داده دور افتاده بودند، دامنه وسیع‌تر می‌بود. در نمودار جعبه‌ای، طول سبیل‌ها با توجه به مرزهای بالا و پایین افزایش \times می‌یابد. با نگاه کردن به سبیل‌های نمودار جعبه‌ای، می‌توانید به نامتقارن بودن داده‌ها پی ببرید.

نمودار جعبه‌ای دو بسکتبالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنه این امتیازات را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید از بین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اکنون بهتر می‌توانید به سؤال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابل یا حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



بازیکن ب دامنه نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانه هر دو برابر با ۱۰ است.

بازیکن الف دامنه امتیازات بزرگی دارد. گاهی این بازیکن، امتیازاتی بسیار بیشتر از بازیکن ب می‌آورد،

و گاهی هم بسیار کمتر.

بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازاتش از بازیکن الف بیشتر است (میانه‌ها و دامنه میان‌چارکی

را با هم مقایسه کنید)، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

از آنجا که دو خط
دو طرف جعبه شبیه سبیل
گره است. بعضی مواقع
به آن نمودار جعبه و سبیل
گفته می‌شود.

نمودار جعبه‌ای، روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌هاست. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنه میان‌چارکی را نشان می‌دهد و سبیل‌ها کمترین و بیشترین داده را نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای بیش از یک مجموعه داده را می‌توان نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

دامنه میان‌چارکی به نظر مفید می‌رسد. این دامنه در مورد بازیکنانی که گاهی امتیازات بسیار پایینی کسب می‌کنند چگونه؟ اگر بازیکنی در روز مسابقه، بد بازی کند، برای ما به قیمت دادن قهرمانی در تیمگان (لیگ) تمام می‌شود. مطمئن نیستیم که دامنه یا دامنه میان‌چارکی برای ما مشخص می‌کند که کدام بازیکن واقعاً ثبات بیشتری دارد.

مربی نباید فقط دامنه امتیازات بازیکنان را مقایسه کند. او به راهی نیاز دارد تا به طور دقیق از روی مقادیر موجود محاسبه کند که کدام بازیکن در روز مسابقه ثبات بیشتری دارد. به عبارت دیگر، او باید بازیکنی را پیدا کند، امتیازاتش کمترین تغییرات را داشته باشد.



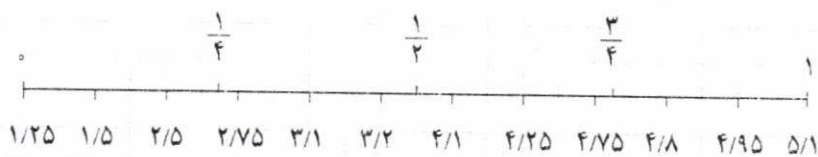
مشکل دامنه و دامنه میان چارکی این است که فقط تفاوت بین مقادیر کم و زیاد را به شما می گویند؛ اما نمی گویند که چند وقت به چند وقت بازیکنان این امتیازات کم و زیاد را در مقابل امتیازات نزدیک به میانه کسب می کنند. این برای مربی مهم است.

کار در کلاس



برای مجموعه داده های زیر نمودار جعبه ای بکشید.
 $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{25}, \frac{4}{75}, \frac{4}{95}, \frac{5}{1}$
 راهنمایی: $\frac{4}{95}$ $\frac{5}{1}$

گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.
 از آنجا که اعداد به ترتیب چیده شده اند، اولین عدد **کمترین** مقدار است و آخرین عدد **بیشترین** مقدار.
 گام دوم: چارک ها را مشخص کنید.
 در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک ها استفاده کنیم.

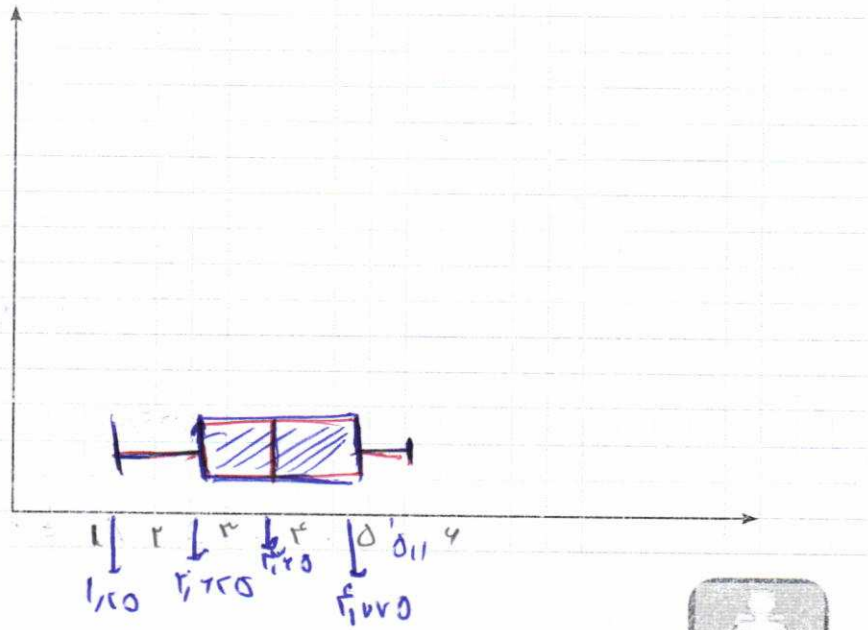


با نگاه به شکل بالا درمی یابیم که میانه بین مقادیر $\frac{3}{1}$ و $\frac{3}{2}$ است. بنابراین، مقدار میانه می شود: $\frac{3}{2}$.
 چارک اول، بین مقادیر $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{75}$ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می شود: $\frac{2}{75}$.
 چارک سوم بین مقادیر $\frac{4}{75}$ و $\frac{4}{8}$ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می شود: $\frac{4}{75}$.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

گام سوم: نمودار جعبه‌ای رسم کنید.



تمرین



۱. نمودارهای میله‌ای فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟ **۶ وقتی فاصله فراوانی داده کم باشد - فراوانی**
۲. نمودارهای میله‌ای افقی درست شکبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند. برای نمودارهای محورها چرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟ **وقتی که اسم رده‌ها طولانی باشد -**
۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۷ | ۲۴ | ۲۶ | ۲۶ | ۲۹ | ۱۹ | ۳۱ | ۱۸ | ۲۳ | ۲۲ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۳ | ۲۹ | ۲۵ | ۲۵ | ۳۳ | ۳۱ | ۲۱ | ۲۶ | ۲۵

الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم روی محور افقی نشان دهید.

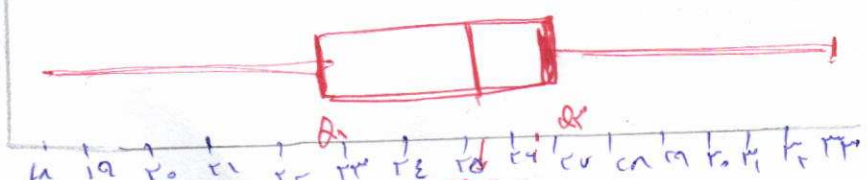
ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟ **بیشتر میانگین (۱۱) کمتر از میانگین (۱۸)**

ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ **بیشتر میانه (۱۱) کمتر از میانه (۱۸)**

ث) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید

به این سوال پاسخ دهید؟ **بله طبق فرکانس داده‌ها بین چارک اول و سوم هستند**



نمودارهای میله‌ای افقی درست شکبیه نمودارهای میله‌ای عمودی‌اند، با این فرق که محورها چرخیده‌اند. در نمودارهای میله‌ای افقی، رده‌ها روی محور عمودی و درصد یا فراوانی روی محور افقی نشان داده می‌شود.

نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌ترند، اما نمودارهای میله‌ای افقی در صورتی که اسم رده‌ها طولانی باشند، مفید واقع می‌شوند. آنها برای نمایش اسامی رده‌ها، بدون نیاز به عمودی نوشتن، فضای زیادی را در اختیارمان می‌گذارند.

$\bar{x} = 25.15$
 میان = ۲۵٫۱۵
 $m = 25.24$
 $Q_1 = 23$
 $Q_2 = 25.15$
 $Q_3 = 27$

درس ۲

نمودارهای چندمتغیره



فعالیت

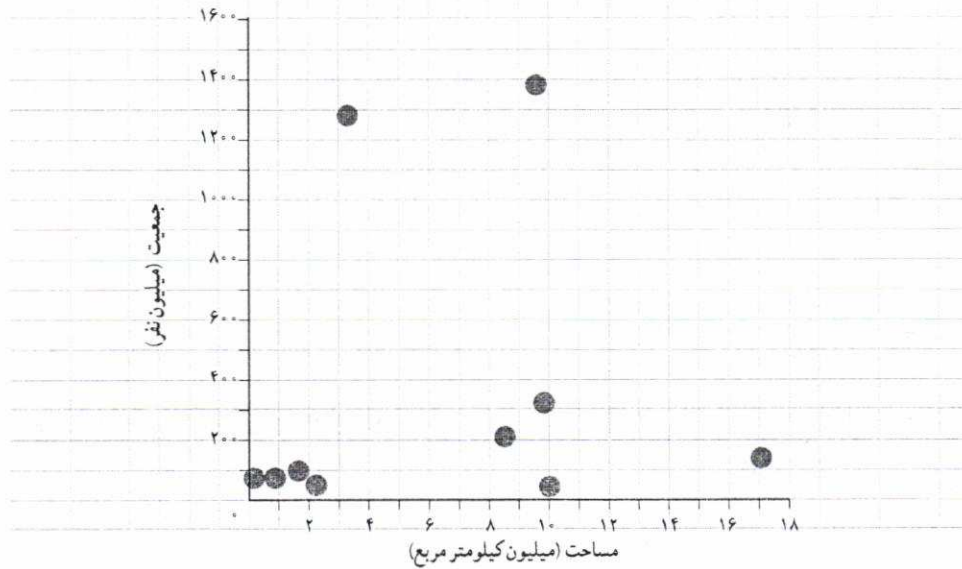
پوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور را تهیه کرده است:

نام کشور	جمعیت (نفر)	مساحت (کیلومتر مربع)	آبها (درصد)
۱ ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
۲ آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
۳ انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
۴ برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۵۱۵,۷۶۷	۰/۶۵
۵ ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	۱/۳۰
۶ چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۵۹۶,۹۶۱	۲/۸۰
۷ روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳/۰۰
۸ عمان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
۹ کانادا	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
۱۰ هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰

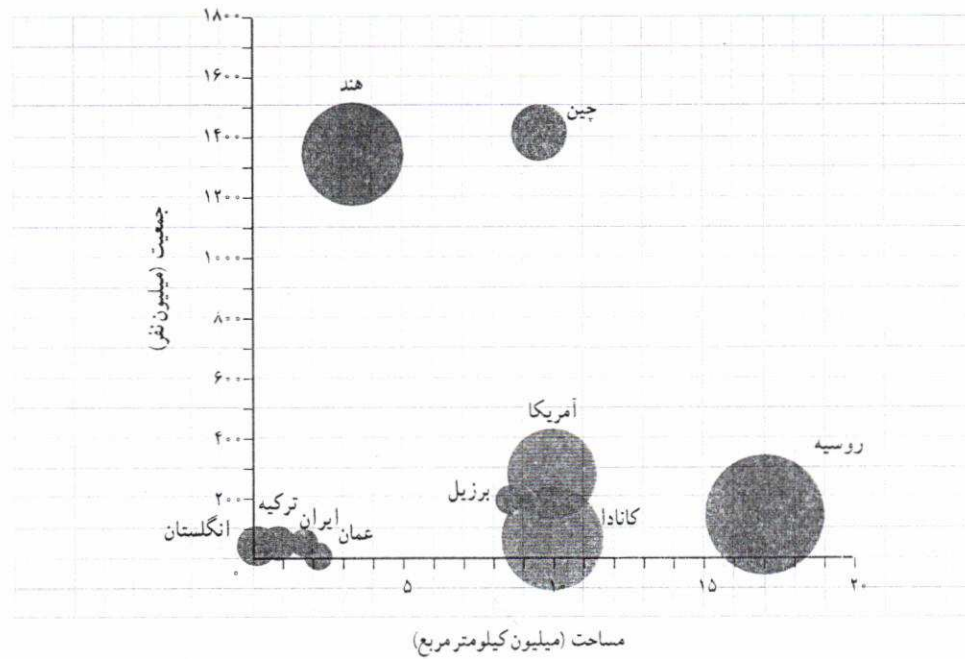
پوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها؛ یعنی مساحت و جمعیت و درصد آبها، می‌تواند نموداری میله‌ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می‌تواند پراکنش نگاشت رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت)؛ اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به‌طور هم‌زمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

تهیه کننده:

پراکنش نگاهت جمعیت در مقابل مساحت کشورها



پوریا همین طور که به پراکنش نگاهت جمعیت در مقابل مساحت کشورها نگاه می کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازه نقطه های نمودار را متناسب با درصد آب های کشورها رسم کند. پس نموداری به شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که پوریا رسم کرد، به نام نمودار حبابی معروف است.

هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه‌تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) را مشخص می‌کند، که در آن داریم:

- V_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی،
- V_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی،
- V_3 : اندازه نقطه (مساحت دایره).

نمودارهای حبابی را می‌توان گونه‌گونی خاصی از پراکنش نگاشت دانست که برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آنها به جای نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود.

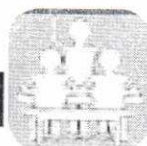
سیستم بینایی انسان به‌طور طبیعی اندازه یک دایره را بر اساس مساحت آن در نظر می‌گیرد. مساحت دایره هم بر خلاف قطر یا محیط آن، متناسب با شعاع دایره نیست؛ بلکه متناسب با توان دوم شعاع است. پس اگر شعاع دایره‌ها را دقیقاً متناسب با مقادیر متغیر سوم در نظر بگیریم، اختلاف ظاهری اندازه دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل باید شعاع دایره‌ها را متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم در نظر گرفت.

توجه: متغیر سوم در نمودارهای حبابی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد.



اطلاعات اضافی درباره واحدهای آماری (علاوه بر سه متغیر اصلی) را می‌توان با استفاده از رنگ‌ها و طرح‌ها وارد نمودار حبابی کرد. مثلاً در نمودار مربوط به درصد آب‌های کشورها می‌توان قاره‌های مختلف را با رنگ‌های متفاوت دایره‌ها مشخص کرد. اگر علاوه بر آن بخواهیم زبان رسمی کشورها را هم در نمودار مشخص کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

کار در کلاس



قد و وزن و نمره درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید:

- (الف) قد، وزن، نمره ریاضی
- (ب) قد، وزن، نمره ادبیات فارسی
- (پ) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات فارسی

سپس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید؛ به طوری که دایره‌ها هر بار، نشان‌دهنده یکی از متغیرها باشند.

تمرین



۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟
 - (الف) شعاع دایره‌ها
 - (ب) قطر دایره‌ها
 - (پ) محیط دایره‌ها
 - (ت) مساحت دایره‌ها
۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟
 - (الف) یک متغیر
 - (ب) دو متغیر
 - (پ) سه متغیر
 - (ت) محدودیتی ندارد

تهیه کننده:

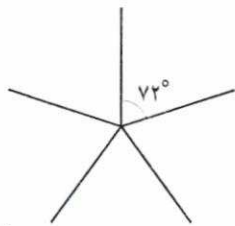
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

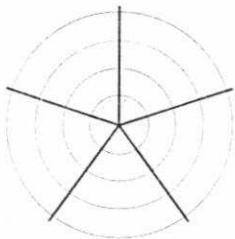
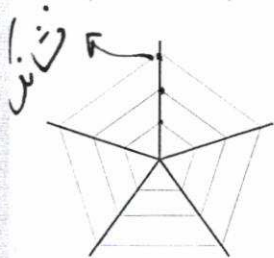


نمودار راداری، روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دوبعدی است، که در آن سه متغیر کتی یا بیشتر بر روی محورهای نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.

نمودار راداری از چند خط (به‌طور دقیق‌تر: نیم‌خط) به‌شکل یژه‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان‌دهنده یک متغیر است؛ پس می‌توانند درجه‌بندی شوند. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع‌های نمودار راداری می‌گویند.



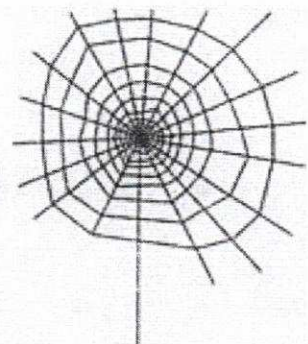
اگر درجه‌بندی شعاع‌ها به‌گونه‌ای انجام گیرد که فاصله بین نشانک‌های متوالی بر روی همه شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به‌شرطی که باعث شلوغی نمودار نشود.

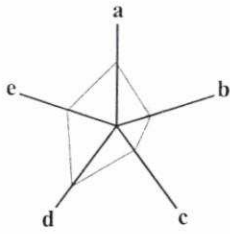


گاهی این خطوط راهنما را به‌جای راست‌خط به‌صورت خط خم و دایره رسم می‌کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحه نمایش رادار می‌شود.

خواندنی

از آنجا که نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است، عده‌ای به آن «نمودار تار عنکبوتی» هم می‌گویند. اگر خطوط راهنما رسم نشوند، این نمودار ممکن است شبیه یک ستاره شود. به همین دلیل، آن را «نمودار ستاره‌ای» هم می‌نامند. البته نام‌های دیگری هم برای این نمودار وجود دارد.





نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به بیشینه آن متغیر به ازای همه مشاهددها، اندازه آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می کند. این کار را برای همه متغیرها و بر روی همه شعاع ها انجام می دهیم. سپس نقاط مشخص شده روی شعاع های مجاور به ازای هر مشاهده را به هم وصل می کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بیندازیم، می توانیم مشاهده ها را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می گوید:

- کدام مشاهده ها شبیه به یکدیگرند؟
- آیا داده دور افتاده ای وجود دارد؟

- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
 - مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده های دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می شود.

یادآوری: منظور از مشاهده یا نقطه داده ای در آمار، مجموعه ای است شامل یک یا چند

مقدار اندازه گیری شده برای یک عضو جامعه ای آماری (= واحد آماری).

مثلاً اگر واحدهای آماری، دانش آموزان کلاس باشند و سن و قد و وزن و گروه خونی آنان را ثبت کنیم، مجموعه مقادیر این متغیرها برای هر کدام از دانش آموزان، یک «مشاهده» است.

♦ مثال: نامزدهای نهایی دریافت جایزه «توب طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی سه بازیکن A و B و C بودند که در نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه ببینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول فصل ۲۰۱۳-۲۰۱۲ را بررسی می کنیم. (همه داده ها، به جز تعداد بازی، به صورت میانگین مقادیر اندازه گیری شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده اند.)

متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
گل زده (غیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضربه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضربه های گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلایی (مهم)	۲/۰۵	۱/۵۸	۳/۶۶	۵
پاس های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تک (تکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توب یابی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶

تهیه کننده:

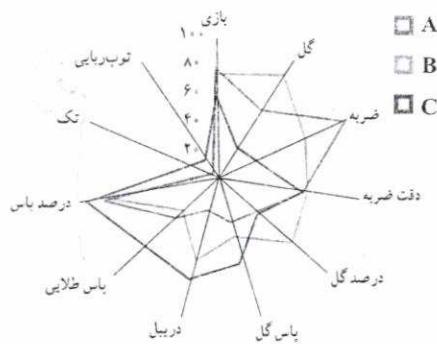
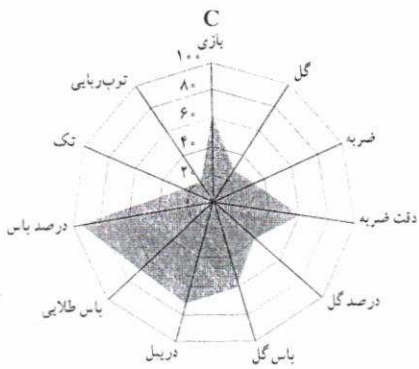
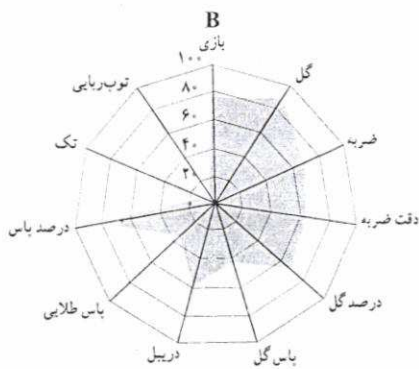
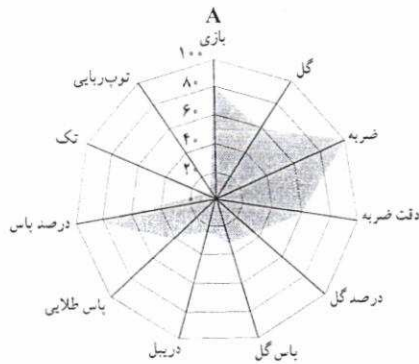
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



توب طلای فدراسیون بین المللی فوتبال (فیفا)، جایزه ای است که هر سال توسط فیفا و مجله فرانس فوتبال به بهترین بازیکن فوتبال مرد داده می شود. انتخاب بهترین بازیکن بر اساس رأی گیری از نمایندگان رسانه های بین المللی و سرمربیان و کاپیتان های تیم های ملی فوتبال صورت می گیرد.

مشاهده = (تکامل هر ...)

از رده اشکالی که در این رده قرار دارد



اکنون نمودار راداری مربوط به هر سه بازیکن را رسم می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که تعداد ضربه‌های بازیکن A به سمت دروازه، تقریباً به حد نهایی نمودار رسیده است. یعنی تعداد ضربه‌های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ اما از سوی دیگر، تعداد دریبل‌های موفق او به‌ویژه نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است.

تعداد گل‌های زده بازیکن B در جریان بازی، نزدیک به حد نهایی نمودار شده و از این لحاظ، او جزء برترین‌های جهان بوده است. درصد ضربه‌هایی هم که او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است. به‌طور کلی، ناحیه مربوط به گل زدن در نمودار B، وسعت زیادی دارد.

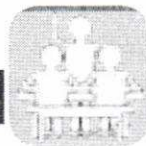
نمودار C به‌شکل جذابی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این موضوع، نقش متفاوت او در زمین است.

نمودارهای A و B شباهت زیادی به هم داشتند. آنان از بزرگ‌ترین گلزنان اند؛ اما بازیکن C یک «گل‌ساز» بزرگ است. با اینکه آمار تعداد گل‌های او برای یک هافبک کناری، بسیار خوب است و درصد ضربه‌های گل شده‌اش نیز عالی است، درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. ببینید که ناحیه مربوط به پاس و دریبل در نمودارش چه وسعت زیادی دارد.

اگر داده‌های مربوط به هر سه نفر را در قالب یک نمودار رسم کنیم، شاید مقایسه بین آنان آسان‌تر شود. اکنون آیا می‌توانید بگویید که کدام بازیکن، شایستگی بیشتری برای دریافت توپ طلا سال ۲۰۱۳ میلادی داشت؟

C
A

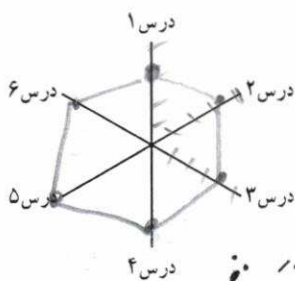
کار در کلاس



آموزگارتان شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می کند:

- ۱- ریاضی و آمار ۱۰ ۲- منطق ۱۶
 ۳- عربی ۱۶ ۴- مطالعات ۱۷
 ۵- ورزش ۲۰ ۶- ادبیات ۱۸

الف) نمودار راداری نمره‌های خود را به صورت مقابل رسم کنید:



ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش‌آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید.

پ) به نظر شما نمره‌های کدامتان بهتر است؟ هر نمودار را در ردی زیر بنویسید.

تمرین



۱. نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمتی به طور هم‌زمان به کار می‌رود؟ **۳ یا بیشتر است**
 ۲. زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟ **واسطه به تعداد متغیرها**
 ۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟ **دوره خاص را نشان می‌دهد**
 ۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟ **قدرت و ضعف بازیکنان**
 ۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری، 40° درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟ **۹ متغیر**
 ۶. داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
X_1 عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
X_2 نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
X_3 نسبت ولادت‌ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
X_4 نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
X_5 شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

(داده‌ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)

منابع

۱. آنسفته (۱۳۹۵)، ترندمار و سواد آماری، خانه آمار اصفهان
۲. ج. بهرودیان (۱۳۹۳)، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس
۳. گسروه مؤلفان (۱۳۹۵)، آمار و مدل‌سازی، وزارت آموزش و پرورش
۴. C. H. Brase and C. P. Brase (2012), Understandable Statistics, Brooks/Cole
۵. D. Griffiths (2009), Head First Statistics, O'Reilly Media
۶. S. McKillup (2004), Statistics Explained: An Introductory Guide for Life Scientists, Cambridge Univ. Press
۷. A. J. Vickers (2009), What is a p-value anyway? 34 Stories to Help You Actually Understand Statistics, Pearson
۸. Written by Volunteers (2014), Everything Maths: Grade 10 and 11 Mathematical Literacy, Siyavula

داده



جواب ۳: کدام متغیرها به وسیله یکدیگر اندازه‌گیری می‌شوند؟
 نسبت به متغیرهای دیگر متغیرهای کم‌تر یا کمتر است. مقدار کدام متغیر نسبت به متغیر دیگر کمتر است؟
 مقدار کدام متغیر بزرگ‌تر است؟