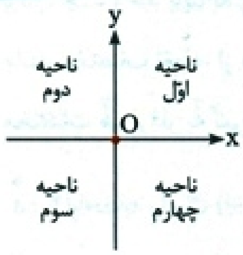
فصل پنجم

بردار و مختصات

صفحهٔ مختصات

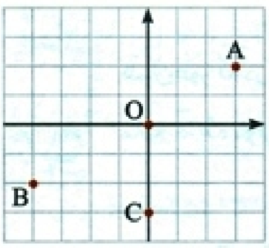


صفحهٔ مختصات از دو محور عمود بر هم تشکیل شده است. محور افقی را محور طول‌ها یا x و محور عمودی را محور عرض‌ها یا y می‌نامیم.

محلّ برخورد دو محور را مبدأ مختصات می‌گوییم و آن را با حرف O نمایش می‌دهیم.

محورها، صفحهٔ مختصات را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند.

مختصات یک نقطه



هر نقطه در صفحهٔ مختصات دارای یک آدرس است که به آن، مختصات نقطه گفته می‌شود. آدرس هر نقطه، از دو قسمت تشکیل شده است $\begin{bmatrix}\text{طول}\\\text{عرض}\end{bmatrix}$. برای پیدا کردن طول یک نقطه، باید از مبدأ مختصات به سمت راست (+) یا به سمت چپ (−) حرکت کنیم و سپس برای پیدا کردن عرض نقطه، به سمت بالا (+) یا پایین (−) حرکت کنیم.

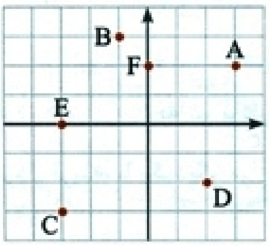
در شکل بالا، برای رفتن به نقطهٔ A، از مبدأ مختصات ابتدا ۳ واحد به راست (+) و سپس ۲ واحد به بالا (+) حرکت می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}+۳\\+۲\end{bmatrix}$.

برای رفتن به نقطهٔ B، از مبدأ مختصات ابتدا ۴ واحد به چپ (−) و سپس ۲ واحد به پایین (−) حرکت می‌کنیم $B=\begin{bmatrix}-۴\\-۲\end{bmatrix}$.

هم‌چنین برای رفتن به نقطهٔ C، هیچ واحدی به چپ و راست حرکت نمی‌کنیم (۰) و کافی است ۳ واحد به پایین (−) حرکت کنیم $C=\begin{bmatrix}۰\\-۳\end{bmatrix}$.

ویژگی نقاط:

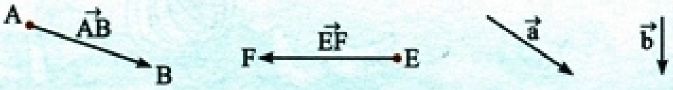
- نقاطی که در ناحیهٔ اوّل قرار دارند، دارای طول و عرض مثبت هستند؛ مانند: $A=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$



- نقاطی که در ناحیهٔ دوم قرار دارند، دارای طول منفی و عرض مثبت هستند؛ مانند: $B=\begin{bmatrix}-۱\\+۳\end{bmatrix}$
- نقاطی که در ناحیهٔ سوم قرار دارند، دارای طول و عرض منفی هستند؛ مانند: $C=\begin{bmatrix}-۳\\-۳\end{bmatrix}$
- نقاطی که در ناحیهٔ چهارم قرار دارند، دارای طول مثبت و عرض منفی هستند؛ مانند: $D=\begin{bmatrix}+۲\\-۲\end{bmatrix}$
- نقاطی که روی محور طول‌ها هستند، عرضشان صفر است؛ مانند: $E=\begin{bmatrix}-۳\\۰\end{bmatrix}$
- نقاطی که روی محور عرض‌ها هستند، طولشان صفر است؛ مانند: $F=\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$.

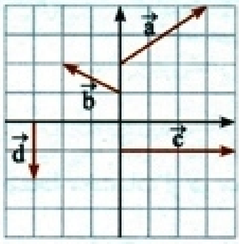
بردار: برای نمایش حرکت، نیرو و ... از بردار استفاده می‌کنیم. هر بردار، دارای یک **نقطهٔ ابتدایی** و یک **نقطهٔ انتهایی** است.

نام‌گذاری بردارها: بردارها را به دو روش نام‌گذاری می‌کنند.



الف) با استفاده از نام نقاط ابتدایی و انتهایی

ب) با یک حرف کوچک انگلیسی



مختصات یک بردار: مختصات یک بردار، نشان می‌دهد که برای رفتن از نقطهٔ ابتدایی به نقطهٔ انتهایی بردار، چند واحد باید به راست یا چپ و چند واحد به بالا یا پایین برویم؛ در واقع مختصات هر بردار، مانند مختصات نقطه، از دو قسمت طول و عرض تشکیل شده است $\begin{bmatrix}\text{طول}\\ \text{عرض}\end{bmatrix}$. با توجه به شکل مقابل، مختصات هر بردار به شرح زیر است:

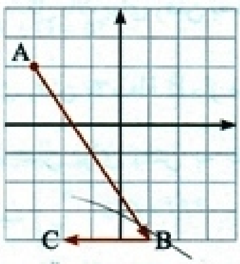
$\vec{a}$: ۳ واحد به راست (+) و ۲ واحد به بالا (+): $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{b}$: ۲ واحد به چپ (−) و یک واحد به بالا (+): $\vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

$\vec{c}$: ۴ واحد به راست (+) و هیچ واحد به بالا یا پایین (۰): $\vec{c}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{d}$: هیچ واحد به راست یا چپ (۰) و ۲ واحد به پایین (−): $\vec{d}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$

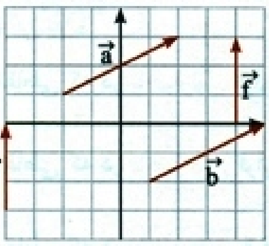
نکته

همان‌طور که در شکل بالا مشاهده کردید، بردارهایی مانند $\vec{c}$ که موازی محور طول‌ها هستند، **عرضشان** صفر است و بردارهایی مانند $\vec{d}$ که موازی محور عرض‌ها هستند، **طولشان** صفر است.

مثال ۱ از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$، بردار $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix}$ را رسم می‌کنیم تا به نقطهٔ B برسیم و سپس از نقطهٔ B به‌اندازهٔ بردار $\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$ حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ C برسیم. شکل را رسم کنید و مختصات نقطه‌های B و C را بنویسید.

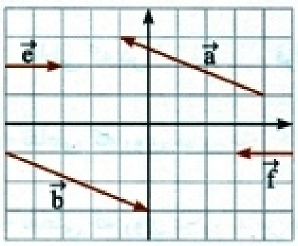


بردار $\begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix}$، یعنی ۴ تا به راست و ۶ تا به پایین. اگر از A به‌اندازهٔ $\begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix}$ حرکت کنیم، به نقطهٔ $B=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$ می‌رسیم. حال اگر از B به‌اندازهٔ $\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$ (یعنی ۳ تا به چپ و هیچی به بالا و پایین) حرکت کنیم، به نقطهٔ $\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$ می‌رسیم.



بردارهای مساوی: به دو بردار که مختصات آن‌ها **یکسان** باشد، **بردارهای مساوی** می‌گوییم. در حقیقت دو بردار مساوی، **موازی**، **هم‌جهت** و **هم‌اندازه** هستند؛ مانند:

$\vec{a}=\vec{b}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{e}=\vec{f}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$



بردارهای قرینه: به دو بردار که مختصات آن‌ها **قرینهٔ** یک‌دیگر است، **بردارهای قرینه** می‌گوییم. دو بردار قرینه، با یک‌دیگر **موازی** و **هم‌اندازه**، اما **خلاف جهت** هم هستند؛ مانند:

$\vec{a}=-\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a}=\begin{bmatrix}-5\\+2\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}+5\\-2\end{bmatrix}$

$\vec{e}=-\vec{f}$ $\qquad$ $\vec{e}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{f}=\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

جمع و تفریق مختصات‌ها: برای جمع و تفریق مختصات‌ها، کافی است طول‌ها را با هم و عرض‌ها را نیز با هم جمع و تفریق کنیم.

مثال ۲ حاصل بردارهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵+۱۲ \\ -۷+۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۷ \\ -۳ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶-(+۴) \\ ۳-(-۵) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶-۴ \\ ۳+۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۰ \\ ۸ \end{bmatrix}$

نکته

با استفاده از معادله می‌توان مقادیر مجهول را در مختصات‌ها پیدا کرد. برای این کار، یک معادله برای طول‌ها و یک معادله برای عرض‌ها می‌نویسیم.

مثال ۳ در هر تساوی، مقدار x و y را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴+۳y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲x-۵ \\ -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ +۲۸ \end{bmatrix}$

معادلهٔ طول‌ها: $۳-(۲x-۵)=۱۲ \Rightarrow ۳-۲x+۵=۱۲ \Rightarrow -۲x=۱۲-۵-۳=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{-۲}=-۲$

معادلهٔ عرض‌ها: $۴+۳y-(-۶)=+۲۸ \Rightarrow ۴+۳y+۶=+۲۸ \Rightarrow ۳y=+۲۸-۴-۶ \Rightarrow ۳y=+۱۸ \Rightarrow y=\frac{۱۸}{۳}=۶$

ب) $\begin{bmatrix} ۲a-۸ \\ ۵b-۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳a-۲ \\ +۱۱ \end{bmatrix}$

معادلهٔ طول‌ها: $۲a-۸+۵=۳a-۲ \Rightarrow ۲a-۳a=-۲+۸-۵ \Rightarrow -۱a=+۱ \Rightarrow a=\frac{+۱}{-۱}=-۱$

معادلهٔ عرض‌ها: $۵b-۶+(-۳)=+۱۱ \Rightarrow ۵b-۶-۳=۱۱ \Rightarrow ۵b=۱۱+۶+۳ \Rightarrow ۵b=۲۰ \Rightarrow b=\frac{۲۰}{۵}=۴$

رابطهٔ مهم در بردارها

در هر بردار، یک رابطهٔ مهم بین مختصات نقطهٔ ابتدایی، مختصات بردار و مختصات نقطهٔ انتهایی بردار وجود دارد.

مختصات نقطهٔ انتهایی = مختصات بردار + مختصات نقطهٔ ابتدایی

مثال ۴ از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$، بردار $\begin{bmatrix} -۷ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را رسم می‌کنیم؛ به چه نقطه‌ای می‌رسیم؟

$\underset{\text{ابتدا}}{\begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}} + \underset{\text{مختصات}}{\begin{bmatrix} -۷ \\ ۲ \end{bmatrix}} = \underset{\text{انتها}}{\begin{bmatrix} -۳ \\ -۱ \end{bmatrix}}$

نکته

اگر مختصات نقطهٔ ابتدایی یا مختصات بردار را نداشتیم، با نوشتن مختصات مجهول و حل معادله می‌توانیم آن را به‌دست آوریم.

مثال ۵ از نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ با چه برداری حرکت کنیم تا به نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ برسیم؟ در این‌جا مختصات بردار، مجهول است. آن را $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ فرض می‌کنیم.

$\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$

معادلهٔ طول‌ها: $-۴+x=۲ \Rightarrow x=۲+۴=۶$

معادلهٔ عرض‌ها: $۳+y=-۱ \Rightarrow y=-۱-۳=-۴$

$\Rightarrow$ بردار $= \begin{bmatrix} ۶ \\ -۴ \end{bmatrix}$

مثال ۶ از چه نقطه‌ای با بردار $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$ حرکت کنیم تا به نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$ برسیم؟ در این‌جا مختصات نقطهٔ ابتدایی مجهول است. آن را $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ فرض می‌کنیم.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow$

معادلهٔ طول‌ها: $x+(-۴)=۰ \Rightarrow x-۴=۰ \Rightarrow x=+۴$

معادلهٔ عرض‌ها: $y+۰=-۲ \Rightarrow y=-۲$

$\Rightarrow$ بردار $= \begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$

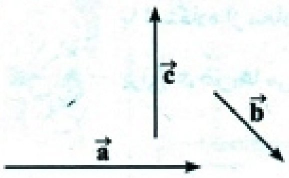
جمع بردارها روی شکل

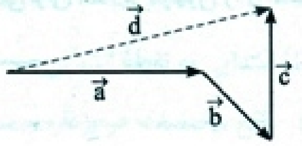
برای جمع بردارها روی شکل، از چندین روش می‌توان استفاده کرد که در این‌جا دو روش آن را می‌آموزیم.

الف) روش جمع متوالی (پشت سر هم)   ب) روش متوازی‌الاضلاع

روش جمع متوالی: در این روش، بردارها را پشت سر هم رسم کرده و از ابتدای اوّلین بردار به انتهای آخرین بردار رسم می‌کنیم.

مثال ۷ بردار برآیند (مجموع) بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را رسم کنید.

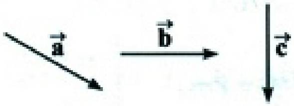




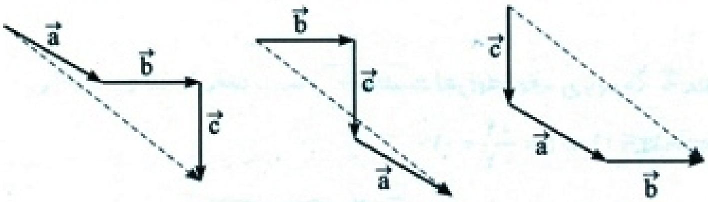
$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

نکته در جمع بردارها به روش متوالی، ترتیب رسم بردارها اهمیتی ندارد.

مثال ۸ بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با سه ترتیب مختلف پشت سر هم رسم کنید و بردار مجموع آن‌ها را بکشید.

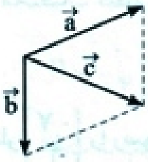


مشاهده می‌کنید که بردار مجموع هر سه حالت، یکسان است.



روش متوازی‌الاضلاع: در این روش که معمولاً برای دو بردار استفاده می‌شود، بردارها را از یک نقطه رسم می‌کنیم و سپس یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهیم. اگر قطر متوازی‌الاضلاع را از همان نقطهٔ ابتدایی دو بردار رسم کنیم، این قطر برابر با مجموع دو بردار است.

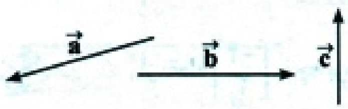
مثال ۹ بردار مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را رسم کنید.



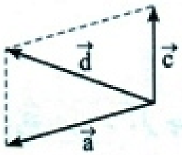
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

تذکر: اگر بخواهیم سه بردار را به روش متوازی‌الاضلاع با هم جمع کنیم، ابتدا دو بردار از آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم (تفاوتی نمی‌کند که کدام دو بردار را انتخاب کنیم) و بردار به‌دست‌آمده را با بردار سوم جمع می‌کنیم.

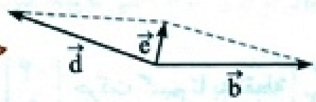
مثال ۱۰ جمع بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به روش متوازی‌الاضلاع جمع کنید.



ابتدا دو بردار انتخاب می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم (مثلاً $\vec{a}$ و $\vec{c}$) و سپس بردار جدید را با بردار b جمع می‌کنیم.



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$ →

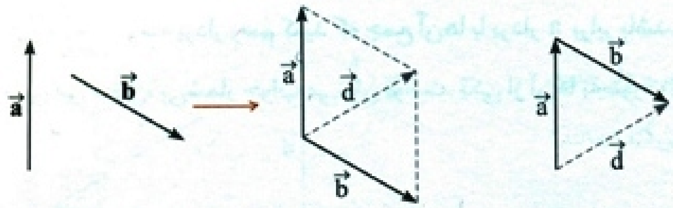


$\vec{e} = \underbrace{\vec{d}}_{\vec{a}+\vec{c}} + \vec{b} \Rightarrow \vec{e} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$

تذکر: از هر روشی که استفاده کنیم، همواره پاسخ یکسان خواهد بود.

مثال ۱۱ جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دو روش انجام دهید.

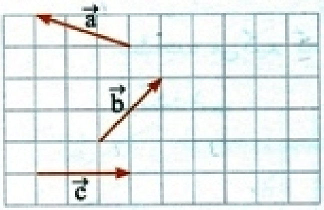
مشاهده می‌کنید در هر دو شکل، بردارهای $\vec{d}$ با هم برابرند.



نکته

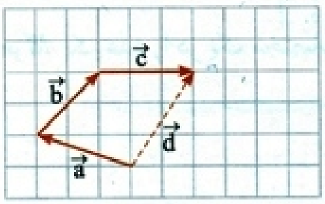
اگر مختصات‌های بردارها را با هم جمع کنیم، مختصات بردار مجموع به‌دست می‌آید.

مثال ۱۲ در شکل روبه‌رو، سه بردار را به هر روشی که دوست دارید، جمع کنید و برای شکل ایجادشده، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



چون روش متوالی به‌مراتب ساده‌تر است، از این روش استفاده می‌کنیم. هم‌چنین برای جمع مختصاتی بردارها، باید مختصات سه بردار را داشته باشیم.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}-۳\\ ۱\end{bmatrix},\quad \vec{b}=\begin{bmatrix}۲\\ ۲\end{bmatrix},\quad \vec{c}=\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix}$$



جمع برداری: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$

جمع مختصاتی: $\begin{bmatrix}-۳\\ ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\ ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$

مثال ۱۳ جمع سه بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}۴\\ -۳\end{bmatrix}$، $\vec{b}=\begin{bmatrix}۵\\ -۲\end{bmatrix}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}۰\\ ۴\end{bmatrix}$ برابر با بردار $\vec{d}$ است. مختصات بردار d را محاسبه کنید.

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{bmatrix}۴\\ -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\ -۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹\\ -۱\end{bmatrix}$$

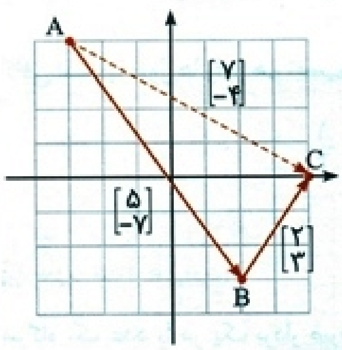
مثال ۱۴ جمع بردارهای $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۳\\ -۲\end{bmatrix}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}۷\\ ۱\end{bmatrix}$ برابر با بردار $\vec{d}=\begin{bmatrix}-۶\\ ۱\end{bmatrix}$ شده است. مختصات بردار b را بنویسید.

به‌جای مختصات $\vec{b}$، $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ قرار می‌دهیم و با حل معادله، x و y را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}\Rightarrow\begin{bmatrix}-۳\\ -۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۷\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\ ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{معادلهٔ طول‌ها: } -۳+x+۷=-۶\Rightarrow x=-۶+۳-۷=-۱۰\\ \text{معادلهٔ عرض‌ها: } -۲+y+۱=۱\Rightarrow y=۱+۲-۱=۲\end{cases}\Rightarrow\vec{b}=\begin{bmatrix}-۱۰\\ ۲\end{bmatrix}$$

مثال ۱۵ از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۳\\ ۴\end{bmatrix}$ به‌اندازهٔ بردار $\begin{bmatrix}۵\\ -۷\end{bmatrix}$ حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ B برسیم، سپس از نقطهٔ B به‌اندازهٔ بردار $\begin{bmatrix}۲\\ +۳\end{bmatrix}$ حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ C برسیم:

الف) مختصات B و C را پیدا کنید.



این‌گونه سؤالات را هم روی شکل و هم بدون شکل می‌توان پاسخ داد.

$$A=\begin{bmatrix}-۳\\ ۴\end{bmatrix}\xrightarrow{+\begin{bmatrix}۵\\ -۷\end{bmatrix}}B=\begin{bmatrix}+۲\\ -۳\end{bmatrix}$$

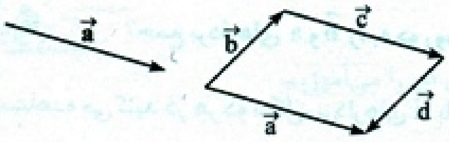
$$B=\begin{bmatrix}+۲\\ -۳\end{bmatrix}\xrightarrow{+\begin{bmatrix}۲\\ +۳\end{bmatrix}}C=\begin{bmatrix}+۴\\ ۰\end{bmatrix}$$

ب) با چه برداری به‌طور مستقیم می‌توانیم از A به C برویم؟

برای این‌که از A به‌طور مستقیم به C برویم، کافی است که به‌اندازهٔ مجموع ۲ بردار حرکت کنیم.

$$\begin{bmatrix}۵\\ -۷\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\ +۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\ -۴\end{bmatrix}$$

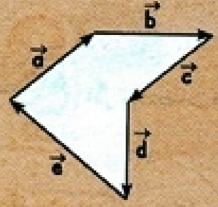
مثال ۱۶ سه بردار رسم کنید که جمع آن‌ها با بردار $\vec{a}$ برابر باشد.



برای این سؤال، بی‌شمار جواب می‌توان نوشت. یکی از آن‌ها به‌صورت روبه‌رو است:

نکته

اگر چند بردار متوالی را رسم کنیم، به‌صورتی که یک حلقهٔ بسته ایجاد کنند و انتهای آخرین بردار، به ابتدای اولین بردار برسد، جمع این بردارها برابر با صفر خواهد بود زیرا در کل هیچ جابه‌جایی صورت نگرفته است (به نقطهٔ شروع بازگشته‌ایم.) مانند:



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{0}$$

مشاهده می‌کنید که در شکل، از ابتدای بردار $\vec{a}$ شروع کرده‌ایم و پس از طی چند بردار، دوباره به همان نقطهٔ شروع برگشته‌ایم.

ضرب عدد در مختصات

هرگاه یک عدد را در یک مختصات ضرب کنیم، عدد موردنظر، هم در **طول** و هم در **عرض** ضرب می‌شود؛ مانند:

الف) $4\times\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\times5\\4\times(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\-8\end{bmatrix}$

ب) $-3\times\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\times3\\-3\times(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\+6\end{bmatrix}$

ج) $\frac{1}{4}\times\begin{bmatrix}-12\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\times\left(\frac{-12}{1}\right)\\\frac{1}{4}\times\frac{8}{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$

مثال ۱۷ حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

اعداد را در مختصات‌ها ضرب می‌کنیم، سپس حاصل‌ها را با هم جمع و تفریق می‌کنیم.

الف) $-2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\times4\\-2\times5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\times(-6)\\3\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-18\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-26\\-7\end{bmatrix}$

ب) $\frac{2}{3}\begin{bmatrix}9\\-6\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\times\frac{9}{1}\\\frac{2}{3}\times\left(-\frac{6}{1}\right)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}\\\frac{1}{2}\times\left(\frac{-2}{1}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-2\\-4-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$

مثال ۱۸ در جاهای خالی، عدد مناسب قرار دهید

الف) $\boxed{}\times\begin{bmatrix}-8\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+24\\-9\end{bmatrix}$

ب) $\boxed{}\times\begin{bmatrix}-16\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$

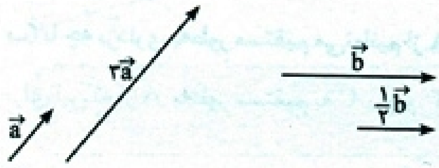
کافی است یا طول‌ها را بر هم تقسیم کنیم، یا عرض‌ها را بر هم تقسیم کنیم. (در هر صورت، جواب یکسان به‌دست می‌آید.)

الف) $\boxed{}=\begin{cases}(+24)\div(-8)=-3\\-9\div(+3)=-3\end{cases}$

ب) $\boxed{}=\begin{cases}-4\div(-16)=\frac{-4}{-16}=\frac{1}{4}\\3\div12=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}\end{cases}$

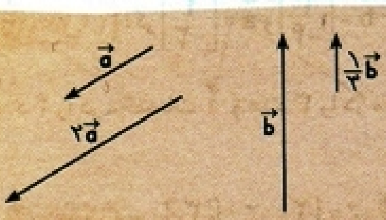
ضرب عدد در بردار

هرگاه یک عدد را در یک بردار ضرب کنیم، اندازهٔ بردار به نسبت عدد تغییر می‌کند؛ مثلاً اگر برداری را در ۳ ضرب کنیم، اندازه‌اش ۳ برابر می‌شود، یا اگر برداری را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم، اندازه‌اش نصف می‌شود؛ مانند:

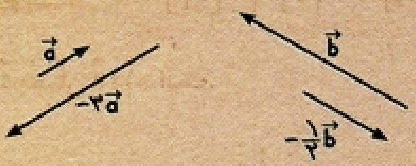


نکته

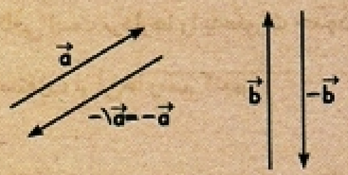
۱) اگر یک بردار را در یک عدد مثبت (+) ضرب کنیم، بردار جدید، موازی و هم‌جهت با بردار اوّل خواهد بود و فقط اندازهٔ آن تغییر می‌کند؛ مانند:



۲) اگر یک بردار را در یک عدد منفی (-) ضرب کنیم، بردار جدید، موازی، ولی خلاف جهت بردار اوّل خواهد بود؛ مانند:



۳) با توجه به آن‌چه گفته شد برای این‌که قرینهٔ یک بردار را رسم کنیم، کافی است بردار را در ۱- ضرب کنیم. (بردارهای قرینه موازی، هم‌اندازه ولی خلاف جهت یک‌دیگر هستند)؛ مانند:



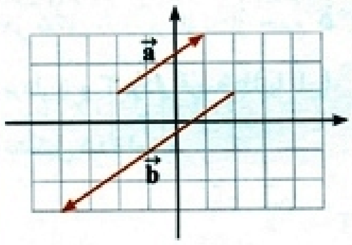
۴) از روی مختصات دو بردار، می‌توان رابطهٔ بین آن‌ها را پیدا کرد.

مثال ۱۹ در هر قسمت، رابطهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بنویسید.

الف) $\vec{a}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ ، $\vec{b}=\begin{bmatrix}-10\\+6\end{bmatrix} \longrightarrow \vec{a}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix} \xrightarrow{\times -2} \vec{b}=\begin{bmatrix}-10\\+6\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{b}=-2\times\vec{a}$

ب) $\vec{a}=\begin{bmatrix}-15\\6\end{bmatrix}$ ، $\vec{b}=\begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix} \longrightarrow \vec{a}=\begin{bmatrix}-15\\6\end{bmatrix} \xrightarrow{\div 3} \vec{b}=\begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{b}=\vec{a}\div 3=\frac{1}{3}\vec{a}$

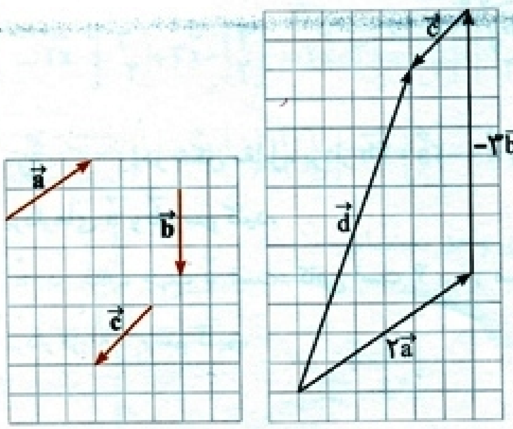
مثال ۲۰ در شکل زیر، رابطهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بنویسید.



با توجه به شکل $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}-6\\-4\end{bmatrix}$ است، پس:

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{\times -2} \vec{b}=\begin{bmatrix}-6\\-4\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{b}=-2\times\vec{a}$$

مثال ۲۱ با توجه به بردارهای شکل زیر، بردار $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ را رسم کنید.



ابتدا مختصات بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را می‌نویسیم و از روی آن، بردارهای $2\vec{a}$ و $-3\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\Rightarrow 2\vec{a}=\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{b}=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}\Rightarrow -3\vec{b}=\begin{bmatrix}0\\+9\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{c}=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=\overbrace{\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}}^{2\vec{a}}+\overbrace{\begin{bmatrix}0\\+9\end{bmatrix}}^{-3\vec{b}}+\overbrace{\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}}^{\vec{c}}\Rightarrow \vec{d}=\begin{bmatrix}4\\11\end{bmatrix}$$

مثال۲۲ اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ را به‌دست آورید.

عدد ۲ را در مختصات $\vec{a}$ و عدد ۳ را در مختصات $\vec{b}$ ضرب می‌کنیم.

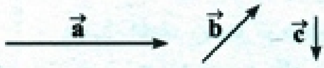
$$\vec{c}=2\times\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}-3\times\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9\\-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-9\\-6\underbrace{-(-12)}_{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\+6\end{bmatrix}$$

مثال۲۳ اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ ، $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$ باشد، مختصات بردار $\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ را به‌دست آورید.

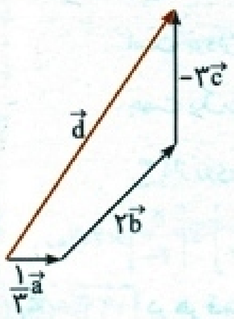
$-\vec{a}$ همان $-1\times\vec{a}$ است.

$$\vec{d}=-1\times\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}+2\times\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}-3\times\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\+2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15\\-3\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{d}=\begin{bmatrix}-3+4-15\\+2+0\underbrace{-(-3)}_{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14\\+5\end{bmatrix}$$

مثال۲۴ با توجه به بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، بردار $\vec{d}=\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ را رسم کنید.

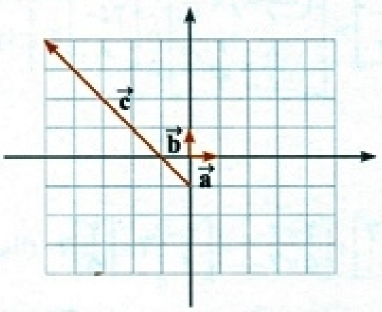


کافی است بردارها را به‌صورت حدودی رسم کنیم و آن‌ها را پشت سر هم رسم کنیم تا بردار $\vec{d}$ را با استفاده از آن‌ها رسم کنیم.

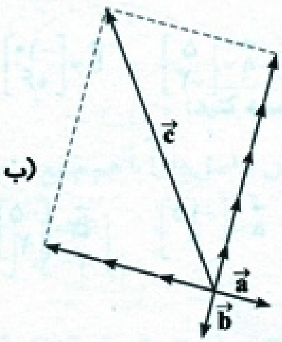


مثال۲۵ در هر شکل، بردار $\vec{c}$ را بر حسب بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

(الف)

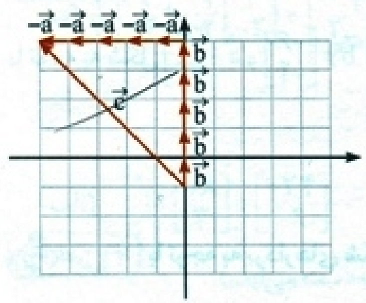


(ب)



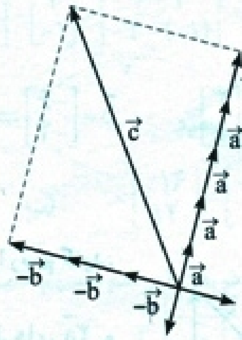
در شکل (الف) بردار $\vec{c}$ ، برابر با ۵ بردار b و ۵ بردار قرینهٔ $\vec{a}$ (یا $-\vec{a}$) می‌باشد.

$\vec{c}=5\vec{b}-5\vec{a}$

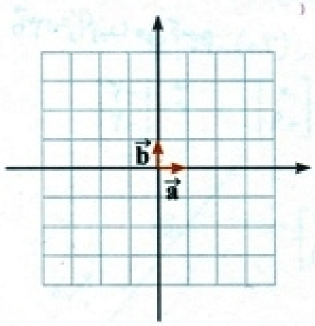


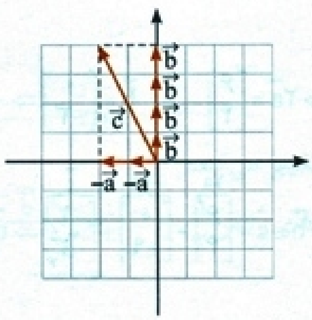
در شکل (ب) بردار c از جمع ۵ بردار a و ۳ بردار قرینهٔ $\vec{b}$ (یا $-\vec{b}$) تشکیل شده است.

$\vec{c}=5\vec{a}-3\vec{b}$

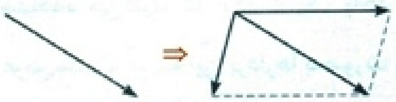


مثال۲۶ در شکل مقابل، بردار $\vec{c}=-2\vec{a}+4\vec{b}$ را با توجه به بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رسم کنید.





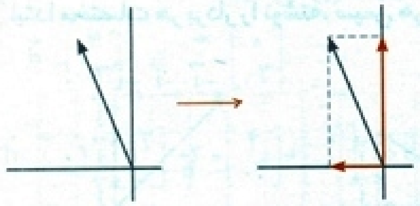
$-\vec{a}$ در خلاف جهت $\vec{a}$ است. کافی است ۴ بردار مساوی $\vec{b}$ و ۲ بردار قرینهٔ $\vec{a}$ رسم کنیم.

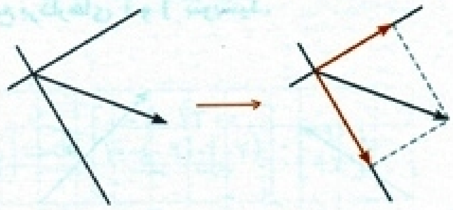


تجزیهٔ یک بردار: قبلاً آموختیم که به روش متوازی‌الاضلاع، جمع دو بردار را انجام دهیم. تجزیهٔ یک بردار، در واقع تبدیل یک بردار به دو بردار است که مجموع آن‌ها برابر با همان بردار اوّلیه باشد.

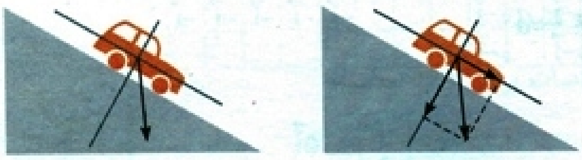
تجزیهٔ یک بردار روی محورها: برای تجزیهٔ یک بردار روی دو محور دلخواه، کافی است با استفاده از رأس بردار و دو خط، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل دهیم. اضلاع این متوازی‌الاضلاع، همان بردارهای تجزیه هستند.

مثال ۲۷ هر بردار را روی دو محور رسم‌شده، تجزیه کنید.





مثال ۲۸ نیروی وزن اتومبیل زیر را روی دو امتداد داده‌شده، تجزیه کنید.



مانند مثال قبل، با استفاده از رأس بردار و دو خطِ رسم‌شده، یک متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم.

معادلات مختصاتی

گاهی در یک تساوی مختصاتی، مختصات یک بردار مجهول است (معمولاً آن را با $\vec{x}$ یا $\vec{a}$ یا ... نمایش می‌دهیم). در حلّ معادلات مختصاتی، دقیقاً مانند معادلات معمولی عمل می‌کنیم، یعنی ابتدا مختصات‌های مجهول را به یک سمت و مختصات‌هایی را که مجهول نیستند، در سمت دیگر تساوی جمع می‌کنیم. (هر مختصاتی که جابه‌جا می‌شود، علامت آن عوض می‌شود.)

مثال ۲۹ در هر یک از معادله‌های زیر، مختصات بردار x را پیدا کنید.

الف) $\vec{x}+\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\+۵\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{x}=\begin{bmatrix}-۴\\+۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{x}=\begin{bmatrix}-۴-۵\\+۵\underbrace{-(-۳)}_{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\+۸\end{bmatrix}$

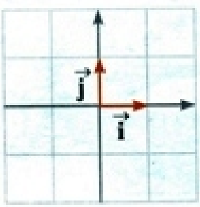
ب) $۳\vec{x}+\begin{bmatrix}۲\\-۴\end{bmatrix}=\vec{x}+\begin{bmatrix}۶\\۰\end{bmatrix}\Rightarrow۳\vec{x}-\vec{x}=\begin{bmatrix}۶\\۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\-۴\end{bmatrix}\Rightarrow۲\vec{x}=\begin{bmatrix}۶-۲\\۰\underbrace{-(-۴)}_{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\+۴\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{x}=\begin{bmatrix}۴\div۲\\۴\div۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}-۳\vec{x}=\begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}-\vec{x}\Rightarrow-۳\vec{x}+\vec{x}=\begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}\Rightarrow-۲\vec{x}=\begin{bmatrix}۲-۴\\-۵\underbrace{-(-۵)}_{+}\end{bmatrix}\Rightarrow-۲\vec{x}=\begin{bmatrix}-۲\\۰\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{x}=\begin{bmatrix}-۲\div(-۲)\\۰\div(-۲)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$

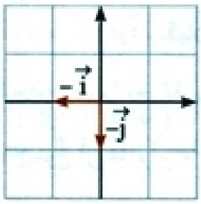
د) $۲\vec{x}-\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}=۳\vec{x}-\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}\Rightarrow۲\vec{x}-۳\vec{x}=-\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}\Rightarrow-۱\vec{x}=\begin{bmatrix}-۴\\-۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}\Rightarrow-۱\vec{x}=\begin{bmatrix}-۴+۳\\-۲-۴\end{bmatrix}$

$\Rightarrow-۱\vec{x}=\begin{bmatrix}-۱\\-۶\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{x}=\begin{bmatrix}-۱\div(-۱)\\-۶\div(-۱)\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{x}=\begin{bmatrix}۱\\۶\end{bmatrix}$

بردارهای واحد مختصاتی (بردارهای یکّه): دو بردار رسم‌شده در شکل روبه‌رو را بردارهای واحد مختصاتی می‌گوییم.



$\vec{i}=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ $\quad$ $\vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$

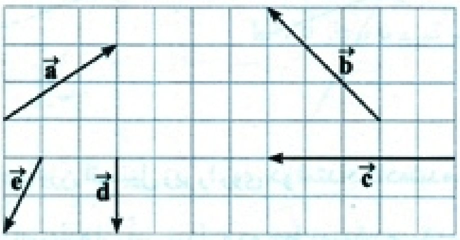


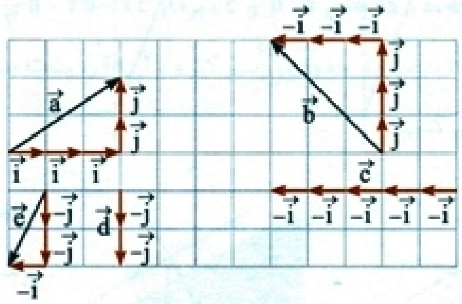
مشاهده می‌کنید که بردار i یک واحد در جهت مثبت طول‌ها و بردار j یک واحد در جهت مثبت عرض‌هاست. قرینهٔ این بردارها به‌صورت زیر می‌باشد:

$$-\vec{i}=\begin{bmatrix}-۱\\ ۰\end{bmatrix} \qquad -\vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\ -۱\end{bmatrix}$$

در مثال‌های قبل آموختیم که هر بردار را می‌توان به‌صورت جمع چندین بردار عمودی و افقی نوشت، بنابراین می‌توان هر بردار را به‌صورت جمع تعدادی بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نوشت.

مثال ۳۰ **ابتدا مختصات هر بردار را نوشته، سپس هر بردار را به‌صورت جمع بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.**





$\vec{a}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}=۳\vec{i}+۲\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۳\\ ۳\end{bmatrix}=-۳\vec{i}+۳\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{c}=\begin{bmatrix}-۵\\ ۰\end{bmatrix}=-۵\vec{i}$

$\vec{d}=\begin{bmatrix}۰\\ -۲\end{bmatrix}=-۲\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{e}=\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}=-\vec{i}-۲\vec{j}$

نوشتن مختصات با استفاده از $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بدون رسم شکل: در مثال قبل، مشاهده کردید که می‌توان مختصات هر بردار را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نوشت. برای این کار، نیازی نیست شکل را رسم کنیم، بلکه با استفاده از مختصات بردار، می‌توانیم آن را به‌صورت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسیم. طول بردار مقدار $\vec{i}$ یا $-\vec{i}$ و عرض بردار، مقدار $\vec{j}$ یا $-\vec{j}$ را نشان می‌دهد. (اگر طول یا عرض صفر بود، برای آن $\vec{i}$ یا $\vec{j}$ نمی‌نویسیم.)

مثال ۳۱ **مختصات هر بردار را به‌صورت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.**

الف) $\vec{a}=\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}=+۳\vec{i}+۵\vec{j}$ $\qquad$ ب) $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۴\\ +۲\end{bmatrix}=-۴\vec{i}+۲\vec{j}$ $\qquad$ ج) $\vec{c}=\begin{bmatrix}-۳\\ -۶\end{bmatrix}=-۳\vec{i}-۶\vec{j}$

د) $\vec{d}=\begin{bmatrix}۴\\ ۰\end{bmatrix}=۴\vec{i}$ $\qquad$ هـ) $\vec{e}=\begin{bmatrix}۰\\ -۳\end{bmatrix}=-۳\vec{j}$

تبدیل مختصات از $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به مختصات معمولی: اگر بخواهیم مختصات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به مختصات معمولی تبدیل کنیم، کافی است تعداد $\vec{i}$ ها را برای طول و تعداد $\vec{j}$ ها را برای عرض بنویسیم (اگر $\vec{i}$ یا $\vec{j}$ وجود نداشت، به‌جای آن، درون مختصات، صفر می‌نویسیم.)

مثال ۳۲ **هر مختصات را به‌صورت معمولی بنویسید.**

الف) $\vec{a}=۵\vec{i}+۲\vec{j}=\begin{bmatrix}۵\\ ۲\end{bmatrix}$ $\qquad$ ب) $\vec{b}=-۳\vec{i}+۴\vec{j}=\begin{bmatrix}-۳\\ +۴\end{bmatrix}$ $\qquad$ ج) $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}$

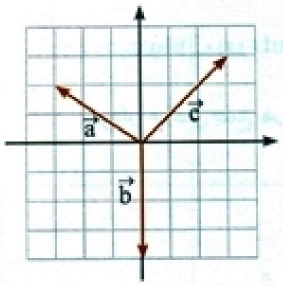
د) $\vec{d}=-۴\vec{i}=\begin{bmatrix}-۴\\ ۰\end{bmatrix}$ $\qquad$ هـ) $\vec{e}=۷\vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\ ۷\end{bmatrix}$

تذکر:
برای رسم برداری که مختصات آن به‌صورت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ است، ابتدا مختصات آن را به‌صورت معمولی می‌نویسیم، سپس آن را رسم می‌کنیم.

مثال ۳۳ بردارهای زیر را در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$\vec{a}=-۳\vec{i}+۲\vec{j} \quad , \quad \vec{b}=-۴\vec{j} \quad , \quad \vec{c}=۳\vec{i}+۳\vec{j}$

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-۳\\ ۲\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{b}=\begin{bmatrix}۰\\ -۴\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{c}=\begin{bmatrix}۳\\ ۳\end{bmatrix}$



مثال ۳۴ اگر $\vec{a}=-۲\vec{i}+۵\vec{j}$ ، $\vec{b}=۴\vec{i}-۳\vec{j}$ و $\vec{c}=-۲\vec{j}$ باشد، مختصات بردار $\vec{d}=۲\vec{a}-۳\vec{b}+\vec{c}$ را بنویسید.

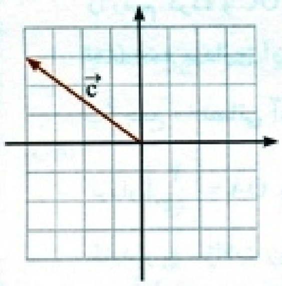
ابتدا هر بردار را با مختصات معمولی می‌نویسیم، سپس مختصات آن‌ها را در رابطه جایگذاری می‌کنیم.

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۵\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{b}=\begin{bmatrix}۴\\ -۳\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{c}=\begin{bmatrix}۰\\ -۲\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{d}=۲\vec{a}-۳\vec{b}+\vec{c}=۲\times\begin{bmatrix}-۲\\ ۵\end{bmatrix}-۳\times\begin{bmatrix}۴\\ -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۲\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{d}=\begin{bmatrix}-۴\\ ۱۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱۲\\ -۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۲\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{d}=\begin{bmatrix}-۴-۱۲+۰\\ ۱۰\underbrace{-(-۹)}_{+}\underbrace{+(-۲)}_{-}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۶\\ ۱۷\end{bmatrix}$$

مثال ۳۵ اگر $\vec{a}=-\vec{i}+۳\vec{j}$ و $\vec{b}=۲\vec{i}+۳\vec{j}$ باشد، بردار $\vec{c}=۲\vec{a}-\vec{b}$ را رسم کنید.

ابتدا مختصات بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌صورت معمولی می‌نویسیم، سپس مختصات بردار $\vec{c}$ را محاسبه کرده و در نهایت بردار $\vec{c}$ را رسم می‌کنیم.



$\vec{a}=\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{b}=\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$

$$\vec{c}=۲\vec{a}-\vec{b}=۲\times\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\end{bmatrix}-۱\times\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۶\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲-۲\\ ۶-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴\\ ۳\end{bmatrix}$$

تذکر: در حلّ معادلات مختصاتی، بهتر است مختصات‌های $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به مختصات معمولی تبدیل کنیم.

مثال ۳۶ در معادلهٔ زیر، مختصات $\vec{x}$ را به‌دست آورید.

$$۵\vec{i}-۲\vec{j}+۲\vec{x}=۴\begin{bmatrix}۵\\ -۳\end{bmatrix}-۳\vec{i}$$

ابتدا مختصات‌های $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به مختصات معمولی تبدیل می‌کنیم.

$$۵\vec{i}-۲\vec{j}+۲\vec{x}=۴\begin{bmatrix}۵\\ -۳\end{bmatrix}-۳\vec{i} \Rightarrow \begin{bmatrix}۵\\ -۲\end{bmatrix}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}۲۰\\ -۱۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix} \Rightarrow ۲\vec{x}=\begin{bmatrix}۲۰\\ -۱۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۵\\ -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲\vec{x}=\begin{bmatrix}۲۰-۳-۵\\ -۱۲-۰\underbrace{-(-۲)}_{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲\\ -۱۰\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix}۱۲\div۲\\ -۱۰\div۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\ -۵\end{bmatrix}$$

مثال ۳۷ اگر $\vec{a}=۲\vec{i}-۲\vec{j}$ و $\vec{b}=۳\vec{i}+۴\vec{j}$ باشد، در معادلهٔ زیر، مختصات بردار $\vec{x}$ را محاسبه کنید.

$$۳\vec{x}-۲\vec{a}=۳\vec{b}+\vec{x}+۵\vec{i}$$

$\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\ -۲\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۳\\ ۴\end{bmatrix}$ است، پس:

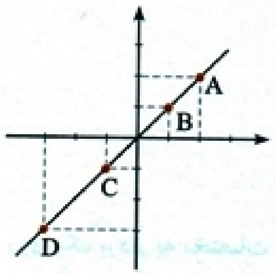
$$۳\vec{x}-۲\begin{bmatrix}۲\\ -۲\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۳\\ ۴\end{bmatrix}+\vec{x}+\begin{bmatrix}۵\\ ۰\end{bmatrix} \Rightarrow ۳\vec{x}-\begin{bmatrix}۴\\ -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹\\ ۱۲\end{bmatrix}+\vec{x}+\begin{bmatrix}۵\\ ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳\vec{x}-\vec{x}=\begin{bmatrix}۹\\ ۱۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\\ -۴\end{bmatrix} \Rightarrow ۲\vec{x}=\begin{bmatrix}۹+۵+۴\\ ۱۲+۰+(-۴)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۸\\ ۸\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix}۱۸\div۲\\ ۸\div۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹\\ ۴\end{bmatrix}$$

مختصات و بردار

مختصات نقطهٔ روی محورها: هر نقطه‌ای که روی محور طول‌ها قرار دارد، عرض آن صفر است؛ مانند $\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ و هر نقطه‌ای که روی محور عرض‌ها قرار دارد، طول آن صفر است؛ مانند: $\begin{bmatrix}۰\\-۲\end{bmatrix}$

نیم‌سازها

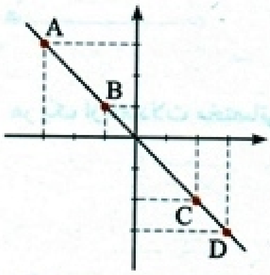


خط‌هایی هستند که ۴ ناحیهٔ مختصاتی را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کنند.

در صفحهٔ مختصات، ۲ نیم‌ساز وجود دارد.

نیم‌ساز ناحیهٔ اوّل و سوم: این نیم‌ساز هر یک از ناحیه‌های اوّل و سوم را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر نقطه‌ای که روی نیم‌ساز ناحیهٔ اوّل و سوم قرار داشته باشد، طول و عرض آن با هم مساوی است؛ مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix} \text{ و } D=\begin{bmatrix}-۳\\-۳\end{bmatrix}$$



نیم‌ساز ناحیهٔ دوم و چهارم: این نیم‌ساز، هر یک از ناحیه‌های دوم و چهارم را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر نقطه‌ای که روی این نیم‌ساز قرار داشته باشد، طول و عرض آن با هم قرینه است؛ مانند:

$$B=\begin{bmatrix}-۱\\+۱\end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix}+۲\\-۲\end{bmatrix}$$

نکته

هر گاه نقطه‌ای روی نیم‌ساز اوّل و سوم یا نیم‌ساز دوم و چهارم قرار بگیرد، فاصلهٔ آن از هر دو محور به یک اندازه است. (یعنی اگر فاصلهٔ آن از محور طول‌ها مثلاً ۲ سانتی‌متر باشد، فاصله‌اش از محور عرض‌ها هم ۲ سانتی‌متر است.)

قرینهٔ نقطه نسبت به محورها و نیم‌سازها: برای به‌دست آوردن قرینهٔ هر نقطه نسبت به محورها و نیم‌سازها، از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم:

الف) قرینه نسبت به محور طول‌ها: فقط عرض نقطه قرینه می‌شود؛ مانند: $\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}$

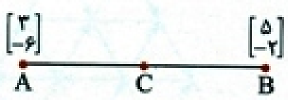
ب) قرینه نسبت به محور عرض‌ها: فقط طول نقطه قرینه می‌شود؛ مانند: $\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}۵\\۲\end{bmatrix}$

ج) قرینه نسبت به نیم‌ساز اوّل و سوم: جای طول و عرض عوض می‌شود؛ مانند: $\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}$

د) قرینه نسبت به نیم‌ساز دوم و چهارم: جای طول و عرض عوض می‌شود و هر دو قرینه می‌شوند؛ مانند: $\begin{bmatrix}-۵\\۲\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-۲\\۵\end{bmatrix}$

مختصات وسط یک پاره‌خط

اگر نقاط A و B دو سر یک پاره‌خط باشند، مختصات نقطهٔ C (وسط پاره‌خط) برابر با میانگین مختصات‌های A و B است.



$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}\frac{۳+۵}{۲}\\ \frac{-۶+(-۲)}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۸}{۲}\\ \frac{-۸}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\-۴\end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر

اگر بخواهیم قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به نقطهٔ B به‌دست آوریم، کافی است مختصات B را ۲ برابر کنیم و مختصات A را از آن کم کنیم.

مثال ۱ قرینهٔ نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix}$ را نسبت به نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ به‌دست آورید.

$$۲\times\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۸ \\ +۷ \end{bmatrix}$$

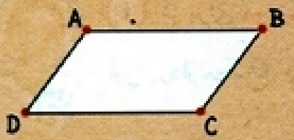
نکته

۱) برای به‌دست آوردن قرینهٔ یک نقطه نسبت به مبدأ مختصات $\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)$، کافی است طول و عرض نقطه را قرینه کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} -۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۲) در هر متوازی‌الاضلاع، برای مختصات چهار رأس، رابطهٔ زیر برقرار است:

A+C=B+D



فاصلهٔ دو نقطه: برای به‌دست آوردن فاصلهٔ دو نقطه از هم‌دیگر، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{فاصلهٔ دو نقطه}=\sqrt{(\text{اختلاف طول‌ها})^{۲}+(\text{اختلاف عرض‌ها})^{۲}}$$

(مهم نیست طول کدام نقطه را منهای طول نقطهٔ دیگر کنیم.)

مثال ۲ فاصلهٔ دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۶ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۱ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

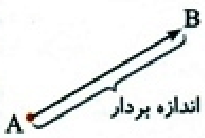
$$\sqrt{\underbrace{(۴-۱۶)}_{-۱۲}{}^{۲}+\underbrace{(-۶-(-۱))}_{-۵}{}^{۲}}=\sqrt{(-۱۲)^{۲}+(-۵)^{۲}}=\sqrt{۱۴۴+۲۵}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

دو بردار هم‌سنگ: بردارهایی هستند که کاملاً با هم مساوی‌اند، یعنی هم‌جهت، موازی و هم‌اندازه هستند. مختصات دو بردار هم‌سنگ، با هم مساوی است.

دو بردار قرینه: دو بردار هستند که با هم موازی و هم‌اندازه، اما خلاف جهت هم هستند.

در دو بردار قرینه، مختصات‌ها با هم قرینه هستند؛ مانند: $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$

اندازهٔ یک بردار: به فاصلهٔ نقطه‌های ابتدایی و انتهایی یک بردار، اندازهٔ یک بردار می‌گویند.



مثال ۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$ باشد، اندازهٔ بردار AB چه‌قدر است؟

کافی است فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را به‌دست آوریم.

$$\sqrt{(۵-(-۱))^{۲}+(۴-(-۴))^{۲}}=\sqrt{۶^{۲}+۸^{۲}}=\sqrt{۳۶+۶۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

نکته

اگر برداری را n برابر کنیم، اندازهٔ آن هم n برابر می‌شود؛ مثلاً اگر برداری را ۳ برابر کنیم، اندازهٔ آن هم ۳ برابر می‌شود.

بردارهای موازی محورها و نیم‌سازها

الف) اگر برداری موازی محور طول‌ها باشد، عرض آن صفر است؛ مانند: $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

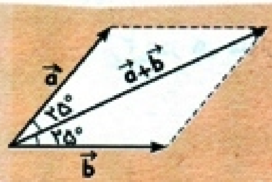
ب) اگر برداری موازی محور عرض‌ها باشد، طول آن صفر است؛ مانند: $\vec{b}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$

ج) اگر برداری موازی نیم‌ساز اوّل و سوم باشد، طول و عرض آن با هم برابرند؛ مانند: $\vec{c}=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$

د) اگر برداری موازی نیم‌ساز دوم و چهارم باشد، طول و عرض آن با هم قرینه هستند؛ مانند: $\vec{d}=\begin{bmatrix}4\\-4\end{bmatrix}$

نکته

۱) اگر برای دو بردار مساوی، با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع، بردار مجموع را رسم کنیم، این بردار مجموع، نیم‌ساز زاویهٔ بین دو بردار داده‌شده است.



۲) همواره رابطهٔ «نقطهٔ انتهایی = مختصات بردار + نقطهٔ ابتدایی» برقرار است.

۳) اگر بخواهیم یک نقطه را n بار با یک بردار منتقل کنیم، به‌جای این کار می‌توانیم نقطه را با n برابر بردار منتقل کنیم.

مثال ۴ اگر بخواهیم نقطهٔ $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ را ۵ بار با بردار $\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$ منتقل کنیم، به چه نقطه‌ای می‌رسیم؟

نقطه را با ۵ برابر بردار داده‌شده، منتقل می‌کنیم. $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-20\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-17\\17\end{bmatrix}$

نکته

۱) در جمع بردارها می‌توانیم حروف مساوی را خط بزنیم: $\overrightarrow{A\cancel{B}}+\overrightarrow{\cancel{B}C}=\overrightarrow{AC}$

۲) اگر تعداد بردارها یکسان بود، می‌توانیم باز هم حروف مساوی را خط بزنیم: $3\overrightarrow{A\cancel{B}}+3\overrightarrow{\cancel{B}C}=3\overrightarrow{AC}$

۳) اگر جای ابتدا و انتهای بردار را عوض کنیم، علامت پشت بردار قرینه می‌شود:

$-7\overrightarrow{BC}=7\overrightarrow{CB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}$