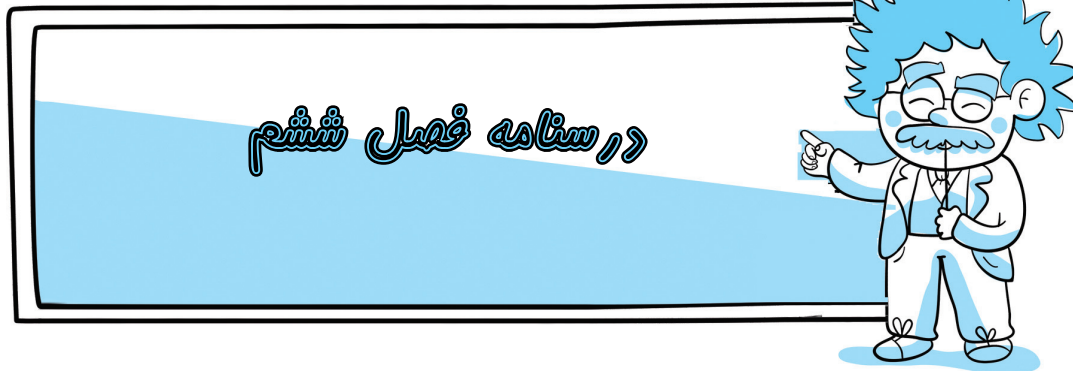




فصل ششم

سطح و حجم



مجموعه های هندسی



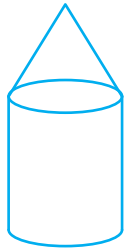
با نگاه به اطراف خود اجسامی را می بینیم که یا طبیعی اند و یا ساخته دست انسان می باشند. همه اجسامی که می بینیم دارای حجم می باشند.  
 حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد.  
**حجم های هندسی:** دارای شکل ها و ویژگی های مشخص و تعریف شده هستند. مانند: مکعب، استوانه و مخروط و ...  
**حجم های غیر هندسی:** شکل های مشخص و تعریف شده ای ندارند. مانند: ماشین اسباب بازی و یک تکه سنگ و فنجان و ...

حجم های هندسی به سه دسته تقسیم می شوند:

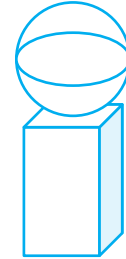
نام حجم	مثال
حجم های منشوری	
حجم های هرمی	
حجم های کروی	



**حجم‌های ترکیبی هندسی:** برخی از حجم‌های هندسی ترکیبی از حجم منشوری، هرمی و کروی هستند، که به آنها حجم‌های ترکیبی می‌گوییم.



ترکیبی از منشور و هرم



ترکیبی از منشور و -کره

**حجم‌های منشوری:** حجم‌های منشوری حجم‌هایی هستند که دو قاعده موازی دارند و این قاعده‌ها از دو شکل هم‌نهشت تشکیل شده‌اند. و هر برشی موازی قاعده‌ها، شکلی هم‌نهشت با قاعده‌ها می‌سازد.

**منشور چندپهلوی:** حجم منشوری که قاعده‌های آن چندضلعی است، منشور چندپهلوی گفته می‌شود.

**استوانه:** حجم منشوری که قاعده‌های آن دایره می‌باشد، استوانه می‌گوییم.

**قاعده منشوری:** در یک منشور چندپهلوی، به دو سطح بالا و پائین منشور که دو چندضلعی مساوی هستند قاعده منشور می‌گوییم.

**وجه جانبی:** بدنه یک منشور چندپهلوی از تعدادی مستطیل یا متوازی‌الاضلاع تشکیل شده است، که به آنها وجه‌های جانبی منشور یا پهلوهای منشور می‌گوییم. منشور را با تعداد پهلوهای آن نام می‌بریم.

**یال منشور:** محل برخورد هر دو وجه را یال می‌گوییم.

**نکته ۱** تعداد یال‌های منشور سه برابر تعداد اضلاع قاعده منشور است.



**رأس منشور:** به نقطه برخورد هر یال با قاعده منشور رأس می‌گوییم. به بیان دیگر به نقطه برخورد هر سه سطح رأس می‌گوییم.

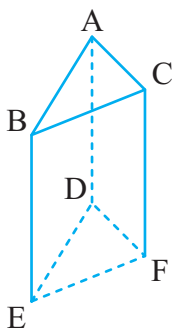
**نکته ۲** تعداد رأس‌های منشور دو برابر تعداد اضلاع قاعده منشور است.



**مثال ۱** در حجم مقابل نام منشور، قاعده‌ها، وجه‌های جانبی، رأس‌ها و یال‌ها را بنویسید:



**پاسخ:** نام منشور: منشور سه پهلو



قاعده‌ها ← ۲ قاعده:  $\hat{ABC}$  و  $\hat{DEF}$

رأس‌ها ← ۶ رأس: A, B, C, D, E, F

وجه‌های جانبی ← ۳ وجه جانبی: ABED, ADFC, CBEF

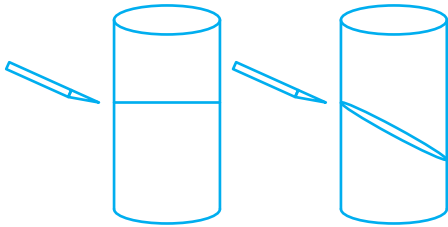
یال‌ها ← ۹ یال: AB, AC, BC, EF, DE, DF, AD, BE, CF

**مثال ۲** منشوری ۵۰ رأس دارد. این منشور چند یال دارد:



تعداد اضلاع قاعده  $50 \div 2 = 25$

تعداد یال‌ها  $3 \times 25 = 75$

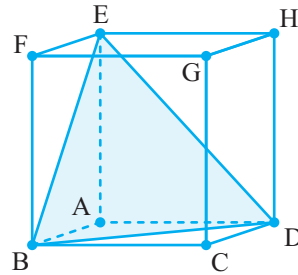
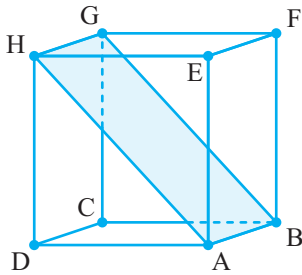
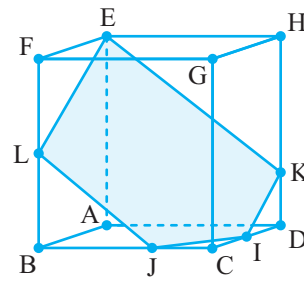
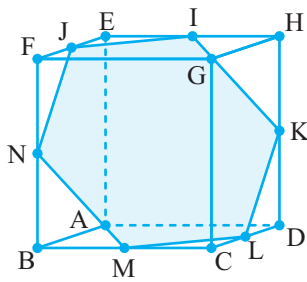


**مقطع زوئیه** اگر یک منشور را با یک چاقو برش بزنیم و سطح برش خورده را رنگ کرده و روی یک کاغذ بزنیم، اثر آن به شکل‌های هندسی مانند: مربع، مستطیل، دایره، بیضی و .... دیده می‌شود. به این کار «مقطع زدن» می‌گویند.

**مثال ۳** سطح مقطع یک مکعب به چه شکل‌هایی می‌تواند باشد؟

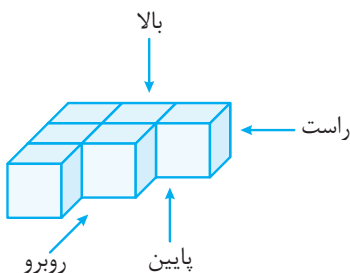


**پاسخ:** سطح مقطع یک مکعب می‌تواند به شکل مثلث و چهارضلعی (مربع، مستطیل، لوزی، متوازی‌الاضلاع، دوزنقه) و پنج ضلعی و شش ضلعی باشد.



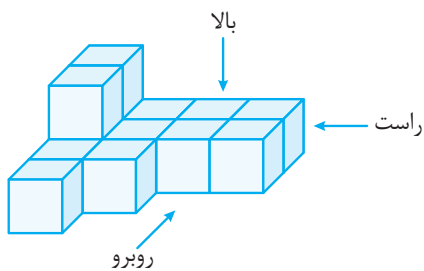
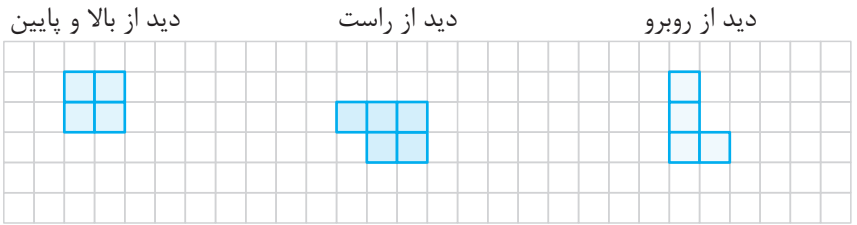
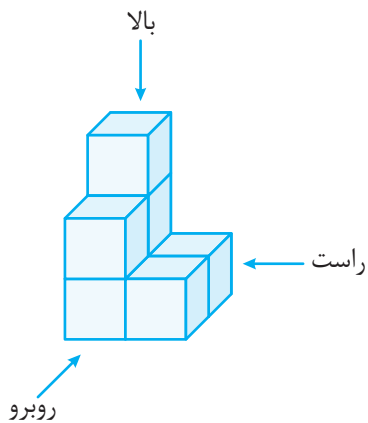
**نمایش مختلف یک جسم** اگر یک حجم هندسی را از جهت‌های مختلف (روبرو، بالا، سمت راست و پائین) نگاه کنیم، ممکن است شکل‌های هندسی متفاوتی دیده شود.

**مثال ۴** حجم‌های زیر از چهار نما به شکل‌های زیر دیده می‌شود:



دید از بالا و پایین	دید از راست	دید از روبرو

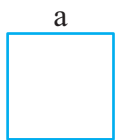




### محاسبه حجم‌های منشوری

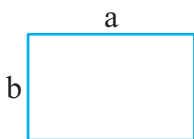


برای محاسبه حجم‌های منشوری، از رابطه  $v = s.h$  یا ارتفاع منشور  $\times$  مساحت قاعده = حجم استفاده می‌کنیم. قاعده یک منشور می‌تواند یک شکل هندسی یا ترکیبی از چند شکل هندسی باشد. در این قسمت مساحت اشکال مختلف را یادآوری می‌کنیم.



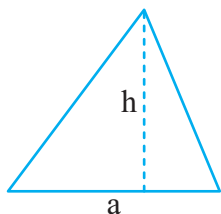
**مساحت مربع:** اگر ضلع مربع را با  $a$  و مساحت آن را با  $s$  نشان دهیم. خواهیم داشت:

$$s = a \times a = a^2 \text{ و خودش } \times \text{ یک ضلع} = \text{مساحت مربع}$$



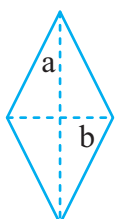
**مساحت مستطیل:** اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب با  $a$  و  $b$  نشان دهیم. خواهیم داشت:

$$s = a \times b = ab \text{ و عرض } \times \text{ طول} = \text{مساحت مستطیل}$$



**مساحت مثلث:** اگر در یک مثلث ارتفاع را با  $h$  و قاعده را با  $a$  نشان دهیم خواهیم داشت:

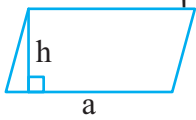
$$s = \frac{a \times h}{2} = \frac{1}{2}ah \text{ و مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$$



**مساحت لوزی:** اگر در یک لوزی قطر بزرگ و کوچک را به ترتیب با  $a$  و  $b$  نشان دهیم. خواهیم داشت:

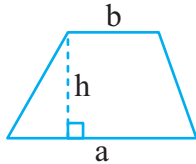
$$s = \frac{a \times b}{2} = \frac{1}{2}ab \text{ و مساحت لوزی} = \frac{\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}}{2}$$

**مساحت متوازی‌الاضلاع:** اگر در یک متوازی‌الاضلاع ارتفاع را با  $h$  و قاعده را با  $a$  نشان دهیم. خواهیم داشت:



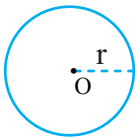
و  $s = a \times h = ah$  ارتفاع  $\times$  قاعده = مساحت متوازی‌الاضلاع

**مساحت ذوزنقه:** اگر در یک ذوزنقه قاعده‌ها به ترتیب با  $a$  و  $b$  و ارتفاع را با  $h$  نشان دهیم، خواهیم داشت:



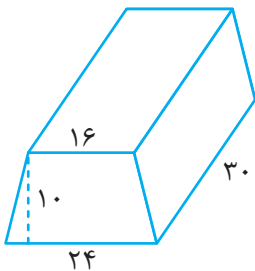
و  $s = \frac{(a+b) \times h}{2} = \frac{1}{2}(a+b)h$  ارتفاع  $\times$  مجموع دو قاعده  $\div 2$  = مساحت ذوزنقه

**مساحت دایره:** اگر در یک دایره شعاع را با  $r$  و عدد پی را با  $\pi$  نشان دهیم، خواهیم داشت:



و  $s = r \times r \times \pi = \pi r^2$  شعاع  $\times$  شعاع  $\times 3/14$  = مساحت دایره

**مثال ۵:** حجم شکل مقابل را محاسبه کنید:



$s = \frac{(16+24) \times 10}{2} = 200 \text{ cm}^2$

$v = s \times h = 200 \times 30 = 6000 \text{ cm}^3$



**نکته ۴:** مکعبی که طول هر یال آن  $a$  باشد حجم آن از رابطه  $v = a \times a \times a = a^3$  به دست می‌آید.



**مثال ۶:** حجم مکعبی که طول هر یال آن ۷ سانتی‌متر می‌باشد را به دست آورید:

$v = 7 \times 7 \times 7 = 343 \text{ cm}^3$



**نکته ۵:** اگر ابعاد مکعب مستطیلی به صورت  $a$  و  $b$  و  $c$  باشد، حجم آن از رابطه  $v = a \times b \times c$  به دست می‌آید.



**مثال ۷:** حجم مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۵ و ۷ دسی‌متر را به دست آورید:

$v = 3 \times 5 \times 7 = 105 \text{ dm}^3$



**نکته ۶:** حجم یک استوانه به شعاع قاعده  $r$  و ارتفاع  $h$  از رابطه  $v = \pi \times r \times r \times h = \pi r^2 h$  به دست می‌آید.



**مثال ۸:** حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱ متر و ارتفاع ۲ متر را به دست آورید:

$v = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi = 2 \times 3/14 = 6/7 \text{ m}^3$



نکته ۷ اگر طول ضلع مکعبی  $n$  برابر شود حجم آن  $n^3$  برابر می‌شود.



مثال ۹ اگر طول ضلع مکعبی را ۳ برابر کنیم حجم آن چند برابر می‌شود؟



برابر  $3 \times 3 \times 3 = 27$

پاسخ:



نکته ۸ برای بیان حجم از واحدهای مترمکعب، لیتر، سانتی‌متر مکعب، دسی‌متر مکعب، میلی‌متر مکعب و ... استفاده می‌شود که برای تبدیل این واحدها به هم، می‌توان از جدول زیر استفاده کرد:



۱ متر مکعب = ۱۰۰۰ لیتر	۱ سی‌سی = ۱۰۰۰ میلی‌متر مکعب	۱ لیتر = ۱۰۰۰ سانتی‌متر مکعب
۱ متر مکعب = ۱۰۰۰ دسی‌متر مکعب	۱ سی‌سی = ۱ سانتی‌متر مکعب	۱ لیتر = ۱۰۰۰ سی‌سی
۱ متر مکعب = ۱۰۰۰۰۰۰ سی‌سی	۱ سی‌سی = یک میلی‌لیتر	۱ لیتر = ۱ دسی‌متر مکعب
۱ متر مکعب = ۱۰۰۰۰۰۰ سانتی‌متر مکعب		۱ لیتر = ۱۰۰۰۰۰۰ میلی‌متر مکعب
		۱ لیتر = ۱۰۰۰ میلی‌لیتر

مثال ۱۰ حجم مکعبی به ضلع ۵۰ سانتی‌متر، چند دسی‌متر مکعب است؟



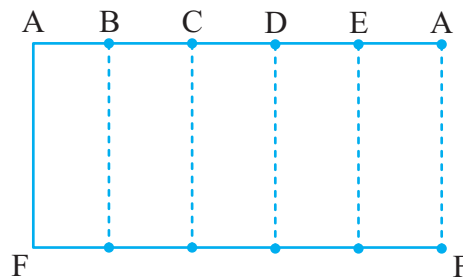
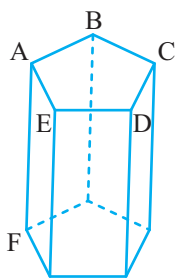
$$\text{حجم مکعب} = 50 \times 50 \times 50 = 125000 \text{ cm}^3$$

$$125000 \div 1000 = 125 \text{ دسی‌متر مکعب}$$

پاسخ:



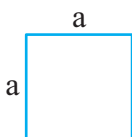
مساحت جانبی حجم‌های منشوری: منشور پنج‌پهلوی زیر را در نظر بگیرید که قاعده ندارد. این منشور را از روی یال AF می‌بریم و آن را روی صفحه می‌گسترانیم. شکلی که ساخته می‌شود با مساحت جانبی منشور مساوی است.



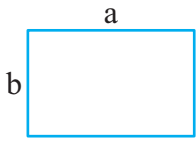
محاسبه مساحت جانبی منشور: برای محاسبه مساحت جانبی حجم‌های منشوری از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$s_{\text{جانبی}} = p \times h \quad \text{یا} \quad \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

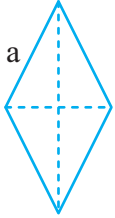
برای محاسبه مساحت جانبی حجم‌های منشوری نیاز به محاسبه محیط قاعده داریم. در زیر به یادآوری محیط اشکال هندسی می‌پردازیم:



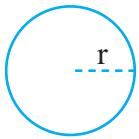
$$p = a \times 4 = 4a \quad \text{و} \quad 4 \times \text{یک ضلع} = \text{محیط مربع}$$



$p = 2(a + b)$  و  $2 \times (\text{مجموع طول و عرض}) = \text{محیط مستطیل}$

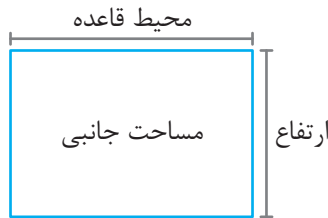
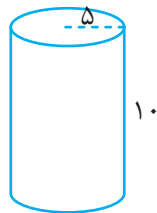


$p = a \times 4 = 4a$  و  $4 \times \text{یک ضلع} = \text{محیط لوزی}$



$p = 2\pi r$  و  $\text{عدد پی} \times \text{قطر} = \text{محیط دایره}$

**مثال ۱۱** مساحت جانبی استوانه‌ای به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر را محاسبه کنید:



$\text{محیط قاعده استوانه (دایره)} = 5 \times 2 \times 3.14 = 31.4 \text{ cm}^2$

**پاسخ:**



$\text{مساحت جانبی} = 31.4 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$

**مثال ۱۲** مساحت جانبی یک منشور پنج‌پهلوی که اندازه هر ضلع آن ۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۲ سانتی‌متر است را به دست آورید:



$p = \text{محیط قاعده} = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}$

$s = p.h = 10 \times 12 = 120 \text{ cm}^2$

**نکته ۹** مساحت جانبی یک مکعب که  $a$  اندازه یال آن است همواره از رابطه زیر به دست می‌آید:



$s_{\text{جانبی}} = 4 \times a \times a$

**مثال ۱۳** مساحت جانبی مکعبی که اندازه هر یال آن ۵ cm است را محاسبه کنید؟



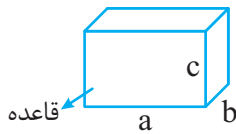
$\text{مساحت جانبی} = 4 \times 5 \times 5 = 100 \text{ cm}^2$

**پاسخ:**

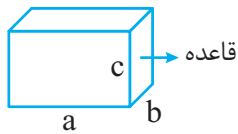




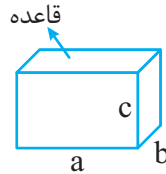
نکته ۱) در مکعب مستطیل مهم است که بدانیم قاعده چه ابعادی دارد پس با توجه به شکل‌های زیر برای مساحت جانبی سه حالت ایجاد می‌شود:



$$s_{\text{جانبی}} = 2(a+c) \times b$$



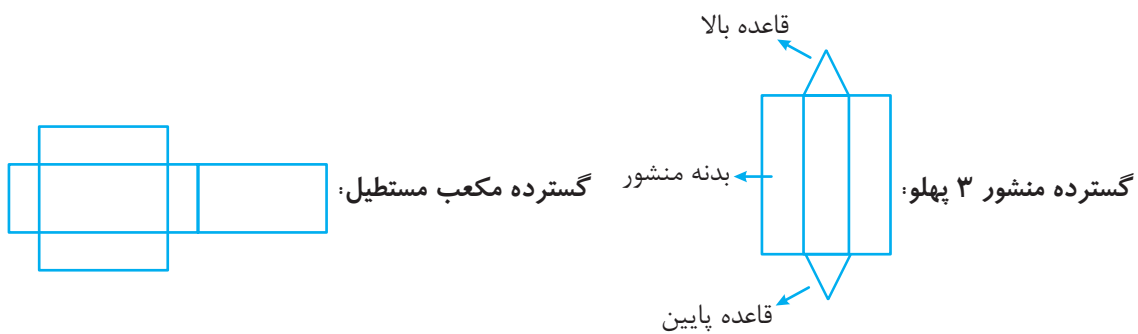
$$s_{\text{جانبی}} = 2(b+c) \times a$$



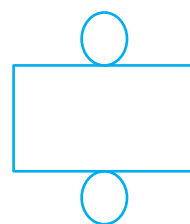
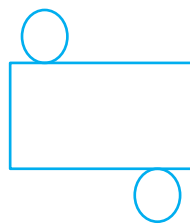
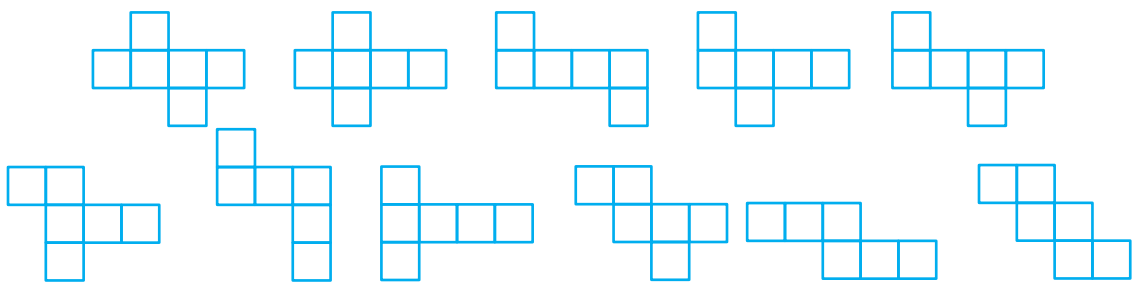
$$s_{\text{جانبی}} = 2(a+b) \times c$$

نکته ۲) بین همه مکعب مستطیل‌ها با مساحت جانبی ثابت، بیشترین حجم را مکعب دارد.

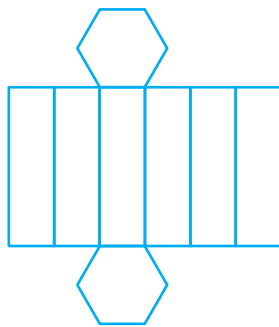
### گسترده مهم‌های منشوری:



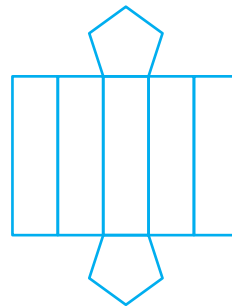
گسترده مکعب: شکل‌های مختلفی برای گسترده مکعب می‌توان در نظر گرفت:



گسترده استوانه:



گسترده منشور ۶ پهلو:

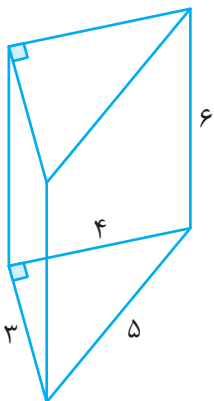


گسترده منشور ۵ پهلو:

**مساحت کل منشور** برای به دست آوردن مساحت کل یک منشور کافی است مساحت جانبی منشور را با مساحت دو قاعده جمع کرد.

$$\text{مساحت کل} = \text{مساحت جانبی منشور} + (\text{مساحت قاعده} \times 2)$$

**مثال ۱۴** در شکل مقابل مساحت کل منشور را محاسبه کنید: (واحدها بر حسب سانتی متر می باشند)



$$p = 4 + 3 + 5 = 12 \text{ cm}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 12 \times 6 = 72 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{جانبی}} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{جانبی}} = 72 + (2 \times 6) = 84 \text{ cm}^2$$



**نکته ۱۲** اگر ضلع مکعبی  $n$  برابر شود مساحت جانبی و مساحت کل آن  $n^2$  برابر و حجم آن  $n^3$  برابر می شود.

**مثال ۱۵** اگر ضلع مکعبی را سه برابر کنیم، حجم، مساحت جانبی و مساحت کل آن چند برابر می شود؟

برابر  $3 \times 3 = 9 =$  مساحت کل و مساحت جانبی

برابر  $3 \times 3 \times 3 = 27 =$  حجم

**مثال ۱۶** اگر اضلاع مکعبی را نصف کنیم، حجم و مساحت جانبی و مساحت کل آن چند برابر می شود؟

برابر  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  مساحت کل و مساحت جانبی

برابر  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  حجم

اگر طول و عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل عدد طبیعی باشند مساحت کل آن عددی زوج است.

هر مضرب طبیعی ۲، زوج است  $\rightarrow s_{\text{جانبی}} = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

حاصل ضرب مساحت های سه وجه متمایز یک مکعب مستطیل با مجذور حجم آن برابر است.

$$ab \times ac \times bc = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$$



**مثال ۱۷** مساحت وجه‌های یک مکعب مستطیل ۷، ۲۸ و ۲۵ سانتی‌متر مربع است. حجم مکعب مستطیل را حساب کنید:



پاسخ:



$$(abc)^2 = ab \times ac \times bc = 7 \times 28 \times 25 = 7^2 \times 5^2 \times 7^2 = (7 \times 5 \times 7)^2 \longrightarrow abc = 7 \times 5 \times 7 = 245 \text{ cm}^3$$

مکعب مستطیل‌های با حجم ثابت، وقتی کوچک‌ترین مساحت کل را دارند که مکعب باشند.

نکته ۱۵



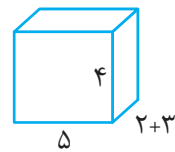
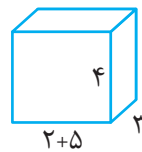
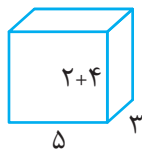
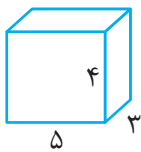
**نکته ۱۶** اگر بخواهیم عدد دلخواهی را به یکی از ابعاد مکعب مستطیل اضافه کنیم، کم‌ترین افزایش حجم زمانی حاصل می‌شود که آن عدد را به بزرگ‌ترین بعد اضافه کنید.



**مثال ۱۸** مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ دسی‌متر داریم. به کدام بعد آن ۲ دسی‌متر اضافه کنیم که حجم آن کم‌ترین افزایش را داشته باشد؟



پاسخ:



$$V = 3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ لیتر}$$

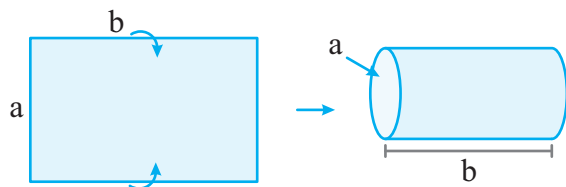
$$V = 3 \times 6 \times 5 = 90 \text{ لیتر}$$

$$V = 3 \times 4 \times 7 = 84 \text{ لیتر}$$

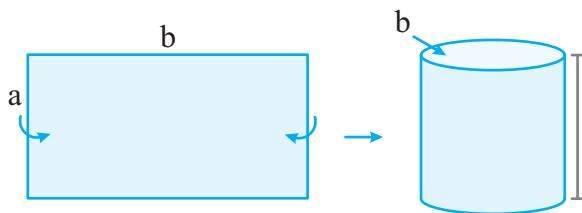
$$V = 5 \times 4 \times 5 = 100 \text{ لیتر}$$

اگر ۲ دسی‌متر به بعد بزرگ‌تر مکعب مستطیل یعنی ۵ دسی‌متر اضافه کنید حجم آن ۲۴ لیتر اضافه می‌شود که کم‌ترین افزایش حجم را دارد.

مهم و سطح:



اگر یک مستطیل به طول و عرض مشخص را از طول آن لوله کنیم طول مستطیل برابر با ارتفاع استوانه و عرض مستطیل برابر با محیط قاعده استوانه می‌باشد.



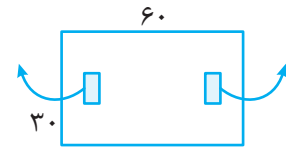
اگر یک مستطیل به طول و عرض مشخص را از عرض آن لوله کنیم عرض مستطیل برابر با ارتفاع استوانه و طول مستطیل برابر با محیط قاعده استوانه می‌باشد.

**مثال ۱۹** مستطیلی به ابعاد ۶۰ و ۳۰ سانتی‌متر را یک‌بار از طول و یک‌بار از عرض آن لوله می‌کنیم. حجم شکل حاصل را در دو حالت به دست آورده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید: ( $\pi \approx 3$ )



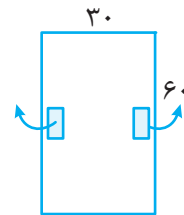
$$\text{محیط قاعده استوانه} = 60 \rightarrow 2\pi r = 60 \rightarrow 2 \times 3 \times r = 60 \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

$$v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 10 \times 10 \times 30 = 9000 \text{ cm}^3$$



$$\text{محیط قاعده استوانه} = 30 \rightarrow 2\pi r = 30 \rightarrow 2 \times 3 \times r = 30 \rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

$$v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 5 \times 5 \times 60 = 4500 \text{ cm}^3$$



حجم استوانه در حالت اول بیشتر از حالت دوم است در نتیجه اگر بخواهیم با یک مستطیل استوانه‌ای بسازیم که حجم آن بیشتر باشد باید ارتفاع منشور با عرض مستطیل برابر باشد.

**دوران و تشکیل حجم** با دوران یک سطح حول یک محور (خط) در فضا، حجم ساخته می‌شود. اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، استوانه تشکیل می‌شود که حجم‌های این دو حالت دوران، برابر نخواهند بود. (طول و عرض مستطیل برابر نیستند)

### نکته ۱۷



در حالت کلی آن ضلع مستطیل که حولش دوران انجام می‌شود، ارتفاع استوانه و ضلع دیگر، شعاع قاعده استوانه است.

**مثال ۲۰** مستطیل ABCD را یک‌بار حول طول و یک‌بار حول عرضش دوران داده و حجم شکل‌های حاصل از این دو دوران را حساب کنید: حجم‌های حاصل را با هم مقایسه کنید: ( $\pi \approx 3$ )



الف) دوران حول طول: استوانه‌ای به ارتفاع ۲۰ cm و شعاع قاعده ۱۰ cm ایجاد می‌گردد.  $v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 10 \times 10 \times 20 = 6000 \text{ cm}^3$

ب) دوران حول عرض: استوانه‌ای به ارتفاع ۱۰ cm و شعاع قاعده ۲۰ cm ایجاد می‌گردد.  $v = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 20 \times 20 \times 10 = 12000 \text{ cm}^3$

با توجه به حجم استوانه‌ها می‌توان نتیجه گرفت اگر مستطیلی را حول عرضش دوران دهیم حجم آن بیشتر خواهد شد.

نکته ۱۸



- ۱) از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول هر ضلع قائمه آن، مخروط به دست می آید.
- ۲) از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن دو مخروط، با قاعده یکسان و به هم چسبیده در قاعده به دست می آید.
- ۳) از دوران نیم دایره حول قطرش، کره به دست می آید.
- ۴) از دوران یک ربع دایره حول شعاع آن، نیم کره به دست می آید.
- ۵) از دوران لوزی حول هر قطر آن، دو مخروط برابر و به هم چسبیده در قاعده به دست می آید.

نکته ۱۹



اگر مستطیلی را به طول  $a$  و عرض  $b$  یک بار حول طول و یک بار حول عرض آن دوران دهیم، نسبت حجم و همچنین نسبت مساحت کل استوانه های ایجاد شده در دو حالت از روابط زیر به دست می آید:

$$\frac{\text{حجم طول ضلع } a}{\text{حجم طول ضلع } b} = \frac{V_a}{V_b} = \frac{a}{b} \quad \frac{\text{مساحت کل طول ضلع } a}{\text{مساحت کل طول ضلع } b} = \frac{S_a}{S_b} = \frac{b}{a}$$

مثال ۱۹ مستطیلی به ابعاد ۳ و ۵ را یک بار حول طول و یک بار حول عرضش دوران می دهیم.



الف) نسبت حجم جسم اول به حجم جسم دوم چقدر است؟

ب) نسبت مساحت کل جسم اول به مساحت کل جسم دوم چقدر است؟

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$$



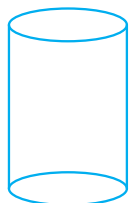
نکته ۲۰ اگر مستطیل را حول ضلع کوچک ترش (عرض آن) دوران دهیم، بزرگ ترین استوانه ساخته می شود.



نکته ۲۱ در صورتی که محیط قاعده و ارتفاع دو جسم منشوری با هم برابر باشند حجم جسمی بیش تر است که قاعده آن محور تقارن بیش تری داشته باشد، به عبارتی حجم جسمی بیش تر است که قاعده آن محور تقارن های بیشتری داشته باشد.



مثال ۲۱ در دو حجم منشوری زیر محیط قاعده برابر  $6/28$  سانتی متر و ارتفاع هر دو ۲ سانتی متر می باشد. حجم کدام یک بیش تر است؟

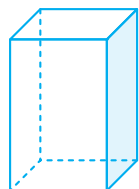


$$\text{قطر} = 6/28 \div 3/14 = 2 \text{ cm}$$

$$\text{محیط قاعده استوانه} = \text{قطر} \times 3/14 = 6/28$$

$$12/56 = 4 \times \text{یک ضلع} = \text{محیط قاعده مکعب مستطیل (مربع)}$$

$$\text{حجم استوانه} = 2 \times 2 \times 3/14 = 25/12$$



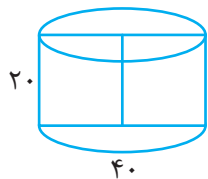
$$\text{یک ضلع} = 12/56 \div 4 = 3/14 \text{ cm}$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = 3/14 \times 3/14 \times 2 = 19/7192 \text{ cm}^3$$

همچنین می‌توان با توجه به نکته (۲۱)، گفت: حجم استوانه بیش‌تر از حجم مکعب مستطیل است. زیرا قاعده استوانه دایره است و بی‌شمار محور تقارن دارد ولی قاعده مکعب مستطیل بالا مربع است و چهار محور تقارن دارد.

**نکته ۲۲** زمانی که مستطیل را حول محوری که از وسط عرضش می‌گذرد دوران بدهیم، در این حالت طول برابر با ارتفاع استوانه و شعاع قاعده برابر نصف عرض می‌باشد.

**مثال ۲۳** مستطیلی به ابعاد ۴۰ و ۲۰ سانتی‌متر را حول پاره‌خطی که وسط طول‌های آن را به هم وصل می‌کند دوران می‌دهیم، حجم حاصل از این دوران را به دست آورید:



$$s = \pi r^2 = 3/14 \times 20 \times 20 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$v = s \cdot h = 1256 \times 20 = 25120 \text{ cm}^3$$

پاسخ:



از دوران ۳۶۰ درجه یک مستطیل حول طول یا عرضش یک استوانه کامل ایجاد می‌شود ولی اگر آن مستطیل را با کم‌تر از ۳۶۰ درجه دوران دهیم حجم حاصل را می‌توانیم با استفاده از تناسب محاسبه کنیم.

**مثال ۲۴** مستطیلی به طول ۵ سانتی‌متر و عرض ۴ سانتی‌متر را حول عرضش به اندازه ۳۰ درجه دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟ ( $\pi = 3$ )

پاسخ:



این حجم برای دوران ۳۶۰ درجه است  $\rightarrow 3000 \text{ cm}^3 = 75 \times 4 = \text{حجم}$  و  $75 \text{ cm}^2 = 3 \times 5 \times 5 = \text{مساحت قاعده}$

$$\frac{\text{درجه}}{\text{حجم}} = \frac{360}{3000} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{3000 \times 30}{360} = 25 \text{ cm}^3$$

**نکته ۲۵** اگر با تعدادی مکعب به ابعاد یک واحد، مکعب بزرگ‌ترین به ضلع  $n$  واحد بسازیم و سطح مکعب بزرگ را رنگ کنیم:

$$(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$$

تعداد مکعب‌هایی که رنگ نمی‌شوند:

$$6 \times (n-2) \times (n-2)$$

تعداد مکعب‌هایی که یک وجه آنها رنگ می‌شوند:

$$12 \times (n-2)$$

تعداد مکعب‌هایی که دو وجه آنها رنگ می‌شوند:

تا ۸

تعداد مکعب‌هایی که سه وجه آنها رنگ می‌شوند:

**مثال ۲۵** با ۱۲۵ مکعب کوچک یک مکعب بزرگ ساخته‌این. تمام وجوه آن را رنگ می‌زنیم و سپس مکعب‌ها را از هم جدا می‌کنیم. چند مکعب رنگی حداقل یک وجه رنگ شده دارند؟

**پاسخ:** برای این کار کافی است محاسبه کنیم چند مکعب اصلاً رنگ ندارند، بنابراین بقیه مکعب‌ها حداقل یک وجه رنگی دارند.



$$V = 125 \Rightarrow \text{ضلع مکعب} = 5 \Rightarrow n = 5$$

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ اصلاً رنگ نشده‌اند}$$

$$125 - 27 = 98$$

**نکته ۲۵:** برای برش مکعبی به ضلع  $n$  و تبدیل به مکعب‌هایی به ضلع یک، حداقل تعداد برش‌های لازم برابر است با:  $3 \times (n - 1)$ ، به شرط آن که امکان جابه‌جا کردن مکعب‌ها را نداشته باشیم.



**مثال ۲۶:** برای تبدیل مکعب  $5 \times 5 \times 5$  به مکعب‌های  $1 \times 1 \times 1$ ، حداقل چند برش لازم است؟

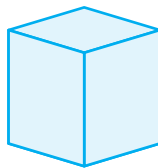


$$3 \times (5 - 1) = 12$$

**چندوجهی‌های منتظم:** یک چندوجهی را منتظم می‌گوییم هرگاه، وجه‌های آن، چندضلعی منتظم مساوی باشند. تنها ۵ چندوجهی منتظم وجود دارد که عبارتند از:



هشت وجهی منتظم



شش وجهی منتظم



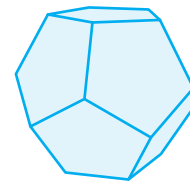
چهاروجهی منتظم

(با چهار وجه به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع) (با شش وجه مربع شکل) (با هشت وجه به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع)



بیست وجهی منتظم

(با بیست وجه به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع)



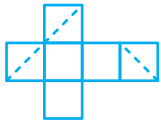
دوازده وجهی منتظم

(با دوازده وجه به شکل پنج ضلعی منتظم)

## آزمون شماره ۱۰



۱- یک مکعب توسط چاقو برش خورده است. در شکل زیر گسترده این مکعب نشان داده شده و محل برش با نقطه چین مشخص شده است. این مقطع چه شکلی دارد؟



- (۱) مستطیل (۲) مثلث قائم‌الزاویه (۳) مثلث متساوی‌الاضلاع (۴) مربع

۲- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) حجم‌های منشوری دارای یک قاعده می‌باشند.  
 (۲) حجم‌های هرمی یک نوع حجم غیرهندسی می‌باشند.  
 (۳) سطح مقطع یک منشور شش پهلو، یک شش ضلعی می‌باشد.  
 (۴) حجم‌های هندسی به سه دسته کروی و مخروطی و هرمی تقسیم می‌شوند.

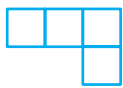
۳- دو مکعب مستطیل چوبی داریم. از گوشه یکی از آن دو، مکعبی به حجم یک سانتی‌متر مکعب جدا می‌کنیم، سپس هر دو مکعب مستطیل را رنگ می‌کنیم. مقدار رنگ مصرف شده برای کدام بیشتر است؟

- (۱) رنگ مصرفی برای هر دو مساوی است.  
 (۲) رنگ مصرفی در مکعب کامل بیشتر است.  
 (۳) رنگ مصرفی در مکعب ناقص بیشتر است.  
 (۴) رنگ مصرفی بستگی به ابعاد مکعب مستطیل دارد.

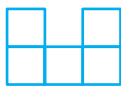
۴- تعداد یال‌های یک منشور چند برابر تعداد وجه‌های جانبی آن است؟

- (۱) یک برابر (۲) دو برابر (۳) سه برابر (۴) چهار برابر

۵- شکلی از مکعب‌های کوچک ساخته شده است و از سه جهت به صورت زیر دیده می‌شود، تعداد این مکعب‌ها حداقل چندتا است؟



بالا



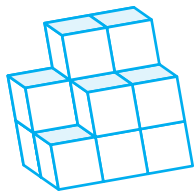
روبرو



راست

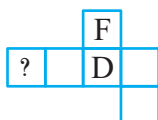
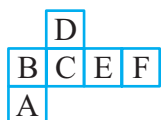
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۶- شکل مقابل چند مکعب کوچک کم دارد تا به یک مکعب کامل تبدیل شود؟



- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۷- شکل‌های داده شده هر دو گسترده یک مکعب هستند. به جای علامت سؤال چه حرفی قرار می‌گیرد؟



- (۱) E (۲) C (۳) A (۴) B



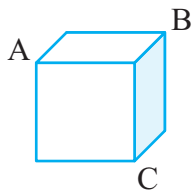
۸- با کدام یک از شکل‌های زیر می‌توان چهاروجهی منتظم ساخت؟

- (۱) مربع (۲) مثلث متساوی‌الساقین (۳) لوزی (۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

۹- اگر تمام ابعاد مکعبی را نصف کنیم، آن گاه حجم آن ..... حجم اولیه می‌شود.

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $\frac{1}{16}$

۱۰- می‌خواهیم یک مکعب را طوری برش بزنیم که از نقطه A, B, C بگذرد. شکل قاعده قسمت بریده شده در کدام گزینه آمده است؟



- (۱) مربع (۲) مثلث متساوی‌الاضلاع (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۱۱- درون یک کارتن ۶ جعبه به ابعاد ۱۸، ۱۲ و ۸ سانتی‌متر جای می‌گیرد. حجم این کارتن چند سانتی‌متر مکعب است؟

- (۱)  $2880 \text{ cm}^3$  (۲)  $10368 \text{ cm}^3$  (۳)  $1440 \text{ cm}^3$  (۴)  $1728 \text{ cm}^3$

۱۲- استخری به ابعاد ۲۰، ۸ و ۴ متر داریم. در صورتی که  $\frac{3}{4}$  این استخر آب داشته باشد چند لیتر دیگر باید در استخر آب بریزیم تا کاملاً پر شود؟

- (۱) ۶۴۰ لیتر (۲) ۱۶۰۰۰۰ لیتر (۳) ۴۸۰۰۰۰ لیتر (۴) ۴۸۰ لیتر

۱۳- ارتفاع مکعب مستطیلی را سه برابر می‌کنیم، حجم آن چند برابر می‌شود؟

- (۱) نه برابر (۲) شش برابر (۳) سه برابر (۴) بیست و هفت برابر

۱۴- مساحت کل مکعبی به ضلع a برابر است با:

- (۱)  $6a$  (۲)  $6a^2$  (۳)  $a^2$  (۴)  $a^3$

۱۵- حجم مکعبی ۲۷۰۰۰ لیتر است. مساحت کل آن چند مترمربع است؟

- (۱) ۱۶۲ (۲) ۵۴ (۳) ۸۱ (۴) ۲۷

۱۶- اگر شعاع قاعده استوانه‌ای نصف شود:

- (۱) حجم و سطح جانبی آن نصف می‌شود. (۲) حجم آن نصف و سطح جانبی آن ربع می‌شود.

- (۳) حجم و سطح جانبی آن ربع می‌شود. (۴) حجم آن ربع و سطح جانبی آن نصف می‌شود.

۱۷- اگر از شیر آبی که خوب بسته نشده است در هر ثانیه ۲ قطره آب بچکد و حجم هر قطره ۰/۵ سانتی‌متر مکعب باشد، در مدت ۵ ساعت چند لیتر آب به هدر می‌رود؟

- (۱)  $\frac{2}{4}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{2}{1}$  (۴)  $\frac{1}{8}$

۱۸- مستطیلی به طول  $10\text{cm}$  و عرض  $8\text{cm}$  را حول یکی از اضلاع آن دوران می‌دهیم. بیش‌ترین حجم ممکن چقدر است؟ ( $\pi \approx 3$ )

- (۱)  $2400\text{cm}^3$       (۲)  $2000\text{cm}^3$       (۳)  $2560\text{cm}^3$       (۴)  $2740\text{cm}^3$

۱۹- می‌خواهیم درون مکعب مستطیلی به ابعاد  $72$  و  $48$  و  $60$  را با چند مکعب پر کنیم. حداقل چند مکعب لازم است؟

- (۱)  $15$       (۲)  $30$       (۳)  $120$       (۴)  $960$

۲۰- با  $800$  کارتن مکعب شکل، بزرگ‌ترین مکعب ممکن را ساخته‌ایم. چند کارتن اضافه می‌آید؟

- (۱)  $71$       (۲)  $200$       (۳)  $81$       (۴)  $100$

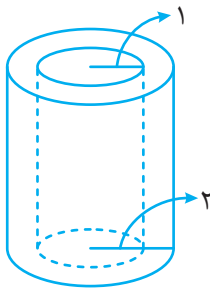
## آزمون شماره ۱۱



۱- ابعاد جعبه‌های ۷، ۶ و ۵ می‌باشد اگر مکعب‌هایی به ابعاد  $2 \times 2 \times 2$  را بخواهیم در این جعبه بچینیم حداکثر چند مکعب می‌توان در جعبه جای داد؟

- ۱۸ (۱)      ۱۵ (۲)      ۱۷ (۳)      ۲۶ (۴)

۲- دو استوانه به صورت مقابل داخل هم قرار دارد. نسبت مساحت‌های جانبی آنها برابر است با:



- ۴ (۱)      ۲ (۲)      ۲π (۳)      ۴ (۴)

اطلاعات مسأله کافی نیست.

۳- حاصل ضرب دو عدد  $-۵۶$  و حاصل جمع آنها  $۱۰-$  است. تفاضل دو عدد چیست؟

- $-۱۵$  (۱)       $۱۵$  (۲)       $۱۸$  (۳)       $-۲۰$  (۴)

$$\frac{-۴ + ۶ \times ۲ - ۵ \times ۳ - ۱}{۴ \times ۳ + ۲ \times (-۱) + ۳ \times (-۲)} = ?$$

۴- حاصل عبارت مقابل کدام است؟

- $-۲$  (۱)       $۱$  (۲)       $۲$  (۳)       $-۱$  (۴)

۵- اگر  $a = 2b$  و  $c = 3a$  باشد، آنگاه حاصل عبارت  $a + b + c$  بر حسب  $a$  کدام است؟

- $2a$  (۱)       $\frac{a-2}{a}$  (۲)       $\frac{a}{2}$  (۳)       $\frac{9a}{2}$  (۴)

۶- در معادله  $\frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.005x$  مقدار  $x$  با کدام گزینه برابر است؟

- $0.002$  (۱)       $\frac{24}{5}$  (۲)       $-20$  (۳)       $0.02$  (۴)

۷- قرینه عبارت  $(2x+1) - (x+3) - 3x$  ، کدام است؟

- $-6x+2$  (۱)       $4$  (۲)       $-6x-4$  (۳)       $2$  (۴)

۸- نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  روی خطی راست هستند و می‌دانیم  $\overline{AB} = 13$  و  $\overline{BC} = 11$  و  $\overline{CD} = 14$  و  $\overline{DA} = 12$  می‌باشد فاصله بین دورترین دو نقطه چقدر است؟

- $26$  (۱)       $24$  (۲)       $27$  (۳)       $25$  (۴)

۹- با توجه به ادعاهای زیر کدام گزینه درست است؟

ادعای اول: تمام مثلث‌ها با محیط ۷ و اندازه اضلاع طبیعی، متساوی‌الساقین هستند.

ادعای دوم: فقط دو مثلث با محیط ۹ و اندازه اضلاع طبیعی وجود دارد.

(۱) ادعای اول درست و ادعای دوم نادرست است.      (۲) ادعای اول و دوم هر دو درست است.

(۳) ادعای اول و دوم هر دو نادرست است.      (۴) ادعای اول نادرست و ادعای دوم درست است.

۱۰- در یک ضلعی منتظم اندازه زاویه تند بین دو نیمساز داخلی که از دو سر یک ضلع رسم می‌شوند چند درجه است؟

- (۱)  $64^\circ$  (۲)  $54^\circ$  (۳)  $72^\circ$  (۴)  $36^\circ$

۱۱- کدام جمله درست است؟

- (۱) ترکیب  $n$  انتقال پی‌درپی یک انتقال است.  
 (۲) ترکیب ۴ دوران متوالی همیشه یک دوران است.  
 (۳) ترکیب دو تقارن متوالی یک انتقال است.  
 (۴) ترکیب دو تقارن متوالی یک تقارن است.

۱۲- چند عدد اول ۲ رقمی داریم که هم رقم یکان و هم رقم دهگان آن عدد اول باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۸

۱۳- اگر  $a$  و  $b$  اعداد طبیعی باشند و  $a \times b = c$  آنگاه ..... .

- (۱)  $a$  و  $b$  مضرب‌های  $c$  هستند.  
 (۲)  $a$  و  $b$  شمارنده‌های  $c$  هستند.  
 (۳)  $c$  شمارنده  $a$  و  $b$  است.  
 (۴)  $c$  دارای ۲ شمارنده است.

۱۴- کوچک‌ترین عدد طبیعی که بر ۳ عدد اول متفاوت بخش‌پذیر باشد کدام است؟

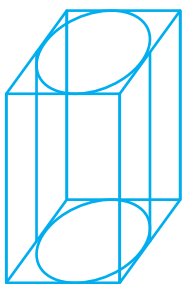
- (۱) ۲۴ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰ (۴) ۴۲

۱۵- اگر کوچک‌ترین عدد اول دورقمی را  $n$  و بزرگ‌ترین عدد مرکب دورقمی را  $m$  بنامیم حاصل  $m - n$  چند شمارنده اول دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶- مستطیلی به طول ۸cm و عرض ۴cm را حول عرضش به اندازه  $30^\circ$  درجه دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟ ( $\pi = 3$ )

- (۱)  $128\text{cm}^3$  (۲)  $64\text{cm}^3$  (۳)  $67\text{cm}^3$  (۴)  $120\text{cm}^3$



۱۷- استوانه‌ای در داخل منشوری با قاعده مربع شکل به ضلع  $10\text{cm}$  و ارتفاع  $16\text{cm}$  محاط شده است. حجم فضای بین استوانه و مکعب کدام است؟

- (۱)  $244\text{cm}^3$  (۲)  $344\text{cm}^3$   
 (۳)  $1079/6\text{cm}^3$  (۴)  $1097/6\text{cm}^3$

۱۸- اگر مساحت قاعده منشوری را ۵ برابر و ارتفاع آن را نصف کنیم، حجم آن چند درصد تغییر می‌کند؟

- (۱) ۱۲۵ درصد کاهش (۲)  $250^\circ$  درصد افزایش (۳)  $150^\circ$  درصد کاهش (۴)  $150^\circ$  درصد افزایش

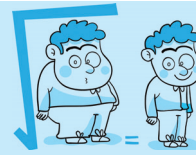
۱۹- کدام گزینه گسترده یک مکعب را نشان نمی‌دهد؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)

۲۰- اگر در ساختن مکعب مستطیلی که طول و عرض قاعده آن  $10$  و  $8$  سانتی‌متر است،  $376$  سانتی‌متر مربع مقوا به کار رفته باشد، ارتفاع این مکعب حداکثر چند سانتی‌متر است؟

- (۱)  $6\text{cm}$  (۲)  $16\text{cm}$  (۳)  $7\text{cm}$  (۴)  $9\text{cm}$

## پاسخ نامه آزمون شماره ۱۰



۱- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

با تجسم شکل و با توجه به اینکه سه ضلع شکل ایجاد شده با هم برابرند مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌شود.

۲- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

حجم‌های هندسی دارای دو قاعده می‌باشند.

حجم‌های هرمی یک نوع حجم هندسی می‌باشند.

سطح‌های هندسی به سه دسته منشوری و هرمی و مخروطی تقسیم می‌شوند.

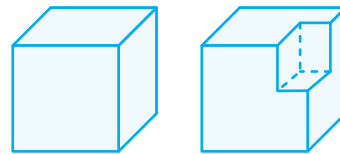
۳- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مساحت کل هر دو شکل

با هم برابر است پس

مقدار رنگ مصرفی برای

هر دو مساوی است.



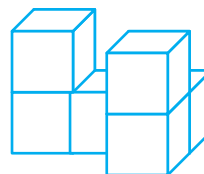
۴- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در یک منشور  $n$  پهلو داریم:

$$\frac{\text{تعداد یال‌ها}}{\text{تعداد وجه‌های جانبی}} = \frac{3n}{n} = 3$$

۵- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

شکل از ۶ مکعب تشکیل شده است.

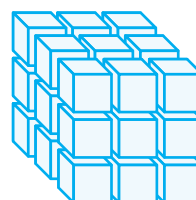


۶- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

طول کوچک‌ترین مکعبی که می‌توان ساخت ۳ می‌باشد. پس

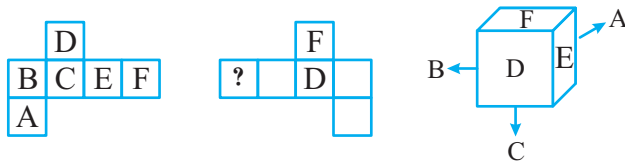
حجم آن باید ۲۷ باشد با توجه به اینکه شکل از ۱۳ مکعب

تشکیل شده به ۱۴ مکعب دیگر نیاز داریم.



۷- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

با توجه به شکل‌های داده شده  $(A, D)$ ,  $(F, C)$ ,  $(B, E)$  روبه‌روی هم قرار دارند در نتیجه به‌جای علامت سؤال حرف  $A$  قرار می‌گیرد.

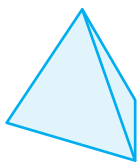


۸- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

کوچک‌ترین چندوجهی منتظم، چهاروجهی

منتظم است که هر وجه آن از مثلث

متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.



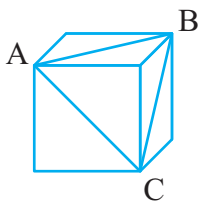
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a}{a \times a \times a} = \frac{1}{8}$$

۹- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۰- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

چون قطرهای هر وجه مکعب برابرند پس

مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌شود.



۱۱- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$(8 \times 18 \times 12) \times 6 = 10368 \text{ cm}^3$$

۱۲- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\text{حجم استخر} = 4 \times 8 \times 20 = 640 \text{ m}^3$$

$$640 \times 10000 = 6400000 \text{ لیتر}$$

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ حجم باقی‌مانده}$$

$$\frac{1}{4} \times 6400000 = 1600000 \text{ لیتر}$$

۱۳- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$a \times b \times c = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم اولیه}$$

$$a \times b \times 3a = 3(a \times b \times c) = \text{حجم ثانویه}$$

۱۴- گزینهی (۲) صحیح است.

راه حل اول:

مساحت دو قاعده + مساحت جانبی = مساحت کل مکعب

$$4a^2 + (2 \times a^2) = 6a^2$$

راه حل دوم:

$$\text{مساحت یک وجه} = a \times a = a^2$$

$$\text{مساحت هر شش وجه} = 6 \times a^2 = 6a^2$$

۱۵- گزینهی (۲) صحیح است.

$$27000 \div 1000 = 27 \text{ m}^3$$

$$\text{حجم مکعب} = 27 = a^3 \Rightarrow a = 3 \text{ m}$$

$$\text{مساحت کل مکعب} = 6a^2 = 6 \times 3^2 = 54 \text{ m}^2$$

۱۶- گزینهی (۴) صحیح است.

$$s_1 = 2\pi r h, \quad v_1 = \pi r^2 h$$

$$s_2 = 2\pi \frac{r}{4} h = \frac{r}{4} \text{ مساحت جانبی استوانه با شعاع } \frac{r}{4}$$

$$\Rightarrow s_2 = \pi r h \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} s_1$$

$$v = \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 h = \frac{1}{4} \pi r^2 h = \frac{1}{4} \times \overbrace{\pi r^2 h}^{v_1} = \frac{1}{4} v_1$$

۱۷- گزینهی (۴) صحیح است.

$$\text{ثانیه} = 3600 = 1 \text{ ساعت}$$

$$\text{ثانیه} = 18000 = 5 \times 3600 = 5 \text{ ساعت}$$

$$\frac{\text{زمان (ثانیه)}}{\text{حجم (سانتی متر مکعب)}} = \frac{1}{2 \times 0.05} = \frac{18000}{x}$$

$$x = 1800 \text{ cm}^3 \rightarrow 1800 \div 1000 = 1.8 \text{ لیتر}$$

۱۸- گزینهی (۱) صحیح است.

در دوران یک مستطیل، اگر آن را حول ضلع کوچک تر دوران دهیم، استوانه ایجاد شده حجم بیش تری خواهد داشت. یعنی ۸ ارتفاع استوانه و ۱۰ شعاع قاعده این استوانه می باشد. در نتیجه داریم:

$$\text{حجم} = 10 \times 10 \times 3 \times 8 = 2400 \text{ cm}^3$$

۱۹- گزینهی (۳) صحیح است.

ضلع بزرگ ترین مکعبی که می توانیم با آن مکعب مستطیل را پر کنیم باید بزرگ ترین شمارنده مشترک ابعاد مکعب مستطیل باشد.

$$12 = (60, 48, 72)$$

$$\frac{60 \times 48 \times 72}{12 \times 12 \times 12} = 120$$

۲۰- گزینهی (۱) صحیح است.

ابتدا ضلع مکعبی را پیدا می کنیم که اگر حجم آن را محاسبه کنیم، نزدیک ترین حجم را به ۸۰۰ واحد داشته باشد.

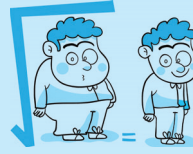
$$9 \times 9 \times 9 = 729 = \text{حجم مکعبی به ضلع } 9$$

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 = \text{حجم مکعبی به ضلع } 10$$

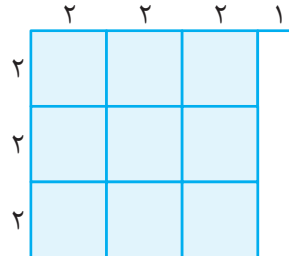
بزرگ ترین مکعبی که می توان با ۸۰۰ مکعب ساخت مکعبی به ضلع ۹ می باشد. در نتیجه:

$$71 = 800 - 729 = \text{تعداد کارتن های اضافه}$$

## پاسخنامه آزمون شماره ۱۱



۱- گزینه‌ی (۱) صحیح است.



اگر طول و عرض جعبه ۶ و ۷ باشند پس قاعده جعبه مستطیلی به شکل مقابل است.

پس در ردیف اول ۹ مکعب به ابعاد  $2 \times 2 \times 2$  جای می‌گیرد چون ارتفاع جعبه ۵ است، ۲ ردیف می‌توان در آن چید.

$$9 \times 2 = 18$$

۱۸ مکعب در آن جای می‌گیرد.

۲- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

ارتفاع  $\times$  محیط قاعده = مساحت جانبی

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{2 \times \pi \times 2 \times h}{2 \times \pi \times 1 \times h} = \frac{2}{1} = 2$$

۳- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

از بین ۸ جفت عدد که حاصل ضرب آنها  $-56$  است یعنی:

$$1 \times (-56) = (-1) \times (56) = 2 \times (-28) = (-2) \times 28$$

$$= 4 \times (-14) = (-4) \times 14 = (-7) \times 8 = 7 \times (-8) = -56$$

اعداد ۴ و  $-14$  دارای مجموع  $-10$  می‌باشند بنابراین داریم:

$$4 - (-14) = 4 + 14 = 18$$

۴- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\frac{-4 + 6 \times 2 - 5 \times 3 - 1}{\underbrace{4 \times 3}_{12} + \underbrace{2(-1)}_{-2} + \underbrace{3 \times (-2)}_{-6}}$$

$$= \frac{-4 + 12 - 15 - 1}{12 - 2 - 6} = \frac{8 - 16}{10 - 6} = \frac{-8}{4} = -2$$

۵- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$a = 2b \rightarrow b = \frac{1}{2}a, \quad c = 3a$$

$$\Rightarrow a + b + c = a + \frac{1}{2}a + 3a = \frac{2a + a + 6a}{2} = \frac{9a}{2}$$

۶- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$0.025 - \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.005x$$

با تبدیل عدد اعشاری به کسر خواهیم داشت:

$$\frac{25}{1000} - \frac{1}{1000} = \frac{5}{1000}x \Rightarrow 25 - 1 = 5x$$

$$\Rightarrow 5x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{5}$$

۷- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$3x - (x + 3) - (2x + 1) = 3x - x - 3 - 2x - 1 = -4$$

$$\Rightarrow (-4) = +4$$

۸- گزینه‌ی (۴) صحیح است.



با توجه به شکل می‌توان گزینه صحیح را مشخص کرد.

$$DB = 25$$

۹- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

در مورد ادعای اول، اضلاع مثلث می‌تواند (۲, ۲, ۳) و (۱, ۳, ۳) باشند.

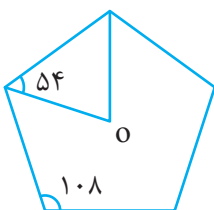
در مورد ادعای دوم اندازه اضلاع مثلث فقط اعداد (۳, ۳, ۳) یا (۱, ۴, ۴) یا (۲, ۳, ۴) می‌توانند باشند.

۱۰- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

هر زاویه داخلی ۵ضلعی منتظم  $108^\circ$  است، پس

$$\hat{O} = 180^\circ - (2 \times 54^\circ) = 72^\circ$$

خواهیم داشت:



$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h = 3/14 \times 5^2 \times 16 = 1256 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم منشور} = s \times h = 10^2 \times 16 = 1600 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم فضای بین استوانه و منشور} = 1600 - 1256$$

$$= 344 \text{ cm}^3$$

۱۸- گزینه‌ی (۴) صحیح است.

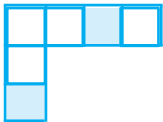
$$\text{حجم اولیه } v = s.h$$

$$\text{حجم ثانویه} = \Delta s \times \frac{h}{2} = \frac{\Delta}{2} \cdot s.h = 2/5 \times s.h$$

$$\text{درصد} = 2/5 \times 100 = 250$$

یعنی حجم آن ۲۵۰ درصد می‌شود و چون ۱۰۰ درصد آن مربوط به حجم اولیه بوده است بنابراین ۱۵۰ درصد افزایش داشته‌ایم.

۱۹- گزینه‌ی (۴) صحیح است.



در شکل روبه‌رو دو وجه رنگ شده روی هم منطبق شده و مکعب تشکیل نمی‌شود.

۲۰- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

ارتفاع این مکعب مستطیل را  $c$  فرض می‌کنیم.

مساحت کل:

$$= 2(bc + ac + ab) = 2(18c + 10c + 80) = 376$$

$$18c + 80 = \frac{376}{2} = 188$$

$$18c = 188 - 80 = 108 \Rightarrow c = \frac{108}{18} = 6 \text{ cm}$$

۱- گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اعداد عبارت‌اند از:

$$23, 37, 53, 73$$

۳- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

با یک مثال می‌توان گزینه‌های دیگر را رد کرد.

$$6 \times 8 = 48$$

مثال:

۴- گزینه‌ی (۳) صحیح است.

کوچک‌ترین سه عدد اول متفاوت ۲ و ۳ و ۵ می‌باشند که از حاصل ضرب آنها عدد ۳۰ به دست می‌آید.

۵- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\left. \begin{matrix} n = 11 \\ m = 99 \end{matrix} \right\} \Rightarrow m - n = 88 \Rightarrow 88 = 2 \times 2 \times 2 \times 11$$

۱۱ و ۲: شمارنده‌های اول ۸۸

۶- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\text{مساحت قاعده} = 3 \times 8 \times 8 = 192$$

$$\text{حجم} = 192 \times 4 = 768$$

این حجم برای دوران ۳۶۰ درجه است.

$$\frac{\text{درجه}}{\text{حجم}} = \frac{360}{768} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{768 \times 30}{360} = 64 \text{ cm}^3$$

۷- گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۰ = ضلع مربع = قطر قاعده استوانه

$$\Rightarrow \text{شعاع قاعده} = 5 \text{ cm}$$

