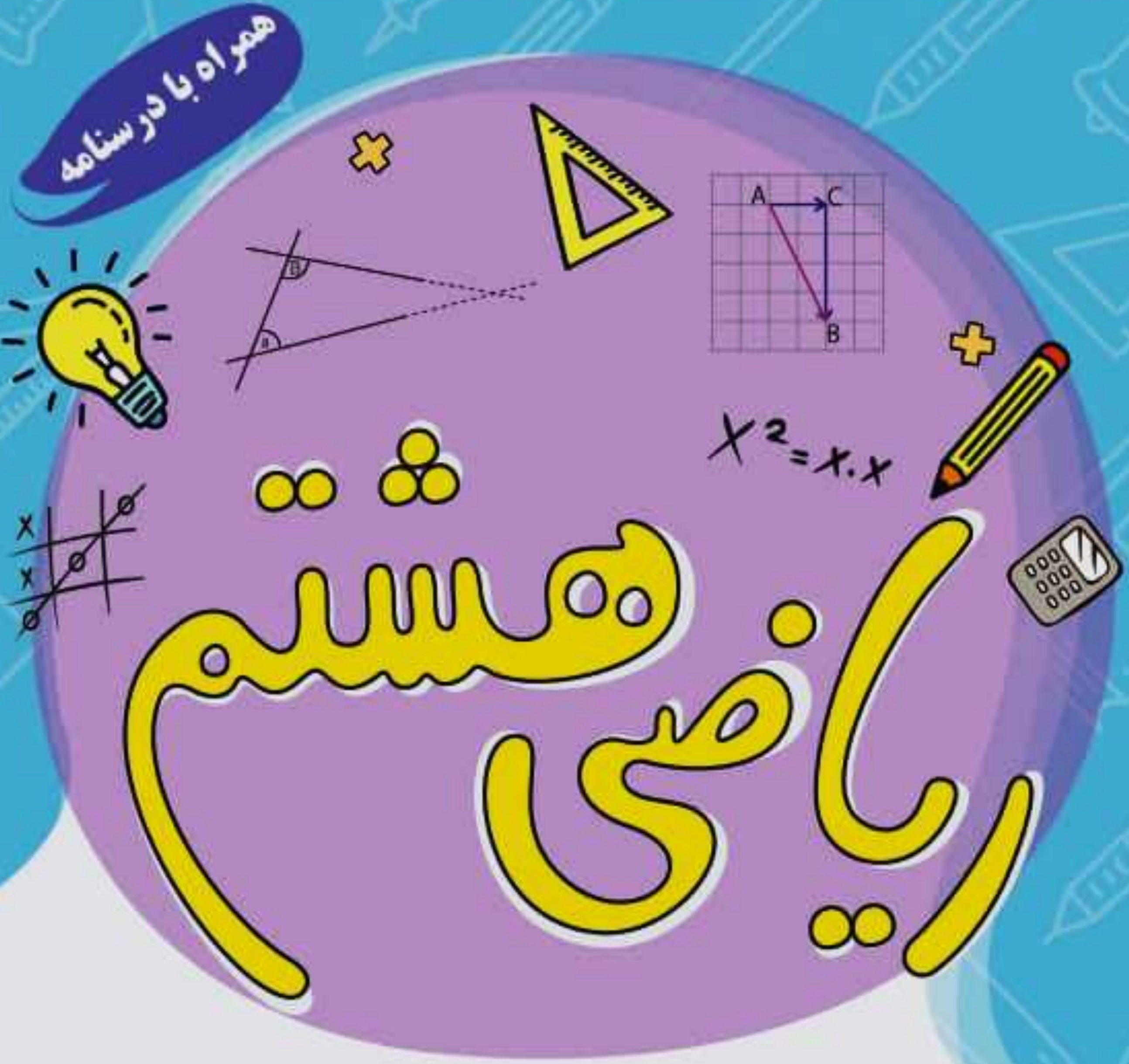



- نکات و توضیحات کتاب ریاضی
- پایه هشتم
- دوره اوّل متوسطه
- گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

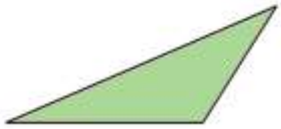
# فصل ۶: مثلــث

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

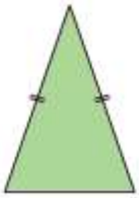

## یادآوری:

**انواع مثلثها:**

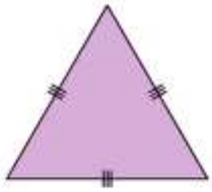
**۱)مثلث مختلف الاضلاع**



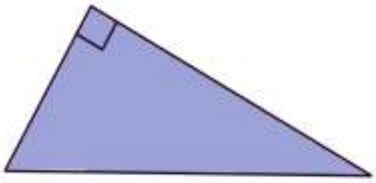
**۲) مثلث متساوی الساقین**



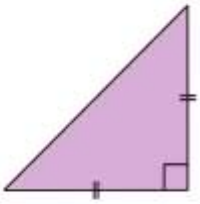
**۳) مثلث متساوی الاضلاع**



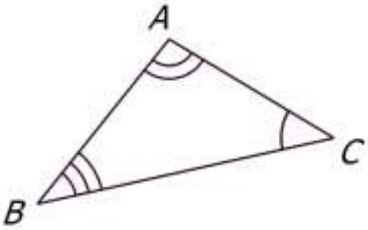
**۴) مثلث قائم الزاویه**



**۵) مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین**



**می دانید که هر مثلث دارای اجزایی است. به سه زاویه و سه ضلع مثلث اجزای اصلی آن می گویند. به طور مثال در شکل زیر A ،B وC راس های مثلث  AB ، AC و BC نام اضلاع و $\widehat{A}$ , $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ نام زوایای مثلث هستند. به نیمساز ,ارتفاع , عمود منصف و ... اجزای فرعی مثلث می گویند .**




**نیمساز : نیم خطی است که از راس شروع شده و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.**

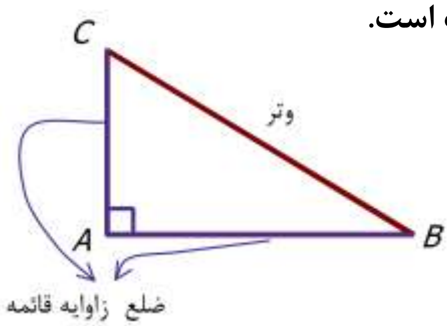
**ارتفاع: پاره خطی است که از راس مثلث به ضلع مقابل متصل شده و بر آن عمود باشد .**

**عمودمنصف: خطی است که از وسط ضلع برآن عمود شده باشد.**

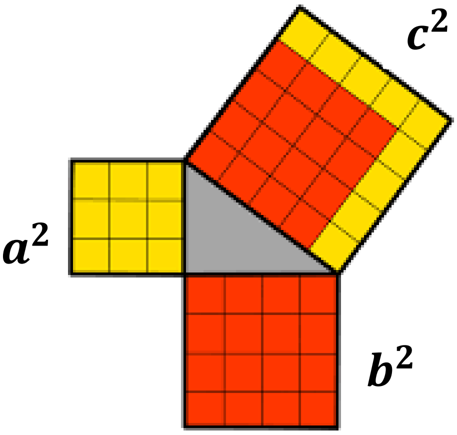
**میانه: پاره خطی که از یک راس مثلث به وسط ضلع مقابلش وصل شده باشد.**


## درس اول: رابطه ی فیثاغورس

**همانطور که می دانید یکی از انواع مثلث ها ،  مثلث قائم الزاویه است. در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ی قائمه که بزرگترین ضلع مثلث است را وتر می نامیم. در شکل زیر مثلث ABC قائم الزاویه و $\hat{A} = ۹۰^{\circ}$ است. در این مثلث دو ضلع AB و AC اضلاع زاویه ی قائمه و ضلع BC وتر مثلث است.**




فیثاغورس ( فیلسوف و ریاضیدان یونانی ) با تحقیق بر روی مثلث قائم الزاویه به این نتیجه رسید:
(( مساحت مربعی که با وتر مثلث قائم الزاویه ساخته می شود برابر است با مجموع مساحت دو مربعی که با اضلاع زاویه ی قائمه ساخته می شود.))
این رابطه بعدها رابطه ی فیثاغورس نامیده شد. طبق شکل زیر مساحت هر شکل کنار آن نوشته شده است .
بنابراین :




$c = ۵ \Rightarrow$ مساحت مربع روی وتر : $c^۲ = ۲۵$

$\left.\begin{array}{l} a = ۳ \Rightarrow a^۲ = ۹ \\ b = ۴ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \end{array}\right\} \Rightarrow$ مجموع مساحت ها : $۹ + ۱۶ = ۲۵$

با مقایسه ی دو عبارت داریم:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

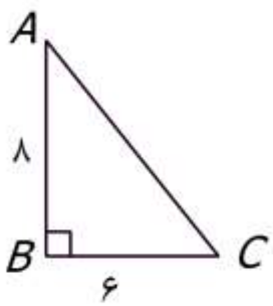
**نکته ۱:**

**در هر مثلث قائم الزاویه مجذور وتر برابر است با مجموع مجذور دو ضلع زاویه ی قائمه**

(توضیح: به توان دوم یک عدد مربع یا مجذور آن عدد می گویند. به طور مثال مربع یا مجذور ۷ برابر است با $۷^۲$ یا ۴۹ )

**برعکس این رابطه نیز برقرار است. یعنی اگر در مثلثی رابطه ی فیثاغورس برقرار باشد ( مجذور وتر با مجموع مجذور دو ضلع زاویه ی قائمه برابر باشد) آن مثلث حتما قائم الزاویه است.**

## از این ویژگی برای تعیین اندازه ی اضلاع مثلث قائم الزاویه یا تشخیص نوع مثلث استفاده می کنیم.

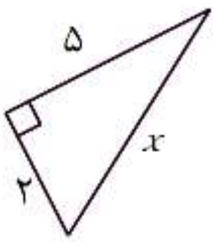



**مثال۱:** مثلث ABC را درنظر بگیرید.

مساحت مربعی به ضلع AB : ۸×۸ =۶۴

مساحت مربعی به ضلع BC : ۶×۶ =۳۶

بنابراین طبق رابطه ی فیثاغورس داریم: مساحت مربعی به ضلع AC : ۶۴+۳۶=۱۰۰ پس AC=$\sqrt{۱۰۰} = ۱۰$




**مثال۲:** با توجه به اندازه های داده شده در شکل مقابل مقدار $x$ را به دست آورید.

**پاسخ:** طبق رابطه فیثاغورس داریم :

$$x^۲ = ۲^۲ + ۵^۲ = ۴ + ۲۵ = ۲۹$$
$$x = \sqrt{۲۹}$$

با توجه به این مثال که $۳ = \sqrt{۹} = \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = (\sqrt{۳})^{۲}$ نکته ی زیر را داریم:

**نکته ۲)** اگر $a$ عددی مثبت باشد همواره رابطه ی $(\sqrt{a})^{۲} = a$ برقرار است.

**مثال۳)** آیا مثلثی با اضلاع ۵ و ۶ و $\sqrt{۱۱}$ قائم الزاویه است؟

**پاسخ:** $(\sqrt{۱۱})^{۲} + ۵^{۲} = ۶^{۲} \Leftarrow$

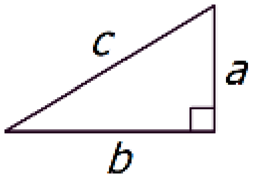
$۶^{۲} = ۳۶$ : مجذور بزرگترین ضلع

$۵^{۲} + (\sqrt{۱۱})^{۲} = ۱۱ + ۲۵ = ۳۶$ : مجموع مجذور دو ضلع دیگر

بنابراین مثلث مورد نظر قائم الزاویه است.

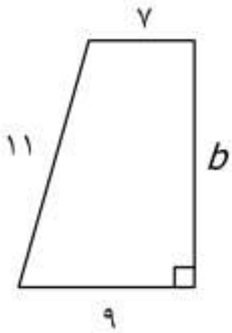
**نکته ۳)** دقت کنیم در شکل هایی که مجهول ، ضلع زاویه ی قائمه است از معادل های دیگر رابطه ی فیثاغورس استفاده کنیم .

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} \Rightarrow \begin{cases} a^{۲} = c^{۲} - b^{۲} \\ b^{۲} = c^{۲} - a^{۲} \end{cases}$$



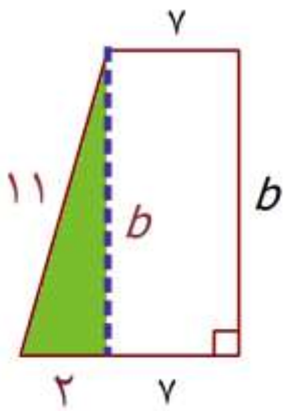

برای حل مثال زیر از نکته ۳ استفاده می کنیم.

**مثال۴)** در شکل مقابل مقدار $b$ را به دست آورید.




**پاسخ:**

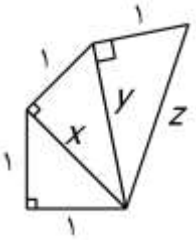
با توجه به شکل زیر ، مثلث قائم الزاویه ای به وتر ۱۱ و ضلع قائمه ی ۲ واحد به وجود می آید و بنا به رابطه ی فیثاغورس داریم:




$$b^{۲} = ۱۱^{۲} - ۲^{۲} = ۱۲۱ - ۴ = ۱۱۷$$

$$b = \sqrt{۱۱۷}$$

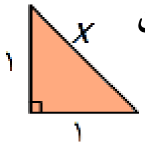
**مثال۵)** به کمک رابطه ی فیثاغورس محیط شکل مقابل را به دست آورید.




**پاسخ:**

برای محاسبه ی محیط باید مقدار z را به دست آورد بنابراین باید به ترتیب مقادیر x و y و z را محاسبه کنیم.

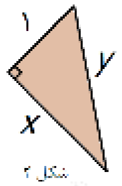
طبق شکل شماره ۱ ، X وتر مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین است . بنابراین



شکل ۱

داریم: $x^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۱ + ۱ = ۲ \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{۲}$

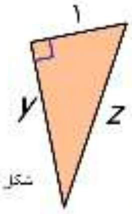
با جایگذاری مقدار x در شکل شماره ۲ داریم:



شکل ۲

$$y^۲ = ۱^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = ۱ + ۲ = ۳ \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{۳}$$

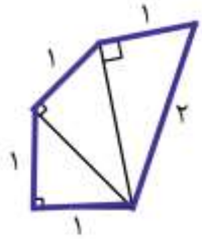
و با جایگذاری مقدار y در شکل شماره ۳ داریم:



شکل ۳

$$z^۲ = ۱^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۱ + ۳ = ۴ \quad \Longrightarrow \quad z = \sqrt{۴} = ۲$$

بنابراین مقدار محیط شکل عبارت است از:

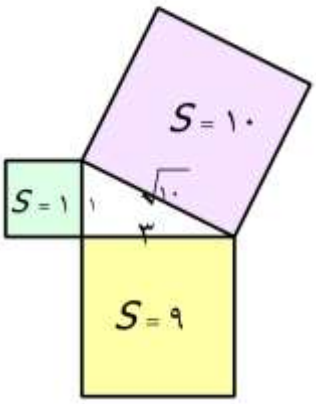



$$P = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ = ۶$$

**مثال۶)** با استفاده از رابطه ی فیثاغورس پاره خطی به طول $\sqrt{۱۰}$ رسم کنید.

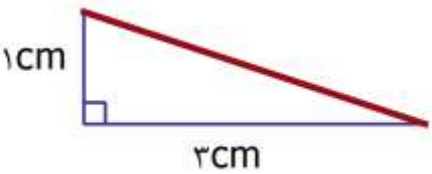
**پاسخ:**

به کمک رابطه ی فیثاغورس به دو مربع نیاز داریم که مجموع مساحت آنها ۱۰ باشد. به طور مثال با انتخاب مربع هایی به مساحت های ۱ و ۹ ( به ضلع ۱ و ۳ سانتیمتر) برای اضلاع مثلث قائم الزاویه طبق رابطه ی فیثاغورس مساحت مربعی که روی وتر ساخته می شود ۱۰ سانتیمتر مربع است پس ضلع این مربع $\sqrt{۱۰}$ خواهد بود .




$$x^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰ \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{۱۰}$$

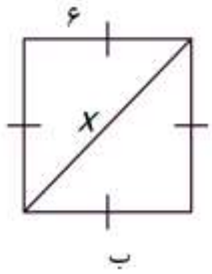
بنابراین کافی است به کمک خط کش و گونیا مثلثی قائم الزاویه که اضلاع زاویه ی قائمه ی آن ۱ و ۳ سانتیمتر هستند، ترسیم کنیم. وتر مثلث ترسیم شده همان پاره خط موردنظر به اندازه ی $\sqrt{۱۰}$ خواهد بود.

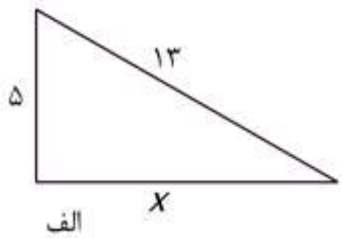




**به کمک مثال های بالا و نمونه های مشابه حل شده به سوالات زیر پاسخ دهید.**

**سوال۱: در هر شکل مقدار $x$ را به کمک رابطه ی فیثاغورس به دست آورید.**




**پاسخ ب)**

$$x^{۲} = ۶^{۲} + ۶^{۲} = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲$$
$$x = \sqrt{۷۲}$$

**سوال۲: کدامیک از سه تایی های زیر می تواند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشد؟ چرا؟**

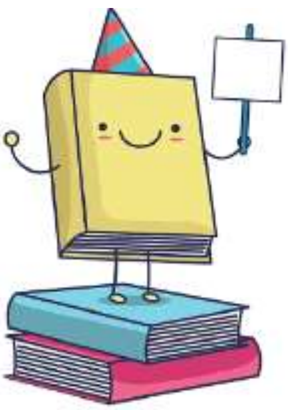
**الف) ۲/۵ و ۱/۵ و ۲**

**ب) ۲و $\sqrt{۶}$ و ۲**

پاسخ: $\Rightarrow (\sqrt{۶})^{۲} \neq ۸ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{(بزرگترین ضلع)}: \sqrt{۶} \Rightarrow (\sqrt{۶})^{۲} = ۶ \\ ۲^{۲} + ۲^{۲} = ۴ + ۴ = ۸ \end{array} \right.$

**مثلث قائم الزاویه نیست**

**سوال۳: طول و عرض مستطیلی ۱۰ و ۷ سانتیمتر است. قطر این مستطیل را تا یک رقم اعشار به صورت تقریبی محاسبه کنید.**



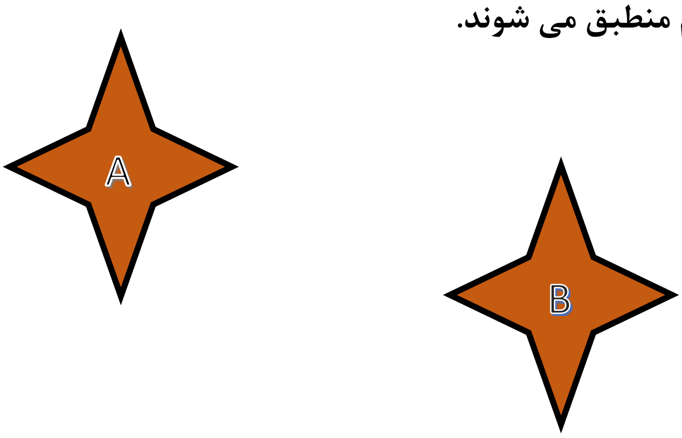
**سوال۴: به کمک رابطه ی فیثاغورس پاره خطی به طول $\sqrt{۸}$ رسم کنید.**

**فرزندم! با مرور نکات بالا از درستی حل تمرین ها اطمینان پیدا کن و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.**

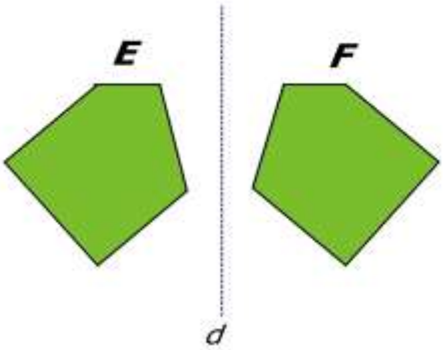

## درس دوم: شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل ( انتقال  تقارن و دوران) بر شکل دیگری منطبق کنیم طوری که کاملا یکدیگر را بپوشانند می گوییم آن دو شکل هم نهشتند. در واقع دو شکل هم نهشت با هم قابل انطباق اند.

**مثال ۱:** دو شکل A و B با انتقال بر هم منطبق می شوند.




**مثال ۲:** دو شکل  E و F با تقارن محوری نسبت به خط d بر هم منطبق می شوند .



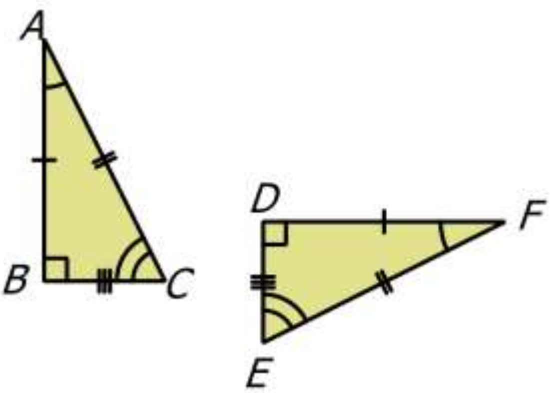

برای نشان دادن هم نهشتی بین دو شکل از علامت $\cong$ استفاده می کنیم به طور مثال در بالا داریم:

$A \cong B$   و   $E \cong F$

**اجزاء متناظر:** اضلاع و زاویه هایی هستند که در هر دو شکل هم نهشت با هم برابرند.

**مثال۳:** دو مثلث ABC و DEF با دوران بر هم منطبق می شوند.

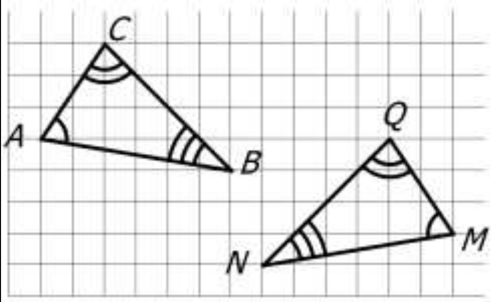
اجزاء متناظردر این دو شکل عبارتند از :




تساوی اجزاء متناظر

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{DF} & \hat{A} = \hat{F} \\ \overline{AC} = \overline{EF} & \hat{B} = \hat{D} \\ \overline{BC} = \overline{DE} & \hat{C} = \hat{E} \end{cases}$$

## مثال۴:




در شکل داده شده دو مثلث هم نهشتند. تساوی اجزای متناظر را بنویسید.

پاسخ:

$$\Delta ABC \cong \Delta MNQ \quad \xRightarrow{\text{تساوی اجزاء متناظر}} \quad \begin{cases} \overline{AB} = \overline{MN} & \hat{A} = \hat{M} \\ \overline{AC} = \overline{QM} & \hat{B} = \hat{N} \\ \overline{BC} = \overline{QN} & \hat{C} = \hat{Q} \end{cases}$$

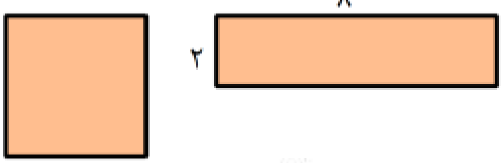
نکته: دقت کنیم محیط (یا مساحت) دو شکل هم نهشت با هم برابرند ولی برعکس این جمله صحیح نیست.

یعنی اگر محیط یا مساحت دو شکل برابر باشد ممکن است آن دو شکل هم نهشت نباشند.

به این دو مثال دقت کنید:

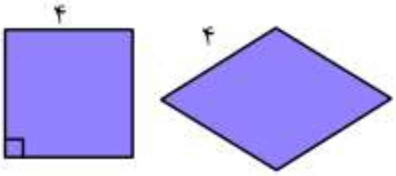
مثال الف) مساحت مربعی به ضلع ۴ و مستطیلی به ابعاد ۲ و ۸ با هم برابر است. (چرا؟)

ولی این دو شکل هم نهشت نیستند.



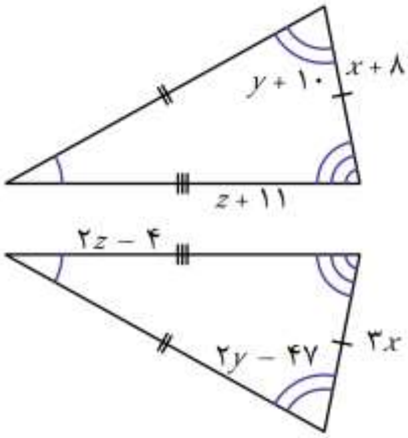

مثال ب) محیط این لوزی و مربع هر دو برابر است. (چرا؟)

ولی هم نهشت نیستند.




**به کمک هم نهشتی دو مثلث و تساوی اجزاء آن ها می توان مقادیر مجهول را محاسبه نمود.**

**مثال۵:** دو مثلث داده شده با تقارن محوری بر هم منطبق می شوند. با توجه به اندازه های داده شده مقادیر مجهول را بیابید.



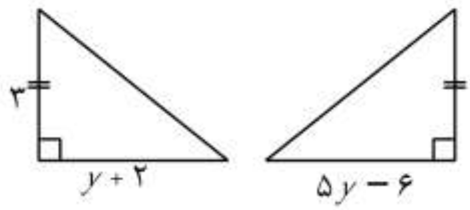

پاسخ: با توجه به تناظر بین اضلاع و زاویه ها داریم:

$$۳x = x + ۸ \Rightarrow ۲x = ۸ \Rightarrow x = ۴$$

$$۲y - ۴۷ = y + ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰ + ۴۷ \Rightarrow y = ۵۷$$

$$۲z - ۴ = z + ۱۱ \Rightarrow ۲z - z = ۱۱ + ۴ \Rightarrow z = ۱۵$$

**مثال۶:** دو مثلث مقابل هم نهشتند. محیط هر کدام چقدر است؟



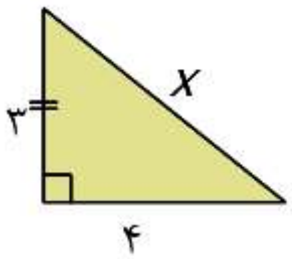

پاسخ: با توجه به تناظر اضلاع دو مثلث داریم:

$$۵y - ۶ = y + ۲ \Rightarrow ۴y = ۲ + ۶ = ۸ \Rightarrow y = \frac{۸}{۴} = ۲$$

با جایگزین کردن مقدار $y = ۲$ در هر کدام از روابط بالا اندازه ی ضلع دوم مثلث را محاسبه می کنیم.

$۵ \times ۲ - ۶ = ۱۰ - ۶ = ۴$ پس دو ضلع زاویه ی قائمه در این مثلث ۳ و ۴ هستند.

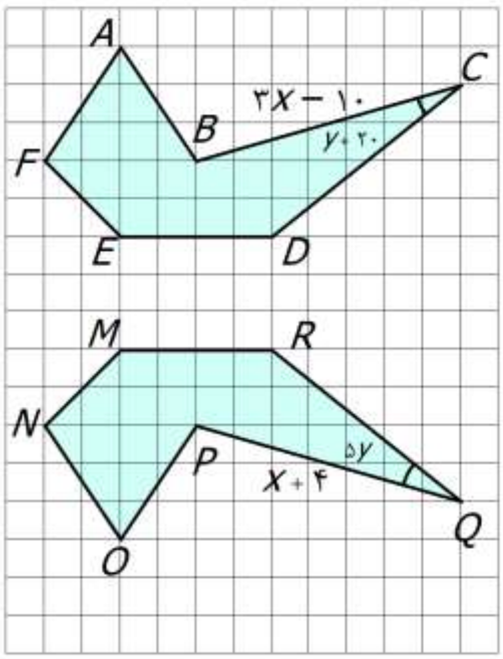
به کمک رابطه ی فیثاغورس داریم:




$$x^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow x = \sqrt{۲۵} = ۵$$

بنابراین محیط این دو مثلث برابر است با : $p = ۵ + ۴ + ۳ = ۱۲$

**مثال۷:** با توجه به شکل مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.




الف) دو شکل با چه تبدیلی بر هم منطبق می شوند؟

ب) تساوی های زیر را کامل کنید.

$$ABCDEF \cong ----$$

تساوی اجزای متناظر : $\begin{cases} \overline{AB} = \ ... & \hat{A} = \cdots \\ ... = \overline{QP} & ... = \hat{N} \\ \overline{ED} = \cdots & \hat{E} = \cdots \end{cases}$

ج) با تشکیل معادله مقدار X و Y را محاسبه کنید.

د) اندازه ی زاویه ی C و ضلع BC را به دست آورید.

فرزندم! با مرور نکات بالا از درستی حل تمرین ها اطمینان پیدا کن و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

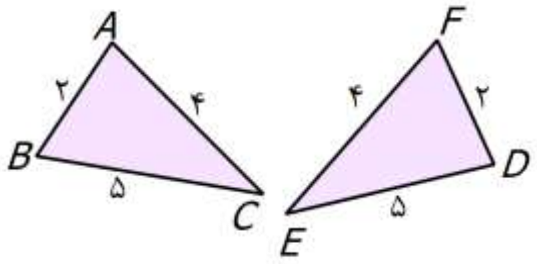

## درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

برای اینکه نشان دهیم دو مثلث هم نهشت هستند می توانیم از یکی از حالتهای زیر استفاده کنیم و لازم نیست برابری تمامی اضلاع و زاویه ها بررسی گردد.

حالت اول: برابری سه ضلع ( ض ض ض )

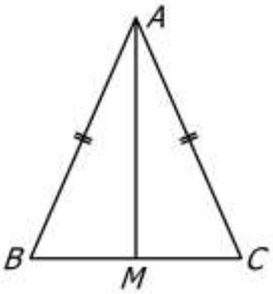
**اگر سه ضلع از مثلث اول با اضلاع مثلث دوم دو به دو با هم برابر باشند آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.**

**مثال۱:** دو مثلث ABC و DEF هم نهشتند زیرا :




$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{FD} = ۲ \\ \overline{AC} = \overline{EF} = ۴ \\ \overline{BC} = \overline{ED} = ۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بنا به حالت ( ض ض ض )}} \triangle ABC \cong \triangle FDE$$

**مثال۲:** مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده BC است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟

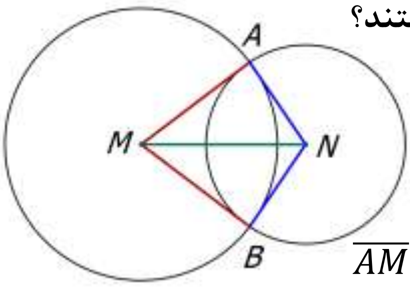



پاسخ:

ابتدا توجه کنیم که میانه قاعده را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} : \text{زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \overline{BM} = \overline{CM} : \text{زیرا } AM \text{ میانه است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} : \text{زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بنا به حالت ( ض ض ض )}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

**مثال۳:** نقاط M و N مرکز دو دایره هستند. چرا دو مثلث AMN و BMN هم نهشتند؟

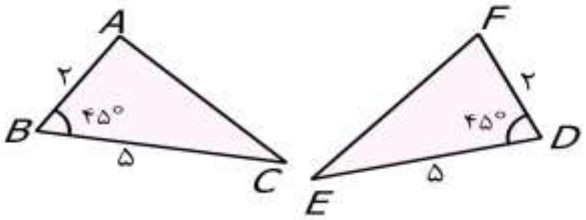



پاسخ: دقت کنیم در یک دایره شعاع ها با هم برابرند. بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{BM} : \text{چون شعاع دایره بزرگ هستند} \\ \overline{AN} = \overline{BN} : \text{چون شعاع دایره کوچک هستند} \\ \overline{MN} = \overline{MN} : \text{چون ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بنا به حالت ( ض ض ض )}} \triangle AMN \cong \triangle BMN$$

حالت دوم: برابری دو ضلع و زاویه ی بین آن ها ( ض ز ض )

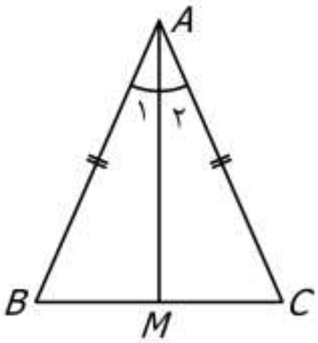
**اگر دو ضلع از مثلث اول با دو ضلع از مثلث دوم برابر و زاویه ی بین آن دو ضلع در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.**




**مثال۱:** دو مثلث زیر هم نهشتند زیرا :

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} = \overline{FD} = ۲ \\ \hat{B} = \hat{D} = ۴۵\,° \\ \overline{BC} = \overline{ED} = ۵ \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت ( ض ز ض)}} \triangle ABC \cong \triangle FDE$$

**مثال۲:** مثلث ABC متساوی الساقین و AM نیمساز زاویه ی A است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟

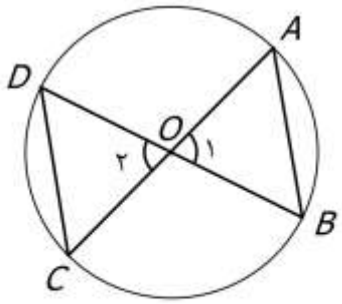



پاسخ:

ابتدا توجه کنیم که نیم ساز زاویه ی A را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} = \overline{AC} &: \text{زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ &: \text{زیرا } AM \text{ نیمساز } \hat{A} \text{است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} &: \text{زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت ( ض ز ض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$




**مثال۳:** نقطه ی O مرکز دایره و AC و BD قطر های دایره هستند.

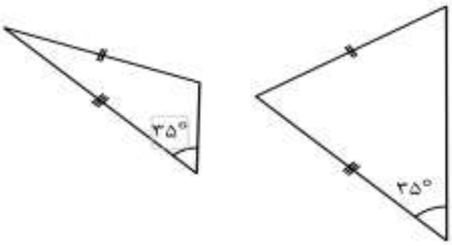
چرا دو مثلث OAB و OCD هم نهشتند؟

پاسخ: دقت کنیم به زوایایی مانند دو زاویه ی $\widehat{O}_۱$ و $\widehat{O}_۲$ متقابل به راس می گویند و دو زاویه ی متقابل به راس همیشه با هم برابرند. بنا براین داریم:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OB} = \overline{OC} &: \text{زیرا شعاع دایره هستند} \\ \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲ &: \text{زیرا متقابل به راس هستند} \\ \overline{OA} = \overline{OD} &: \text{زیرا شعاع دایره هستند} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت ( ض ز ض)}} \triangle OAB \cong \triangle ODC$$

**نکته:** دقت کنیم دراین حالت (ض ز ض ) زاویه ی مساوی باید حتما بین دو ضلع متناظر قرار داشته باشد.

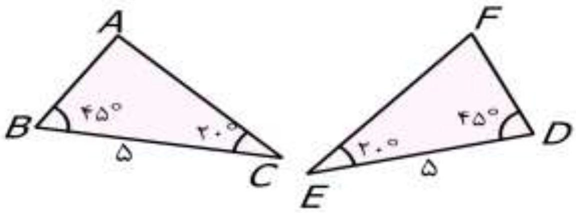
به این مثال توجه کنید.




در این مثال زاویه ی مساوی در دو مثلث بین اضلاع مساوی قرار ندارد و این دو مثلث هم نهشت نیستند.

حالت سوم: برابری دو زاویه و ضلع بین آن ها ( ز ض ز )

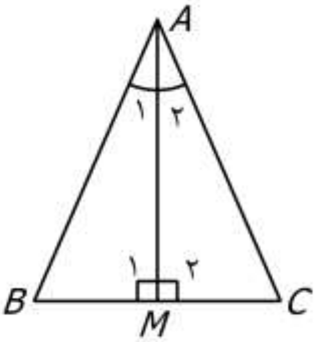
**اگر دو زاویه از مثلث اول با دو زاویه از مثلث دوم برابر و ضلع بین آن دو زاویه در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.**




**مثال۱:** دو مثلث زیر هم نهشتند زیرا:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{B}=\hat{D}=۴۵\,° \\ \overline{BC}=\overline{ED}=۵ \\ \hat{C}=\hat{E}=۲۰\,°\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت ( ز ض ز)}} \triangle ABC\cong\triangle FDE$$

**مثال۲:** در مثلث ABC پاره خط AM نیمساز زاویه ی A و بر BC عمود است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟




پاسخ:

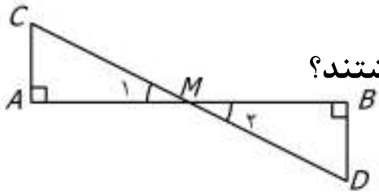
ابتدا توجه کنیم که نیم ساز AM زاویه ی A را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند

و چون بر قاعده ی BC عمود است زوایای $\widehat{M_۱}$ و $\widehat{M_۲}$ قائمه هستند.

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\text{زیرا AM بر BC عمود است}:\ \widehat{M_۱}=\widehat{M_۲}=۹۰\,° \\ \text{زیرا } AM \text{ نیمساز } \hat{A}:\ \widehat{A_۱}=\widehat{A_۲} \\ \text{زیرا ضلع مشترک دو مثلث است}:\ \overline{AM}=\overline{AM}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ز ض ز)}} \triangle ABM\cong\triangle ACM$$

**مثال۳:** نقطه ی M وسط پاره خط AB است. چرا دو مثلث ACM و BDM هم نهشتند؟

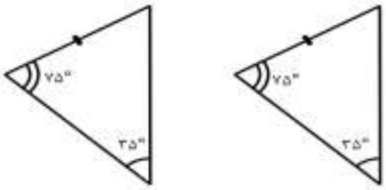



پاسخ:

بنا به حالت ( ز ض ز )

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} \ : \text{زیرا متقابل به راس هستند} \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \\ \overline{AM} = \overline{MB} \ : \text{زیرا M وسط پاره خط AB است} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ACM \cong \triangle BDM$$

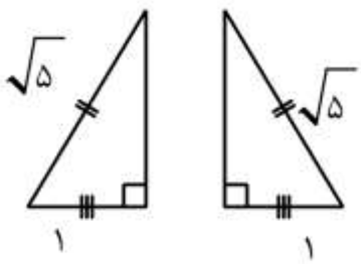
**نکته:** دقت کنیم اگر ضلع بین دو زاویه ی مساوی نباشد دو مثلث هم نهشتند. زیرا در صورت تساوی دو زاویه در دو مثلث ، زوایای سوم نیز با هم برابرند و به حالت سوم دو مثلث هم نهشت خواهند بود. برای درک بیشتر به مثال زیر دقت کنید.




در این دو مثلث دو زاویه مساوی وجود دارد بنابر این زاویه ی سوم در هر دو مثلث برابر است با : $۱۸۰ - (۷۵ + ۳۵) = ۷۰^\circ$

پس زاویه سوم در هر دو مثلث ۷۰ درجه است و ضلع متناظر بین دو زاویه ی مساوی در دو مثلث( دو زاویه ی ۷۰ و ۷۵ درجه ) قرار می گیرد و بنا به حالت سوم دو مثلث هم نهشتند.


در شکل زیر وتر و یک ضلع از هر دو مثلث با هم برابرند. با توجه به شکل های داده شده اندازه ی ضلع سوم در هر مثلث را محاسبه کنید و اندازه ی ضلع سوم را با هم مقایسه کنید.




پاسخ:اگر ضلع سوم را a در نظر بگیریم ، بنا به رابطه ی فیثاغورس

در هر دو مثلث داریم:

$$a^۲ = (\sqrt{۵})^۲ - ۱^۲ = ۵ - ۱ = ۴ \rightarrow a = \sqrt{۴} = ۲$$

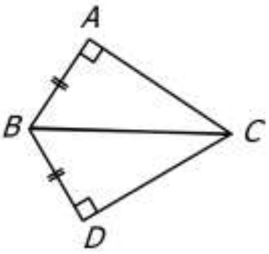
با مقایسه متوجه می شویم که اندازه ی ضلع سوم در هر دو مثلث ۲ واحد است. دقت کنیم که دو مثلث هم نهشتند. ( به دلیل داشتن سه ضلع مساوی)

طبق مثال بالا برای مثلث های قائم الزاویه علاوه بر سه حالت قبل می توان حالت هم نهشتی زیر را در نظر گرفت

## حالت چهارم: برابری وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه درمثلث قائم الزاویه ( و ض )

دقت کنیم این حالت فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

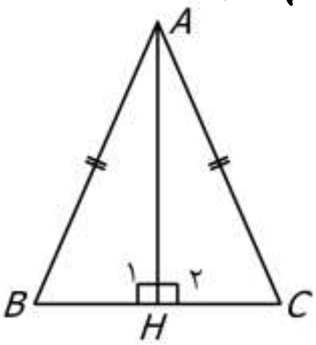
**مثال۱:** با توجه به شکل داده شده چرا دو مثلث ABC و DBC هم نهشتند؟( طبق شکل $\overline{AB} = \overline{DB}$ )




پاسخ: با توجه به این که دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر هر دوی آن ها $BC$ است داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \hat{D} = \text{۹۰}^\circ \\ \overline{BC} = \overline{BC} \\ \overline{AB} = \overline{DB}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت ( وتر و یک ضلع)}} \Delta ABC \cong DBC$$

**مثال۲:** مثلث ABC متساوی الساقین و AH ارتفاع آن است. چرا دو مثلث ABH و ACH هم نهشتند؟



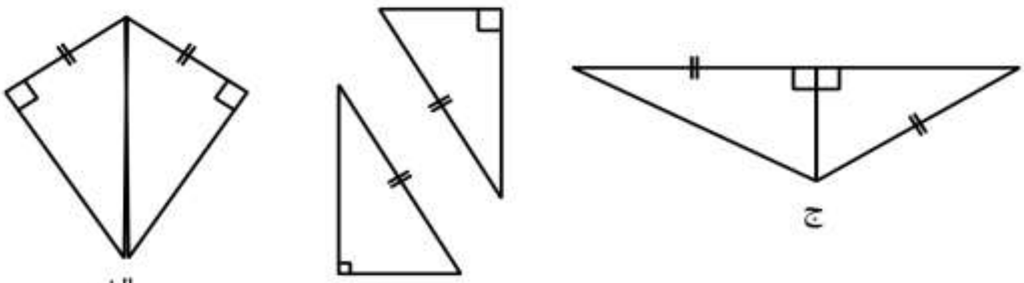

پاسخ:

ابتدا توجه کنیم چون **AH** ارتفاع است پس دو مثلث **ABH** و **ACH** قائم الزاویه هستند و **AB** و **AC** در دو مثلث وتر هستند

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = \text{۹۰}^\circ \\ \overline{AB} = \overline{AC} \\ \text{ضلع مشترک دو مثلث است } \overline{AH}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت ( وتر و یک ضلع)}} \Delta ABC \cong DBC$$

**مثال۳:** با توجه به اطلاعات داده شده برای هم نهشتی کدام مثلث ها دلایل کافی داریم؟



الف ب ج

پاسخ:

الف) دو مثلث وتر مشترک دارند و یک ضلع زاویه ی قائمه در هر دو مثلث با هم برابرند.

بنا بر این به حالت وتر و یک ضلع که برای خلاصه تر شدن به صورت( و ض)نوشته می شود ، هم نهشتند.

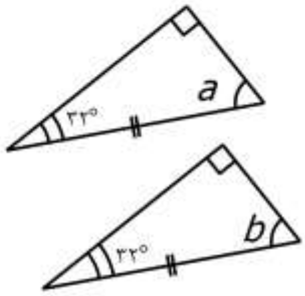
ب) وتر دو مثلث قائم الزاویه در هر دو برابر است ولی در مورد تساوی اضلاع دیگر اطلاعات مساله کافی نیست

پس در این حالت دو مثلث هم نهشت نیستند.

ج) دو مثلث قائم الزاویه هستند و یک ضلع زاویه ی قائمه در هر دو مشترک است ولی اضلاعی که با هم مساوی هستند و تساوی آن ها با علامت مشخص شده در یکی از مثلث ها وتر و در دیگری ضلع زاویه ی قائمه است.

پس دو مثلث هم نهشت نیستند.

در شکل زیر وتر و یک زاویه ی تند از دو مثلث با هم برابرند. با توجه به اندازه های داده شده اندازه ی a و b را در هر مثلث محاسبه کنید.




پاسخ: در مثلث قائم الزاویه دو زاویه تند متمم یکدیگرند( یعنی مجموع دو زاویه ی تند ۹۰ درجه است) بنابراین برای محاسبه ی a یا b کافی است اندازه ی زاویه ی تند دیگر را از ۹۰ درجه کم کنیم. پس:

$$a = b = ۹۰ - ۳۲ = ۵۸\,°$$

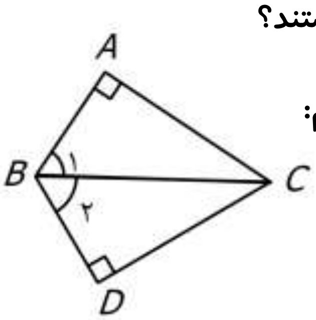
دقت کنیم که دو مثلث هم نهشتند. ( به دلیل داشتن دو زاویه و ضلع بین آن ها)

طبق مثال بالا برای مثلث های قائم الزاویه می توان حالت هم نهشتی زیر را در نظر گرفت

## حالت پنجم: برابری وتر و یک زاویه ی تند از مثلث قائم الزاویه ( و ز )

دقت کنیم این حالت هم مانند حالت قبل فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

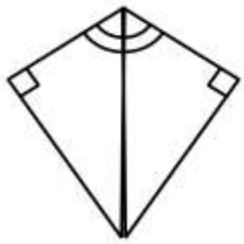
**مثال۱:** در شکل داده شده BC نیمساز زاویه ی B است. چرا دو مثلث ABC و DBC هم نهشتند؟



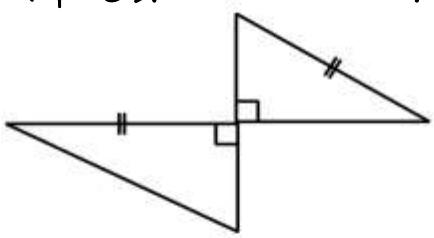

پاسخ: با توجه به این که دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر هر دوی آن ها $BC$ است داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{D} = ۹۰\,° \\ \overline{BC} = \overline{BC} \\ \widehat{B_۱} = \widehat{B_۲}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت ( وتر و یک زاویه ی تند)}} \Delta ABC \cong DBC$$

**مثال۲:** با توجه به اطلاعات داده شده برای هم نهشتی کدام مثلث ها دلایل کافی داریم؟


الف


ب


ج

پاسخ:

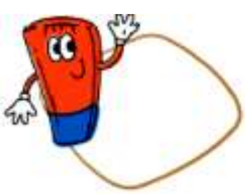
الف) دو مثلث وتر مشترک دارند و یک زاویه ی تند در هر دو مثلث با هم برابرند.

بنا بر این به حالت وتر و یک زاویه ی تند دو مثلث هم نهشتند.

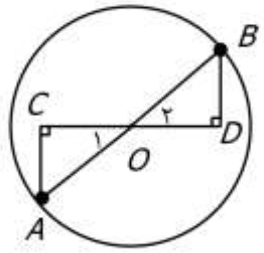
ب) یک ضلع و یک زاویه در هر دو مثلث برابرند ولی در مورد تساوی اجزای دیگر اطلاعات مساله کافی نیست

پس در این حالت دو مثلث هم نهشت نیستند.

ج) دو مثلث قائم الزاویه هستند و وترهای دو مثلث برابرند ولی اطلاعات سوال در مورد تساوی دیگر اجزاء کافی نیست . پس دو مثلث هم نهشت نیستند.



برای جمع بندی مطالب این درس به حل چند تمرین می پردازیم.



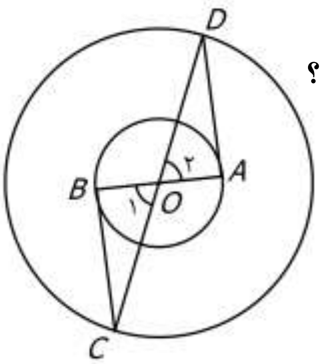

**تمرین۱:** در شکل مقابل AB قطر دایره است. چرا دو مثلث OAC و OBD هم نهشتند؟

پاسخ:

دقت کنیم OA و OB شعاع دایره و وترهای این دو مثلث قائم الزاویه هستند پس برای نشان دادن هم نهشتی دو مثلث از حالتهای مخصوص مثلث قائم الزاویه با داشتن وتر مساوی استفاده می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{C}=\hat{D}=۹۰^{\circ}\\ \widehat{O_۱}=\widehat{O_۲}\\ \overline{OA}=\overline{OB}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta OAC\cong\Delta OBD$$

بنا به حالت ( وتر و یک زاویه ی تند)



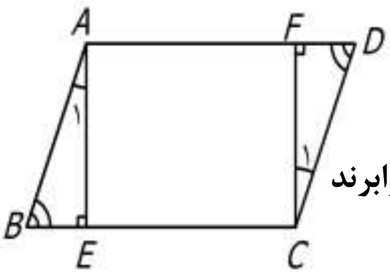

**تمرین۲:** دو دایره ی داده شده هم مرکز هستندو چرا دو مثلث OAD و OBC هم نهشتند؟

پاسخ:

دقت کنیم OA و OB شعاع های دایره ی کوچک و OC و OD شعاعهای دایره ی بزرگ هستند و دو زاویه ی O متقابل به راس هستند. بنا بر این داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\overline{OC}=\overline{OD}\\ \widehat{O_۱}=\widehat{O_۲}\\ \overline{OB}=\overline{OA}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta OBC\cong\Delta OAD$$

بنا به حالت ( ض ز ض )




**تمرین۳:** چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع و AE و CF بر قاعده های آن عمودند.

الف) چرا دو مثلث ABE و CDF هم نهشتند؟

**پاسخ:** می دانیم در هر متوازی الاضلاع اضلاع و زاویه های رو به رو دو به دو با هم برابرند از طرفی دو مثلث قائم الزاویه و AB و CD وترهای آن هستند. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{E}=\hat{F}=۹۰^{\circ}\\ \overline{AB}=\overline{CD}\ :\ \text{وتر}\\ \hat{B}=\hat{D}\ :\ \text{دو زاویه تند}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta ABE\cong\Delta CDF$$

بنا به حالت ( وتر و یک زاویه ی تند )

ب) با توجه به قسمت الف و هم نهشتی دو مثلث تساوی های زیر را کامل کنید.

$\overline{AE}=\overline{FC}$ $\qquad$ $\overline{FD}=\overline{BE}$ $\qquad$ $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$

فرزندم! با مرور نکات بالا از درستی حل تمرین ها اطمینان پیدا کن و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.