ریاضی ۲

رشته تجربی

یادم باشد: هرکس به تعداد محدودی ضربان قلب دارم و من قصد ندارم هیچ یک از آنها را هدر دهم

دانش آموز عزیز من دو برابر ساعت های درسی که با شما کلاس دارم جهت تهیه محتوای آموزشی برای شما عزیزان وقت می گذارم تا انشاالله این ایام را نیز به سلامتی به پایان برسانیم، بنابراین انتظار دارم شما نیز با یک برنامه مناسب درسها را مطالعه نمایید تا با هم بی حساب شویم!

محتوای این فایل:

۱) فصل یک هندسه تحلیلی و معادله ها شامل ۲۴ تست (شماره ۱ تا ۲۴)

۲) فصل دوم هندسه شامل ۱۶ تست (شماره ۲۵ تا ۴۰)

۳) فصل سوم تابع شامل ۲۴ تست (شماره ۴۱تا ۵۵)

۴) فصل چهارم مثلثات شامل ۱۵ تست (شماره ۵۶ تا۷۰)

۵) فصل پنجم لگاریتم شامل ۲۰ تست (شماره ۷۱ تا ۹۰)

@mir_azmoon11

ویژه تمام دانش آموزان ایران عزیز

۱ - اگر O مرکز دایرهٔ C، روی نیمساز ربع اول و سوم باشد و دو نقطهٔ $(k, 2k-1)$ و $(0,-1)$ دو سر یک قطر دایره باشند، آنگاه مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(-2,3)$ نسبت به O کدام است؟

① $(4,1)$ ② $(4,-1)$ ③ $(-4,1)$ ④ $(-4,-1)$

۲ - فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,1)$ از نقطه‌ای به طول ۴ روی خط $3x+2y=2$ کدام است؟

① ۲ ② ۵ ③ $2\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{10}$

۳ - فاصلهٔ دو خط موازی $7x-4y+8=0$ و $-14x+8y+2=0$ کدام است؟

① ۱۰ ② ۶ ③ $\frac{9}{\sqrt{65}}$ ④ $\frac{6}{\sqrt{65}}$

۴ - قرینهٔ نقطهٔ $A(1,-2)$ نسبت به خط $y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$ را B می‌نامیم. طول پاره‌خط AB کدام است؟

① ۱۰ ② ۸ ③ ۶ ④ ۴

۵ - دو خط به معادله‌های $x+y=3$ و $2x=3y+1$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر نقطهٔ $(-1,0)$ displaystyle$ روی این دایره قرار داشته باشد مساحت این دایره چند π است؟

① ۲۰ ② ۱۰ ③ ۸ ④ ۱۲

۶ - دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x-2y=3$ و $y=x+1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{25}{8}$ ④ $\frac{25}{4}$

۷ - مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2,5)$ ، $B(3,0)$ و $C(0,2)$ کدام است؟

① ۶ ② ۶٫۵ ③ ۷ ④ ۷٫۵

۸ - دو نقطه‌ی $A(-4,7)$ و $B(1,5)$ دو سر قطری از دایره هستند. معادله‌ی قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

① $y+4x=0$ ② $5y-2x=0$ ③ $y-4x=0$ ④ $2y-5x=0$

۹ - قرینه‌ی نقطه‌ی $A(3,2)$ نسبت به خط $y=x-3$ کدام است؟

① $(4,3)$ ② $(5,0)$ ③ $(\frac{11}{2},\frac{7}{2})$ ④ $(\frac{13}{3},\frac{9}{4})$

۱۰ - حدود m کدام باشد تا هیچ نقطه‌ای از تابع $y=x^2-4x+m$ دارای فاصله‌ی ۵ از محور xها نباشد؟

① $m>9$ ② $m<-2$ ③ $-2<m<3$ ④ $-5<m<-2$

۱۱ - مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$ چقدر است؟

① $5+2\sqrt{6}$ ② ۵ ③ $\sqrt{5}+2$ ④ ۶

۱۲ - معادله درجه دومی که ریشه هایش ۹ برابر ریشه های معادله‌ی $x^2+x-3=0$ باشد. کدام است؟

① $x^2+9x-243=0$ ② $x^2+9x-27=0$ ③ $x^2+18x-243=0$ ④ $x^2+18x-27=0$

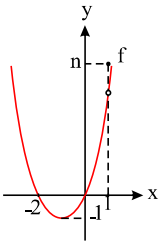
۱۳ - در معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ حاصل $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ کدام است؟

① ۳ ② ۸ ③ ۴ ④ ۲

۱۴ - کمترین مقدار عبارت $y = x^۲ - x + ۲$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۵}{۴}$ ④ $\frac{۷}{۴}$

۱۵ - اگر تابع $y = f(x)$ با نمودار زیر با تابع $g(x) = \begin{cases} x^۲ + bx + c & , x \neq ۱ \\ ۴ & , x = ۱ \end{cases}$ برابر باشد، مقدار $n + b + c$ کدام است؟



① ۴ ② ۶
③ ۳ ④ ۵

۱۶ - مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰$ کدام است؟

① ۴ ② -۲ ③ ۲ ④ -۴

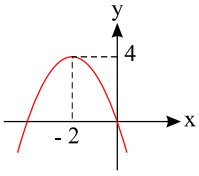
۱۷ - بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + ۴x + ۵$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

① $x = -۱$ ② $x = ۲$ ③ $x = ۳$ ④ $x = ۴$

۱۸ - محیط مستطیلی ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین مقدار است؟

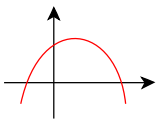
① ۷۵ ② ۶۰ ③ ۵۰ ④ ۴۵

۱۹ - با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_۱)(x - x_۲)$، مقدار a کدام است؟



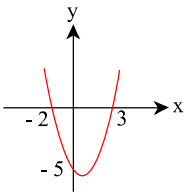
① ۱ ② -۱
③ -۲ ④ ۲

۲۰ - ضابطه‌ی تابع f با نمودار مقابل، مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟



① $y = -x^۲ + ۵x - ۷$ ② $y = -۲x^۲ + ۳x + ۵$
③ $y = x^۲ - ۳x + ۲$ ④ $y = -۳x^۲ - ۲x + ۴$

۲۱ - شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم به معادله‌ی $y = ax^۲ + bx + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



① ۵ ② -۵
③ ۶ ④ -۶

۲۲ - نمودار کدام سهمی زیر از نقاط $(-۱, ۲)$ و $(۱, ۰)$ گذشته و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع می‌کند؟

① $y = ۲x^۲ - x - ۱$ ② $y = -۲x^۲ + ۳x - ۱$ ③ $y = x^۲ - ۲x + ۱$ ④ $y = x^۲ - ۲x$

۲۳ - اگر دو ماشین چمن‌زنی باهم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، چند ساعت طول می‌کشد تا ماشین کندتر به تنهایی این کار را انجام دهد؟

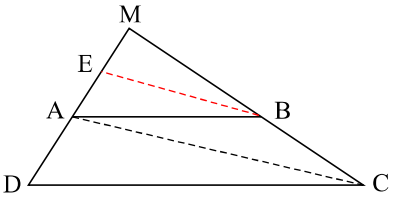
① ۶ ② ۱۰ ③ ۱۲ ④ ۱۵

۲۴ - تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{۲ - x}{x^۲ - x} = \frac{۲}{x + ۱} + \frac{۲x}{x^۲ - ۱}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

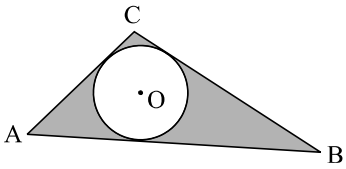
@mir_azmoon11

۲۵ - در ذوزنقه‌ی $ABCD$ ، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصله‌ی MD کدام است؟



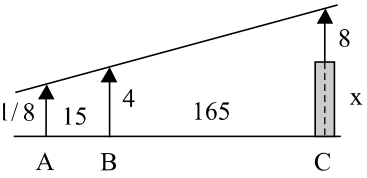
۱) ۱۲
۲) ۱۲٫۲۵
۳) ۱۲٫۵
۴) ۱۲٫۷۵

۲۶ - از نقطهٔ O محل تلاقی سه نیم‌ساز داخلی مثلث ABC، عمودی به طول ۲ بر ضلع AB رسم می‌کنیم. اگر محیط مثلث ۲۴ باشد، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟ ($\pi \simeq ۳$)



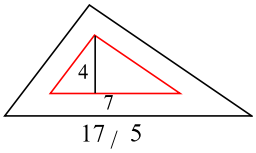
۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۰

۲۷ - در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱٫۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متراست؟



۱) ۱۹٫۸
۲) ۲۰٫۲
۳) ۲۰٫۸
۴) ۲۱٫۲

۲۸ - اضلاع مثلث کوچک‌تر موازی اضلاع مثلث بزرگ‌تر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

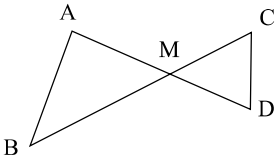


۱) ۷۷٫۵
۲) ۷۸٫۵
۳) ۸۷٫۵
۴) ۸۸٫۵

۲۹ - اگر $\frac{۲a+۳b}{۳a+۲b} = \frac{۵}{۶}$ ، حاصل $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

۳۰ - در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵}$ می‌باشد. نسبت مساحت‌های دو مثلث در شکل کدام است؟

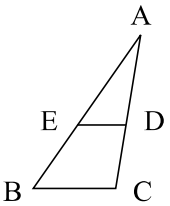


۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۴}{۹}$
۴) $\frac{۹}{۲۵}$

۳۱ - مثلثی به اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند، بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

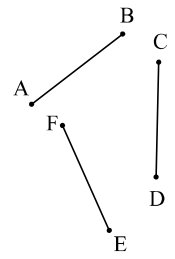
۱) ۱۳٫۵
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۷٫۲

۳۲ - در شکل مقابل $\angle B = \angle E$ و $AE = ۸$ و $ED = ۶$ و $BC = ۹$ است. طول BE کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴٫۲
۳) ۴٫۴
۴) ۴٫۶

۳۳ - در شکل چند نقطه در صفحه وجود دارد که از دو سر پاره‌خط‌ها به یک فاصله باشد؟



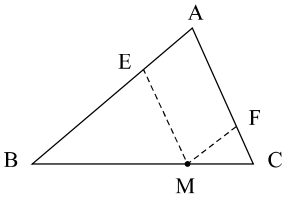
۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) بی‌شمار

@mir_azmoon11

۳۴- در ذوزنقه‌ی قائم الزاویه‌ای قطرها برهم عمودند. اگر طول قاعده‌ها ۷ و ۲۸ باشد، طول ساق عمود بر دو قاعده چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳۵- در شکل مقابل $AEMF$ متوازی الاضلاع است. $\frac{AE \times AF}{BE \times CF}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{AB}{AC}$ ۲) ۱

۳) $\frac{MC}{BM}$ ۴) $\frac{CF}{AC}$

۳۶- کدام دو چهارضلعی متشابه‌اند؟

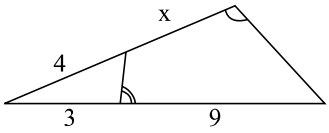
۱) دو مستطیل ۲) دو متوازی الاضلاع که زوایای مساوی داشته باشند.

۳) دو لوزی که زاویه‌ی مساوی داشته باشند. ۴) دو ذوزنقه‌ی متساوی الساقین که زوایای مساوی داشته باشند.

۳۷- در مثلث ABC روی نیمساز زاویه‌ی A نقطه‌ی M طوری قرار دارد که رابطه‌ی $AM^2 = AB \times AC$ برقرار است. مثلث AMC با کدام مثلث متشابه است؟

۱) AMB ۲) ABC ۳) MBC ۴) هیچ کدام

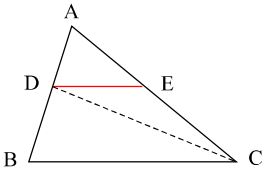
۳۸- در شکل مقابل، دو زاویه‌ی مقابل چهار ضلعی مکمل‌اند. اندازه‌ی x کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۵٫۵

۳) ۶ ۴) ۷٫۵

۳۹- در شکل مقابل $DE \parallel BC, \frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$، مساحت مثلث ADE چند درصد مثلث DEC است؟



۱) ۷۰ ۲) ۸۴ ۳) ۷۸ ۴) ۷۵

۴۰- در یک مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

فصل ۳ - تابع

۴۱- وارون تابع $f(x) = \frac{3x-1}{2}$، کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$ ۲) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ ۳) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$ ۴) $f^{-1}(x) = \frac{-2x+1}{3}$

۴۲- دامنهٔ تابع $f(x) = x^2 - 6x + 10$ کدام بازهٔ زیر باشد، تا تابع یک‌به‌یک باشد؟

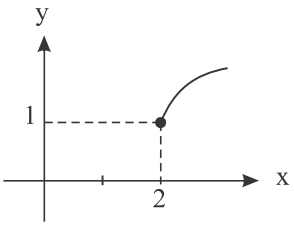
۱) $[-1,4]$ ۲) $(-3,3]$ ۳) $(2,5]$ ۴) $(0,4)$

۴۳- چه تعداد از توابع زیر با هم برابرند؟

$a)\ \begin{cases} f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x \\ g(x) = 1 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1} \\ g(x) = x^2+1 \end{cases}$ $c)\ \begin{cases} f(x) = \tan x \cdot \cot x \\ g(x) = 1 \end{cases}$

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۴۴- نمودار زیر مربوط به تابع با کدام ضابطه می‌باشد؟



۱) $f(x) = \sqrt{x+2} + 1$ ۲) $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

۳) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ ۴) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

@mir_azmoon11

۴۵- اگر $f^{-1}=\{(۲,۳),(۱,-۱),(۰,۲),(-۱,۰)\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{۲f^{-1}}{f}$ شامل کدام زوج مرتب است؟

① $(۰,۴)$ ② $(۰,-۱)$ ③ $(-۴,۰)$ ④ $(-۱,۰)$

۴۶- اگر $f=\{(۲,۱),(-۱,۰),(۴,۱)\}$ و $g=\{(۲,۲),(-۱,۳),(۴,-۱)\}$ باشد حاصل $\frac{۲g}{f}$ کدام است؟

① $\{(۲,۲),(۴,-۱)\}$ ② $\{(۲,۴),(-۱,۳)\}$ ③ $\{(۲,۴),(۴,-۲)\}$ ④ $\{(-۱,۳),(۴,-۲)\}$

۴۷- تابع $f(x)=(m-۳)x^۳+(m^۲-۹)x+m-۱$ تابعی ثابت است. حاصل $m^۳-m+۷$ کدام گزینه است؟

① ۱۷ ② ۲۰ ③ ۳۱ ④ صفر

۴۸- اگر $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f^{-1}(۳)$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ -۲

۴۹- کدام جفت از توابع داده‌شده با هم برابرند؟

① $f(x)=۱\ ,\ g(x)=\frac{x}{x}$ ② $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ g(x)=\sqrt[۴]{x^۲}$

③ $f(x)=x-۵\ ,\ g(x)=\frac{x^۲-۷x+۱۰}{x-۲}$ ④ $f(x)=x\sqrt{x}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^۳}$

۵۰- کدام یک از گزینه‌ها، ضابطهٔ تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\}$ است؟

① $f(x)=\frac{x}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{x}}$ ② $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۲}-\sqrt{-x}}$ ③ $f(x)=\frac{\frac{x}{x-۱}}{x+۲}$ ④ $f(x)=۱+\frac{۳}{x+۲}$

۵۱- یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های کمتر از ۱ کیلوگرم ۲۰۰۰ تومان، از ۱ تا کم‌تر از ۲ کیلوگرم ۴۰۰۰ تومان و از ۲ تا کم‌تر از ۳ کیلوگرم ۶۰۰۰ تومان دریافت می‌کند و به‌همین ترتیب برای وزن‌های بعدی قیمت تغییر می‌کند. این شرکت برای ارسال بسته‌های چند کیلوگرمی، ۱۰۰ هزار تومان دریافت خواهد کرد؟

① ۳۰ تا ۳۱ کیلوگرمی ② ۴۹ تا ۵۰ کیلوگرمی ③ ۵۰ تا ۵۱ کیلوگرمی ④ ۵۹ تا ۶۰ کیلوگرمی

۵۲- اگر مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+\frac{۳}{۲}]=۳$ به‌صورت $[a,b)$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① -۱ ② ۱ ③ $-۰/۵$ ④ $۰/۵$

۵۳- تابع $f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}$ با کدام‌یک از توابع زیر مساوی است؟

① $g(x)=\sqrt{-(۱-x)^۲}$ ② $g(x)=\sqrt{(۱-x)^۳}$ ③ $g(x)=\sqrt{(x-۱)^۳}$ ④ $g(x)=-\sqrt{(۱-x)^۳}$

۵۴- کدام دو تابع داده شده مساوی‌اند؟

① $f(x)=x(x+۱)\ ,\ g(x)=x|x+۱|$ ② $f(x)=\frac{x+۱}{|x|}\ ,\ g(x)=\frac{|x+۱|}{x}$

③ $f(x)=|x|-۱\ ,\ g(x)=\frac{x^۲-۱}{|x|+۱}$ ④ $f(x)=۱\ ,\ g(x)=\frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}$

۵۵- اگر $f=\{(-۳,k),(\frac{۱}{۲}a,-۲),(۲a+۱,k),(b-۱,۱),(-۱,۴b)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

① $-\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ -۱ ④ ۲

فصل ۴- مثلثات

۵۶- زاویه‌ی θ کمانی به طول $\frac{۱}{۲}$ سانتی‌متر در دایره‌ای با شعاع $\frac{۱}{۴}$ سانتی‌متر بریده است. مقدار θ برحسب رادیان کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

@mir_azmoon11

۵۷ - حاصل عبارت $\frac{۱+\sin^۲ ۲۵+\sin^۲ ۶۵}{\cot ۳۵ \cot ۵۵}$ کدام است؟

① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۵۸ - یک درجه تقریباً چند رادیان است؟ $(\pi \simeq ۳)$

① ۶۰ ② ۱۷ ③ ۳٫۱۴ ④ ۰٫۰۱۷

۵۹ - انتهای کمان‌های ۳ و ۴٫۵ رادیان به‌ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

① دوم - دوم ② دوم - سوم ③ سوم - سوم ④ سوم - چهارم

۶۰ - اگر $A=\cos^۲ ۱۵+\cos^۲ ۲۵+\cos^۲ ۳۵+\cos^۲ ۴۵+\cos^۲ ۵۵+\cos^۲ ۶۵+\cos^۲ ۷۵$ باشد، مقدار عددی $۲A$ کدام است؟!

① ۵ ② ۷ ③ ۹ ④ ۱۱

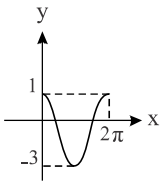
۶۱ - اگر $\tan ۱۵^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{۳\cos ۱۶۵^\circ - ۲\sin ۲۸۵^\circ}{۳\sin ۳۴۵^\circ - ۴\cos ۲۵۵^\circ}$ کدام است؟

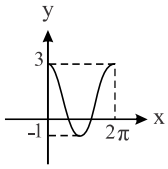
① $-\frac{۱}{a}$ ② $-a$ ③ $-\frac{۲}{a}$ ④ $-۲a$

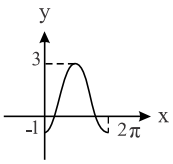
۶۲ - حاصل عبارت $A=۲\sin^۲(۲۲۵^\circ)+۴\sin^۲(۳۰۰^\circ)-\frac{\cos(۵۷۰^\circ)}{\cos(۳۹۰^\circ)}-\tan(۱۳۵^\circ)$ کدام است؟

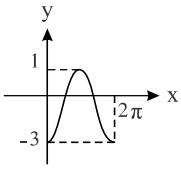
① ۷ ② ۶ ③ ۵ ④ ۴

۶۳ - نمودار تابع $y=-۲\cos x+۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

۶۴ - در یک تراکتور شعاع چرخ جلو $۵۰cm$ و شعاع چرخ عقب $۱۲۰cm$ است. اگر چرخ جلو ۹۰ درجه بچرخد، چرخ عقب چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

① $\frac{\pi}{۴}$ ② $\frac{\pi}{۳}$ ③ $\frac{۵\pi}{۲۴}$ ④ $\frac{۳\pi}{۸}$

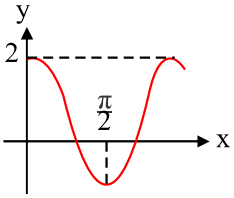
۶۵ - اگر $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})+\sin(۳\pi+\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)+\cos(\alpha-\pi)}$ کدام است؟

① ۵ ② ۱ ③ -۳ ④ -۴

۶۶ - حاصل عبارت $\frac{\sin(۷۵۰^\circ)+\cos(-۴۲۰^\circ)}{۲\tan(-۳۱۵^\circ)}$ با مقدار کدام گزینه برابر است؟

① $\cos(۲۱۰^\circ)$ ② $\sin(۲۱۰^\circ)$ ③ $\cos(۲۷۰^\circ)$ ④ $\sin(۱۵۰^\circ)$

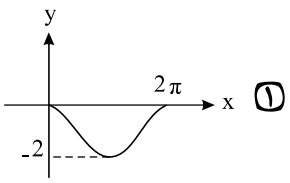
۶۷ - اگر نمودار تابع $y=a\cos bx$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام مقدار برای $a+b$ ممکن است؟

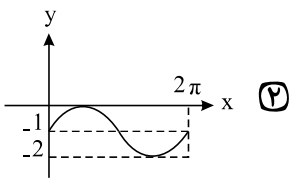


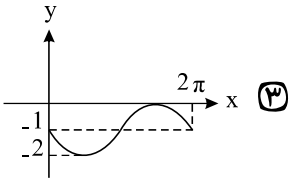
① ۳ ② ۲ ③ ۶ ④ ۴

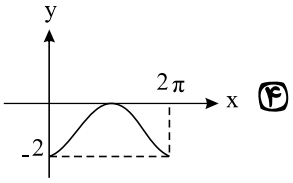
@mir_azmoon11

۶۸- بخشی از نمودار تابع $y=\sin(\frac{۷\pi}{۲}+x)-۱$ شبیه کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

۶۹- نمودار تابع $y=۱-\cos(x-\frac{\pi}{۶})$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند بار به محور xها برخورد می‌کند؟

① ۲ ② ۱ ③ صفر ④ ۳

۷۰- تابع $f(x)=\sin x$ در کدام بازه یک‌به‌یک است؟

① $[\frac{۴\pi}{۳},۴\pi]$ ② $[\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}]$ ③ $[۰,\frac{۵\pi}{۶}]$ ④ $[-\pi,۰]$

فصل ۵- لگاریتم

۷۱- حاصل $\log_{۴}^{\sqrt{۲}}+\log_{\frac{۱}{۸}}^{۲}$ چقدر است؟

① $\frac{۱۱}{۱۲}$ ② $\frac{۷}{۱۲}$ ③ $\frac{۱۹}{۲۴}$ ④ $\frac{۷}{۴}$

۷۲- اگر $\log_b^a=\frac{۳}{۲}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^۲}$ کدام است؟

① ۴ ② ۵ ③ ۶ ④ ۷

۷۳- ساده شده‌ی عبارت $۵^{(۲\log_۵^۲+۳\log_۵^۳)}$ برابر است با:

① ۵ ② ۳۶ ③ ۱۰۸ ④ $۵^۶$

۷۴- حاصل $\frac{\log ۸+\log ۳}{\log ۲+\log\sqrt{۶}}$ کدام است؟

① ۲ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ ۲۴ ④ $۲\sqrt{۶}$

۷۵- اگر $\log_۲^{(x^۳+۵)}=۵$، آن گاه حاصل $\log_۵^{(x^۲-۴)}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۴}$

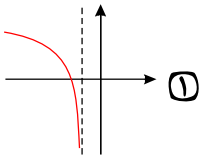
۷۶- اگر $\log ۲=۰/۳۰۱$ و $\log ۳=۰/۵$ باشد. $\log ۶۰۰۰$ برابر است با:

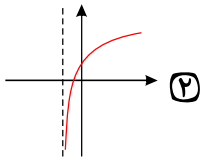
① ۳/۲۲۲ ② ۳/۸۰۱ ③ ۴/۷۷۸ ④ ۳/۰۰۲

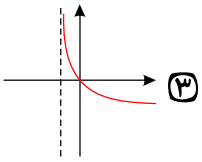
۷۷- جواب معادله‌ی $۲\log x-\log(x+۲)=۱$ کدام است؟

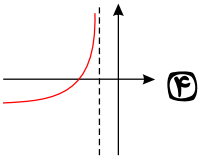
① $۵+۳\sqrt{۵}$ ② $۵-۳\sqrt{۵}$ ③ $۴+۲\sqrt{۵}$ ④ $۴-۲\sqrt{۵}$

۷۸- نمودار $y=\log_{۰/۲۵}^{(x+۱)}$ به کدام صورت است؟

① 

② 

③ 

④ 

۷۹- حاصل عبارت $۹^{\log_۳^{\sqrt{۵}}}+\log_{۰/۲}^{۶۲۵}$ کدام است؟

① -۱ ② -۹ ③ ۹ ④ ۱

@mir_azmoon11

۸۰ - قدرت تخریب زلزلهٔ ۹ ریشتری چند برابر قدرت تخریب زلزلهٔ ۷ ریشتری می‌باشد؟

① ۱۰۰ ② ۲۰۰ ③ ۱۰۰۰ ④ ۲۰

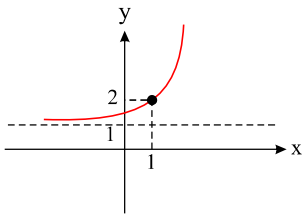
۸۱ - اگر $(\frac{۱}{۳})^{۲x+۱} < (\frac{۱}{۳})^{۵-x}$ باشد، آن‌گاه حدود x کدام است؟

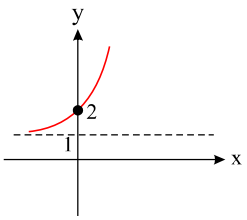
① $x < \frac{۴}{۳}$ ② $x > \frac{۴}{۳}$ ③ $x < ۲$ ④ $x > ۲$

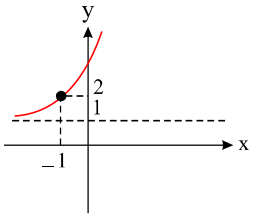
۸۲ - نمودار تابع $y = -۳^{(x-۱)}$ از کدام ناحیه‌های محورهای مختصات می‌گذرد؟

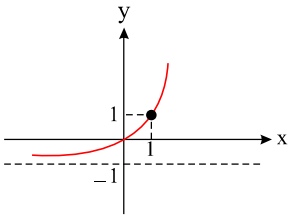
① سوم و چهارم ② دوم و چهارم ③ اول، دوم و چهارم ④ اول و دوم

۸۳ - نمودار تابع $y = ۲^{(x-۱)} + ۱$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

۸۴ - اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۶ \simeq ۰/۷۸$ باشد، حاصل $\log ۱۵$ کدام است؟

① ۱/۱۲ ② ۱/۱۸ ③ ۱/۰۸ ④ ۱/۲۲

۸۵ - اگر $\log ۵ = ۳k$ باشد، $\log \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟

① $۱ - ۴k$ ② $۲ - ۵k$ ③ $۱ - ۲k$ ④ $۱ - k$

۸۶ - از تساوی $\log_x^۵ + ۱ = \log_x(x^۲ + ۴)$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۲، کدام است؟

① -۱ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ ۲

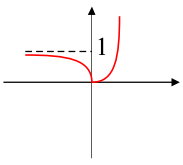
۸۷ - از معادله‌ی لگاریتمی $\log_۳(۲x^۲ + ۱) - \log_۳(x + ۲) = ۱$، مقدار لگاریتم $(۲x - ۱)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

① $-\frac{۲}{۳}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۸۸ - اگر $\log ۲ = k$ باشد حاصل $۲\log(۱ + \sqrt{۵}) + \log(۶ - ۲\sqrt{۵})$ کدام است؟

① $۲ + ۴k$ ② $۴k$ ③ $۱ + k$ ④ $۲k$

۸۹ - شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟



① $y = -۲^{-x}$ ② $y = ۲^{-|x|}$ ③ $y = ۲^{x+۱} - ۱$ ④ $y = |۲^x - ۱|$

۹۰ - اگر $\log(۸۱)^k = \log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳}$، آنگاه لگاریتم $\frac{۵}{k}$ در پایه‌ی ۲ کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

@mir_azmoon11

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ نقطهٔ O مرکز دایره، روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، یعنی: $O(\alpha,\alpha)$

دو نقطهٔ $(k,2k-1)$ و $(0,-1)$ دو سر یک قطر دایره هستند، پس نقطهٔ $O(\alpha,\alpha)$ وسط این دو نقطه است:

$$\begin{cases} x_O=\dfrac{0+k}{2} \\ y_O=\dfrac{-1+2k-1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{k}{2} \\ \alpha=\dfrac{2k-2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{k}{2} \\ \alpha=k-1 \end{cases} \rightarrow \frac{k}{2}=k-1$$

$$\rightarrow k=2k-2 \rightarrow 2=2k-k \rightarrow \boxed{k=2} \rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

$$\rightarrow O(1,1)$$

و اگر نقطهٔ B قرینهٔ نقطهٔ $A(-2,3)$ نسبت به نقطهٔ $O(1,1)$ باشد؛ داریم:

$$\begin{cases} x_O=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_O=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{-2+x_B}{2} \\ 1=\dfrac{3+y_B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2=-2+x_B \rightarrow \boxed{x_B=4} \\ 2=3+y_B \rightarrow \boxed{y_B=-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow B(4,-1)$$

۲ - گزینه ۳

$$2x+2y=2 \xrightarrow[\text{(نقطه‌ای به طول ۴)}]{x=4} 3(4)+2y=2 \rightarrow 12+2y=2$$

$$\rightarrow 2y=-10 \rightarrow \boxed{y=-5} \rightarrow B(4,-5)\ ,\ A(2,1)$$

$$\rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(-5-1)^2}$$

$$\rightarrow \overline{AB}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=\sqrt{4\times 10} \rightarrow \boxed{\overline{AB}=2\sqrt{10}}$$

۳ - گزینه ۳

$$7x-4y+8=0$$

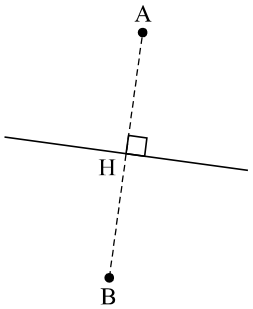
$$-14x+8y+2=0 \xrightarrow{\div(-2)} 7x-4y-1=0$$

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|8-(-1)|}{\sqrt{7^2+(-4)^2}}=\frac{9}{\sqrt{49+16}}=\frac{9}{\sqrt{65}}$$

۴ - گزینه ۲ طول پاره‌خط AB دو برابر طول پاره‌خط AH (فاصله نقطه A از خط) می باشد و داریم:



$$y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4} \rightarrow 4y=3x+9 \rightarrow 3x-4y+9=0$$

$$AH=d=\frac{|3(1)-4(-2)+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4 \rightarrow AB=2\times 4=8$$

۵ - گزینه ۲ مرکز دایره محل تلاقی قطرهای دایره است و داریم:

$$\begin{cases} y+x=3 \\ 3y-2x=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y+2x=6 \\ 3y-2x=-1 \end{cases} + \rightarrow O(2,1) \text{ مرکز دایره است.}$$

$$5y=5 \rightarrow y=1\ ,\ x=2$$

@mir_azmoon11

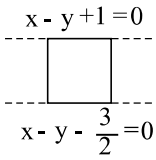
فاصلهٔ $O(۲,۱)$ مرکز دایره تا نقطهٔ $A(-۱,۰)$ برابر شعاع دایره است:

$$R = OA = \sqrt{(۲-(-۱))^۲ + (۱-۰)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$$

$$\to S = \pi R^۲ \overset{R=\sqrt{۱۰}}{\Longrightarrow} S = ۱۰\pi$$

۶ ـ گزینه ۳

شیب هر دو خط یک می‌باشند یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.



(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\text{ضلع مربع} = d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|۱-(-\frac{۳}{۲})|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^۲ = (\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})^۲ = \frac{۲۵}{۸}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۷ ـ گزینه ۲ هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می‌توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$S = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C) + x_B(y_C-y_A) + x_C(y_A-y_B)|$$

$$= \frac{۱}{۲}|۲(۰-۲) + ۳(۲-۵) + ۰(۵-۰)| = \frac{۱}{۲}|-۴-۹+۰| = \frac{۱۳}{۲} = ۶٫۵$$

۸ ـ گزینه ۱ ابتدا با استفاده از مختصات دو سر قطر، مختصات مرکز دایره را محاسبه می‌کنیم. مرکز دایره وسط قطر قرار دارد پس:

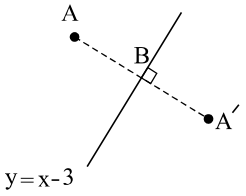
$$O'\begin{vmatrix} x_O = \frac{x_A+x_B}{۲} = \frac{-۴+۱}{۲} = -\frac{۳}{۲} \\ y_O = \frac{y_A+y_B}{۲} = \frac{۷+۵}{۲} = ۶ \end{vmatrix} \Rightarrow O'\begin{vmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ ۶ \end{vmatrix}$$

حال باید معادله خطی را بنویسیم که از نقاط $O'\begin{vmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ ۶ \end{vmatrix}$ و مبدأ مختصات $O\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ عبور می‌نماید. ابتدا شیب را محاسبه می‌نماییم.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۶-۰}{-\frac{۳}{۲}-۰} = -۴ \Rightarrow y - y_۰ = m(x-x_۰) \Rightarrow y-۰ = -۴(x-۰)$$

$$\Rightarrow y = -۴x \Rightarrow \boxed{y+۴x=۰}$$

۹ ـ گزینه ۲



معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(۳,۲)$ می‌گذرد و بر خط $y=x-۳$ عمود است را می‌نویسیم، دو خط عمود بر هم شیب های قرینه و معکوس هم دارند پس:

$$m' = ۱ \to m = -۱$$

$$y-۲ = -۱(x-۳) \Rightarrow y-۲ = -x+۳ \Rightarrow y = -x+۵$$

برای به‌دست آوردن مختصات نقطه‌ی B، محل برخورد دو خط را به‌دست می‌آوریم (حل دستگاه):

$$\begin{cases} y = -x+۵ \\ y = x-۳ \end{cases} \Rightarrow x-۳ = -x+۵ \Rightarrow ۲x = ۸ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = ۴-۳ = ۱ \Rightarrow B(۴,۱)$$

نقطه‌ی B وسط A و A' قرار دارد. مختصات وسط پاره خط با رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

@mir_azmoon11

B وسط پاره خط $\begin{cases} x_B = \dfrac{x_A + x_{A'}}{۲} \\ y_B = \dfrac{y_A + y_{A'}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴ = \dfrac{۳ + x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'} = ۵ \\ ۱ = \dfrac{۲ + y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'} = ۰ \end{cases} \Rightarrow A'(۵, ۰)$

۱۰ - گزینه ۱

$x^۲ - ۴x + m = ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x + m - ۵ = ۰$

این معادله‌ی درجه‌ی دوم نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$\Delta < ۰ \rightarrow b^۲ - ۴ac < ۰ \rightarrow \Delta = ۱۶ - ۴(m-۵) < ۰ \Rightarrow ۴m > ۳۶ \Rightarrow m > ۹$

۱۱ - گزینه ۲

$S = x_۱ + x_۲ = -\dfrac{b}{a} = \sqrt{۳} + \sqrt{۲} \quad , \quad P = x_۱ \cdot x_۲ = \dfrac{c}{a} = \sqrt{۶}$

$x_۱^۲ + x_۲^۲ = S^۲ - ۲P$

$x_۱^۲ + x_۲^۲ = (x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ = (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})^۲ - ۲\sqrt{۶} = ۳ + ۲ + ۲\sqrt{۶} - ۲\sqrt{۶} = ۵$

۱۲ - گزینه ۱ روش اول: اگر y ریشه ی معادله ی جدید و x ریشه های معادله ی قدیم باشد. آنگاه $y = ۹x$ پس: $x = \dfrac{y}{۹}$ لذا:

$x^۲ + x - ۳ = ۰ \Rightarrow (\dfrac{y}{۹})^۲ + \dfrac{y}{۹} - ۳ = ۰ \Rightarrow y^۲ + ۹y - ۲۴۳ = ۰$

روش دوم: کافی است b را در ۹ و c را در $۹^۲$ ضرب کنید.

$x^۲ + x - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۹x - ۲۴۳ = ۰$

(ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bkx + ck^۲ = ۰$ ، k برابر ریشه‌های معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشند.)

۱۳ - گزینه ۳

$S = x_۱ + x_۲ = -\dfrac{b}{a} = ۴ \quad , \quad P = x_۱ \cdot x_۲ = \dfrac{c}{a} = ۱$

$\dfrac{۱}{x_۱} + \dfrac{۱}{x_۲} = \dfrac{x_۲ + x_۱}{x_۱x_۲} = \dfrac{۴}{۱} = ۴$

۱۴ - گزینه ۴ کمترین یا بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم همان عرض نقطه‌ی S است.

$\dfrac{۴ac - b^۲}{۴a} = \dfrac{۸ - ۱}{۴} = \dfrac{۷}{۴}$

۱۵ - گزینه ۲

$f(x) = x^۲ + bx + c$

$\Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۰ \rightarrow \boxed{c = ۰} \\ f(-۲) = ۰ \rightarrow ۴ - ۲b + c = ۰ \rightarrow \boxed{b = ۲} \\ f(۱) = n \rightarrow \boxed{n = ۴} \end{cases} \rightarrow n + b + c = ۶$

۱۶ - گزینه ۲

$(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲ + x = A} A^۲ - ۱۸A + ۷۲ = ۰ \Rightarrow (A - ۱۲)(A - ۶) = ۰$

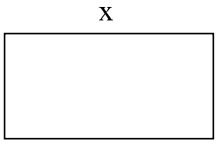
$\begin{matrix} A = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta > ۰} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -۱ \\ A = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \xrightarrow{\Delta > ۰} \alpha' + \beta' = -\dfrac{b}{a} = -۱ \end{matrix} \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -۲$

۱۷ - گزینه ۲ می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم ($a < ۰$) برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$y_s = \dfrac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۹ \rightarrow \dfrac{۲۰a - ۱۶}{۴a} = ۹ \rightarrow ۳۶a = ۲۰a - ۱۶ \rightarrow ۱۶a = -۱۶ \rightarrow a = -۱$

پس خط به معادله‌ی $x = \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-(۴)}{۲(-۱)} = ۲$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

۱۸ - گزینه ۴



محیط مستطیل $= ۱۸۰ \rightarrow ۲(x + y) = ۱۸۰ \rightarrow x + y = ۹۰ \rightarrow y = ۹۰ ? x$

مساحت مستطیل $= xy = x(۹۰ ? x) = ? x^۲ + ۹۰x$: تابع درجه‌ی دوم

$x_{Max} = \dfrac{? b}{۲a} = \dfrac{? ۹۰}{? ۲} = ۴۵$

۱۹ - گزینه ۲ طول رأس سهمی برابر $x_s = -۲$ است و چون تابع درجه‌ی دوم از مبدأ مختصات گذشته پس یکی از نقاط برخورد تابع با محور xها $x_۱ = ۰$ است بنابراین محل دیگر برخورد تابع با محور xها $x_۲ = -۴$ است $(x_S = \dfrac{x_۱ + x_۲}{۲})$

@mir_azmoon11

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\xrightarrow[x_2=-۴]{x_1=۰} f(x)=a(x-۰)(x+۴)\to f(x)=ax(x+۴)$$

چون نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}-۲\\ ۴\end{matrix}\right.$ روی سهمی قرار دارد پس مختصاتش در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}-۲\\ ۴\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۴=-۲a(-۲+۴)\to ۴=-۴a\to a=-۱$$

۲۰ - گزینه ۲ چون شکل دارای Max است ضریب $x^۲$ باید منفی باشد بنابراین گزینه‌ی سوم حذف می‌شود. تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت و منفی قطع کرده است بنابراین حاصلضرب ۲ ریشه یعنی $\frac{c}{a}$ باید منفی باشد. بنابراین گزینه‌ی اول حذف می‌شود و چون قدرمطلق ریشه‌ی مثبت از قدرمطلق ریشه‌ی منفی بزرگتر است جمع ۲ ریشه باید مثبت باشد یعنی $-\frac{b}{a}$ باید مثبت باشد بنابراین گزینه‌ی چهارم حذف می‌شود.

۲۱ - گزینه ۲ چون تابع درجه‌ی دوم محور طول‌ها را در ۳ و $x=-۲$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x+۲)(x-۳)$ نشان داد و چون این تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\ -۵\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\ -۵\end{matrix}\right.\to -۵=a(۲)(-۳)\Rightarrow -۵=-۶a\Rightarrow a=\frac{۵}{۶}$$

$$y=\frac{۵}{۶}(x+۲)(x-۳)=\frac{۵}{۶}(x^۲-x-۶)=\frac{۵}{۶}x^۲-\frac{۵}{۶}x-۵$$

$$\Rightarrow a=\frac{۵}{۶}\ ,\ b=-\frac{۵}{۶}\ ,\ c=-۵\to a+b+c=-۵$$

۲۲ - گزینه ۱

نمودار سهمی را به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$(-۱,۲)\in f\to a(-۱)^۲+b(-۱)+c=۲\to a-b+c=۲$$
$$(۱,۰)\in f\to a(۱)^۲+b(۱)+c=۰\to a+b+c=۰$$
$$(۰,۱)\in f\to a(۰)^۲+b(۰)+c=-۱\to c=-۱$$

در نتیجه:

$$\to\begin{cases}a-b-۱=۲\\ a+b-۱=۰\end{cases}\to\begin{cases}a-b=۳\\ a+b=۱\end{cases}+$$
$$۲a=۴\to a=۲\ ,\ b=-۱$$

$$\to f(x)=y=۲x^۲-x-۱$$

۲۳ - گزینه ۳

زمان انجام کار توسط ماشین تندتر $=x$ و زمان انجام کار توسط ماشین کندتر $=۲x$

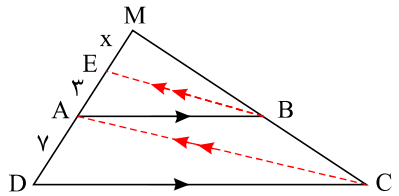
$$\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}\to\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۲x}\to ۱۲=۲x\to x=۶\to ۲x=۱۲$$

۲۴ - گزینه ۱

$$\frac{۲x}{x^۲-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^۲-x}$$
$$\to\left(\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}=\frac{۲-x}{x(x-۱)}\right)\times x(x-۱)(x+۱)$$
$$\to ۲x^۲+۲x(x-۱)=(۲-x)(x+۱)\to ۲x^۲+۲x^۲-۲x=۲x+۲-x^۲-x$$
$$\to ۵x^۲-۳x-۲=۰\xrightarrow{۵-۳-۲=۰}\begin{cases}x=۱ & \text{غیر قابل قبول چون ریشهٔ مخرج است}\\ x=\frac{c}{a}\to \boxed{x=-\frac{۲}{۵}}\end{cases}$$

۲۵ - گزینه ۲ کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{MAC}:BE\parallel AC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{ME}{AE}=\frac{MB}{BC}\\ \overset{\Delta}{MDC}:AB\parallel CD\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{MA}{AD}=\frac{MB}{BC}\end{cases}\Rightarrow\frac{ME}{AE}=\frac{MA}{AD}$$



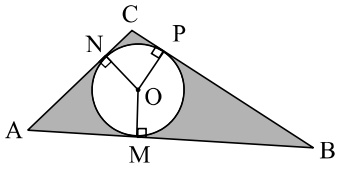
$$\Rightarrow\frac{x}{۳}=\frac{x+۳}{۷}\Rightarrow ۷x=۳x+۹\Rightarrow ۴x=۹\Rightarrow x=۲/۲۵$$

در نتیجه: $MD=۲/۲۵+۳+۷=۱۲/۲۵$

۲۶ - گزینه ۱ هر نقطهٔ روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، پس داریم:

@mir_azmoon11

$$OM = ON = OP = ۲$$



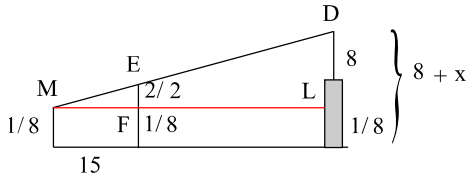
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} = \frac{۲ \times AB}{۲} + \frac{۲ \times AC}{۲} + \frac{۲ \times BC}{۲} = \underbrace{(AB + AC + BC)}_{\text{محیط}} = ۲۴$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = ۳ \times ۲^۲ = ۱۲$$

$$\text{مساحت هاشورخورده} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{دایره}} = ۲۴ - ۱۲ = ۱۲$$

۲۷ - گزینه ۲ ازنقطه‌ی M موازی خطی موازی سطح افق رسم کرده، باتوجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:

$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{۲٫۲}{۸ + x - ۱٫۸} = \frac{۱۵}{۱۸۰} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x = ۲۰٫۲$$



۲۸ - گزینه ۳ اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازیند پس دو مثلث متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{۷}{۱۷٫۵}\right)^۲ \Rightarrow \frac{\frac{۴ \times ۷}{۲}}{S'} = \left(\frac{۷}{\frac{۳۵}{۲}}\right)^۲ \Rightarrow S' = \frac{۱۷۵}{۲} = ۸۷٫۵$$

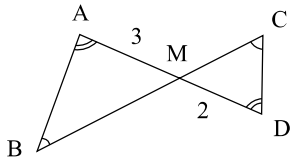
۲۹ - گزینه ۴ با طرفین وسطین کردن کسر داده شده داریم:

$$۶(۲a + ۳b) = ۵(۳a + ۲b) \Rightarrow ۱۲a + ۱۸b = ۱۵a + ۱۰b \Rightarrow ۸b = ۳a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۸}{۳}$$

۳۰ - گزینه ۳ تذکر: وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta MCD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{S_{MCD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}$$



۳۱ - گزینه ۲

چون دو مثلث قابل انطباق نمی‌باشند یعنی دو مثلث مساوی نیستند و در نتیجه در دو مثلث، اضلاع به طول ۳ نمی‌توانند متشابه باشند اگر فرض کنیم $a > b$ است یکی از این دو حالت رخ می‌دهد.

$$\frac{۳}{۴} = \frac{a}{۵} = \frac{b}{۳} \to a = \frac{۱۵}{۴}, b = \frac{۹}{۴} \to \text{محیط} = ۳ + \frac{۹}{۴} + \frac{۱۵}{۴} = ۹$$

$$\frac{۳}{۵} = \frac{a}{۴} = \frac{b}{۳} \to a = \frac{۱۲}{۵}, b = \frac{۹}{۵} \to \text{محیط} = ۳ + \frac{۱۲}{۵} + \frac{۹}{۵} = ۷٫۲$$

که بیشترین محیط برابر ۹ است.

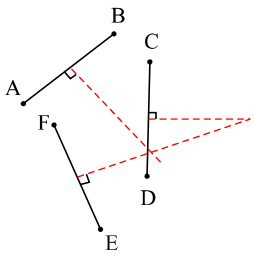
۳۲ - گزینه ۱

$$\angle B = \angle E \Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{AB} = \frac{۶}{۹} \Rightarrow AB = ۱۲ \Rightarrow EB = AB - AE = ۴$$

۳۳ - گزینه ۱

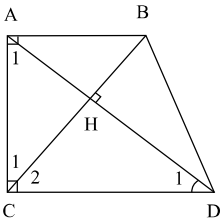
می‌توان از خاصیت عمود منصف یک پاره خط استفاده کرد، زیرا هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

با توجه به تصویر هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.



@mir_azmoon11

۳۴ - گزینه ۴ مثلث‌های ABD و ACD متشابه‌اند، زیرا:



$$\left.\begin{matrix}\hat{D}_1+\hat{D}_2=90^\circ\\ \hat{C}_1+\hat{D}_2=90^\circ\\ \hat{A}=\hat{D}=90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{D}_1=\hat{C}_1 \Big\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABD}\sim\overset{\triangle}{ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow AD^2=AB\times CD\Rightarrow AD^2=7\times 28=196\Rightarrow AD=14$$

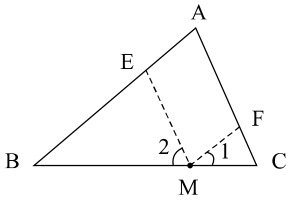
روش دوم: نکته: اگر دو قطر ذوزنقه بر هم عمود باشند، ارتفاع واسطه‌ی هندسی بین دو قاعده است.

در ذوزنقه‌ی قائم الزاویه ارتفاع همان ساق قائم است.

$$AD^2=AB\times DC\to AC^2=7\times 28\to AD=14$$

۳۵ - گزینه ۲

$$\left.\begin{matrix}MF\parallel AB\Rightarrow \angle M_1=\angle B\\ ME\parallel AC\Rightarrow \angle M_2=\angle C\end{matrix}\right\}\Rightarrow \Delta BEM\sim\Delta MFC$$



پس $\frac{BE}{MF}=\frac{ME}{CF}$ یا $BE\times CF=ME\times MF$ چون $MF=AE$ و $ME=AF$ پس:

$$BE\times FC=AE\times AF$$

بنابراین نسبت خواسته شده یک است.

۳۶ - گزینه ۳ دو لوزی که زاویه‌ی مساوی داشته باشند، متشابه‌اند.

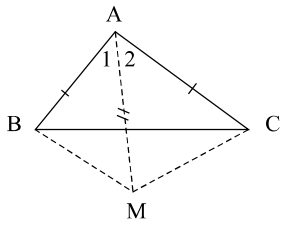
در مورد گزینه‌ی ۱: دو مستطیل زمانی متشابه‌اند که نسبت طول به عرض یکی با طول به عرض دیگری یکسان باشد.

در مورد گزینه‌ی ۲: دو متوازی الاضلاع که زوایای مساوی دارند باید اضلاع متناظر متناسب داشته باشند تا متشابه باشند.

در مورد گزینه‌ی ۴: دو ذوزنقه‌ی متساوی الساقین که زوایای مساوی دارند وقتی متشابه‌اند که اضلاع متناظر متناسب داشته باشند.

۳۷ - گزینه ۱

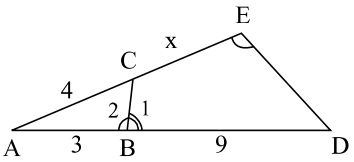
$$AM^2=AB\times AC\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{AM}{AB}=\frac{AC}{AM}\\ \angle A_1=\angle A_2\end{matrix}\right.\Rightarrow \Delta AMB\sim\Delta AMC$$



دو مثلث دو ضلع متناسب و زاویه‌ی بین مساوی دارند.

۳۸ - گزینه ۱

$$\left.\begin{matrix}\hat{E}+\hat{B}_1=180^\circ\\ \hat{B}_2+\hat{B}_1=180^\circ\end{matrix}\right\}\to \hat{E}=\hat{B}_2$$

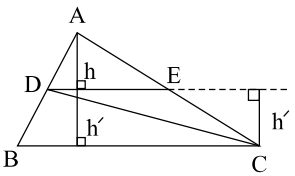


دو مثلث ABC و AED متشابه هستند ($\hat{A}$ مشترک و $\hat{E}=\hat{B}_2$) اکنون نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE}\to\frac{4}{3+9}=\frac{3}{x+4}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{3}{x+4}\Rightarrow x=5$$

۳۹ - گزینه ۴

چون $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{7}$ است پس $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{4}$ می‌باشد.

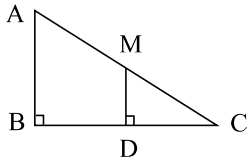


$$DE\|BC\xrightarrow[\overset{\triangle}{ABC}\text{ رابطه‌ی تالس در}]{}\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{h}{h'}=\frac{3}{4}$$

@mir_azmoon11

پس: $\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{DE \times h}{۲}}{\frac{DE \times h'}{۲}} = \frac{h}{h'} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$

۴۰ - گزینه ۳



$$MD \perp BC \Rightarrow MD \parallel AB \Rightarrow \Delta MCD \sim \Delta ABC$$

چون نسبت تشابه ۲ است.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MDC}} = \left(\frac{۲}{۱}\right)^{۲} = ۴$$

۴۱ - گزینه ۳

$$f(x) = \frac{۳x - ۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳x - ۱}{۲}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$x = \frac{۳y - ۱}{۲} \Rightarrow ۲x = ۳y - ۱ \Rightarrow ۳y = ۲x + ۱ \Rightarrow y = \frac{۲x + ۱}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x + ۱}{۳}$$

۴۲ - گزینه ۲ تابع $f(x) = x^{۲} - ۶x + ۱۰$ سهمی است و برای اینکه یک‌به‌یک باشد دامنهٔ انتخاب‌شده باید دو طرف رأس سهمی نباشد طول رأس سهمی می‌تواند ابتدا یا انتهای بازه باشد، پس داریم:

به شرط گفته شده در بالا تنها گزینهٔ ۲ یعنی $(-۳, ۳]$ قابل قبول است. $x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۶}{۲(۱)} = ۳ \rightarrow$ (رأس سهمی)

۴۳ - گزینه ۲ شرط تساوی دو تابع اول برابری دسته‌هاست و سپس ساده شده‌ی ضابطه با هم برابر باشد.

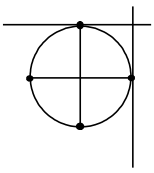
$a)$ $f(x) = \sin^{۲}x \rightarrow \cos^{۲}x \qquad D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = ۱ \quad D_g = \mathbb{R}$

حال که $D_f = D_g$ باید ساده شده ی ضابطه‌ی f را تعیین نمائیم.

$$f(x) = \sin^{۲}x + \cos^{۲}x = ۱ \rightarrow f(x) = g(x)$$

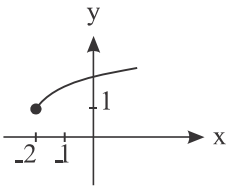
$b)$ $f(x) = \frac{x^{۴} - ۱}{x^{۲} - ۱} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{\pm ۱\} \quad \rightarrow \; D_f \neq D_g \rightarrow f(x) \neq g(x)$
$g(x) = x^{۲} + ۱ \qquad D_g = \mathbb{R}$

$c)$ $f(x) = \tan x \cdot \cot x$
$g(x) = ۱ \quad D_g = \mathbb{R}$
$D_f \neq D_g \rightarrow f(x) \neq g(x)$

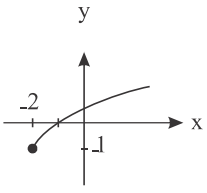


$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{۲}\right\}$$

۴۴ - گزینه ۳ گزینهٔ «۱»: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x + ۲} + ۱$، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

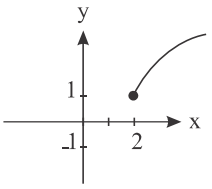


گزینهٔ «۲»: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x + ۲} - ۱$، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

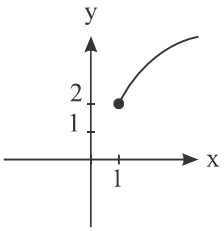


گزینهٔ «۳»: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۲} + ۱$، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

@mir_azmoon11



گزینهٔ «۴»: برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-1}+2$، نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۴۵ - گزینه ۴

روش اول:

ابتدا تابع f را می‌یابیم:

$$f=\{(۳,۲),(-۱,۱),(۲,۰),(۰,-۱)\}$$

دامنهٔ تابع $\frac{۲f^{-۱}}{f}$ برابر است با:

$$D_{\frac{۲f^{-۱}}{f}}=D_{f^{-۱}}\cap D_f-\{x|f(x)=۰\}=\{۲,۱,۰,-۱\}\cap\{۳,-۱,۲,۰\}-\{۲\}=\{-۱,۰\}$$

بنابراین:

$$x=۰:\left(\frac{۲f^{-۱}}{f}\right)(۰)=\frac{۲f^{-۱}(۰)}{f(۰)}=\frac{۲(۲)}{-۱}=-۴\Rightarrow(۰,-۴)\in\frac{۲f^{-۱}}{f}$$

روش دوم:

$$f^{-۱}=\{(۲,۳),(۱,-۱),(۰,۲),(-۱,۰)\}\rightarrow\begin{cases}۲f^{-۱}=\{(۲,۶),(۱,-۲),(۰,۴),(-۱,۰)\}\\ f=\{(۳,۲),(-۱,۱),(۲,۰),(۰,-۱)\}\end{cases}$$

$$\rightarrow\frac{۲f^{-۱}}{f}=\{(۲,\frac{۶}{۰}),(۰,\frac{۴}{-۱}),(-۱,\frac{۰}{۱})\}=\{(۰,-۴),(-۱,۰)\}$$

۴۶ - گزینه ۳

تمام عملیات جبری، روی مولفه‌ی دوم انجام می‌شود.

$$\begin{matrix}۲g=\{(۲,۴),(-۱,۶),(۴,-۲)\}\\ f=\{(۲,۱),(-۱,۰),(۴,۱)\}\end{matrix}\Rightarrow\frac{۲g}{f}=\{(۲,۴),(۴,-۲)\}$$

برای تقسیم کردن، زوج‌های مرتبی از دو تابع را در نظر گرفته که دارای xهای برابر باشند. سپس xهای آن‌ها را نوشته و عرض‌های آن‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

۴۷ - گزینه ۳ در تابع ثابت متغیر x وجود ندارد. پس ضریب $x^۳$ و x باید صفر باشد.

$$\left.\begin{matrix}m-۳=۰\rightarrow m=۳\\ m^۲-۹=۰\rightarrow m=\pm۳\end{matrix}\right\}\text{مقدار مشترک } m=۳$$

پس مقدار نهائی برابر است با: $m^۳-m+۷=۲۷-۳+۷=۳۱$

۴۸ - گزینه ۱

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}\quad,\quad f^{-۱}(۳)=a\rightarrow\begin{bmatrix}۳\\ a\end{bmatrix}\in f^{-۱}\rightarrow\begin{bmatrix}a\\ ۳\end{bmatrix}\in f$$

$$\rightarrow f(a)=۳\rightarrow a+۲\sqrt{a}=۳\rightarrow۲\sqrt{a}=۳-a\xrightarrow{\text{توان ۲}}۴a=۹-۶a+a^۲$$

$$\rightarrow a^۲-۱۰a+۹=۰\rightarrow(a-۹)(a-۱)=۰\rightarrow\begin{cases}a=۱\ \checkmark\\ a=۹\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

۴۹ - گزینه ۴

(گزینهٔ ۱) $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ f و g برابر نیستند.

(گزینهٔ ۲) $D_f=[۰,+\infty)\ ,\ D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ f و g برابر نیستند.

(گزینهٔ ۳) $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۲\}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ f و g برابر نیستند.

@mir_azmoon11

g و f برابرند. $g(x)=\sqrt{x^{۳}}=\sqrt{x^{۲}\cdot x}=|x|\sqrt{x}\xrightarrow{x\geq ۰}g(x)=x\sqrt{x}=f(x)\Rightarrow$ (گزینهٔ ۴) $D_f=D_g=[۰,+\infty)$,

۵۰ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: $D_f=\mathbb{R}-\{۰,-۲\}$ و تابع گویا است.

گزینهٔ ۲: تابع گویا نیست.

گزینهٔ ۳: $D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۲\}$ و تابع گویا است.

گزینهٔ ۴: $D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$ و تابع گویا است.

۵۱ - گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}۲۰۰۰ & , \ ۰\leq x<۱\\ ۴۰۰۰ & , \ ۱\leq x<۲\\ ۶۰۰۰ & , \ ۲\leq x<۳\\ \vdots\end{cases}\rightarrow f(x)=۲۰۰۰[x+۱]$$

$$f(x)=۱۰۰۰۰۰\rightarrow ۲۰۰۰[x+۱]=۱۰۰۰۰۰\rightarrow[x+۱]=۵۰\rightarrow[x]+۱=۵۰\rightarrow[x]=۴۹\rightarrow ۴۹\leq x<۵۰$$

۵۲ - گزینه ۱

$$[x+\frac{۳}{۲}]=۳\Rightarrow ۳\leq x+\frac{۳}{۲}<۴$$

$$\Rightarrow ۱/۵\leq x<۲/۵\Rightarrow\begin{cases}a=۱/۵\\ b=۲/۵\end{cases}\Rightarrow a-b=-۱$$

۵۳ - گزینه ۴

$$f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۱]$$

(گزینهٔ ۱) $g(x)=\sqrt{-(۱-x)^{۲}}\Rightarrow -(۱-x)^{۲}\geq ۰\Rightarrow (۱-x)^{۲}\leq ۰\Rightarrow (۱-x)^{۲}=۰$

$\Rightarrow ۱-x=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow D_g=\{۱\}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ g و f مساوی نیستند.

(گزینهٔ ۲) $g(x)=\sqrt{(۱-x)^{۳}}\Rightarrow (۱-x)^{۳}\geq ۰\Rightarrow ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱\Rightarrow D_g=(-\infty,۱]=D_f$

$$g(x)=\sqrt{(۱-x)^{۲}(۱-x)}=|۱-x|\sqrt{۱-x}\xrightarrow{x\leq ۱}g(x)=(۱-x)\sqrt{۱-x}\neq f(x)$$

$\Rightarrow$ g و f برابر نیستند.

(گزینهٔ ۳) $g(x)=\sqrt{(x-۱)^{۳}}\Rightarrow (x-۱)^{۳}\geq ۰\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

$\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow$ g و f برابر نیستند.

(گزینهٔ ۴) $g(x)=-\sqrt{(۱-x)^{۳}}\Rightarrow D_g=D_f=(-\infty,۱]$

$$g(x)=-\sqrt{(۱-x)^{۲}(۱-x)}=-|۱-x|\sqrt{۱-x}\xrightarrow{x\leq ۱}g(x)=-(۱-x)\sqrt{۱-x}$$

$\Rightarrow g(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}=f(x)\Rightarrow$ g و f برابرند.

۵۴ - گزینه ۳ شرط آنکه دو تابع مساوی باشند، آن است که:

۱ – دامنهٔ دو تابع یکسان باشد.

۲ – برای هر x از دامنه، مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

این دو شرط باید هر دو برقرار باشند، یعنی اگر یکی برقرار نباشد، دو تابع مساوی نیستند.

$۱)D_f=D_g=R$, $f(-۲)=۲$, $g(-۲)=-۲\Rightarrow f(-۲)\neq g(-۲)$

$۲)D_f=D_g=R-\{۰\}$, $f(-\frac{۱}{۲})=۱$, $g(-\frac{۱}{۲})=-۱\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲})\neq g(-\frac{۱}{۲})$

$۴)D_f=R$, $D_g=R-\{۰\}\Rightarrow D_f\neq D_g$

@mir_azmoon11

۳) $D_f = R\ ,\ |x| + ۱ = ۰ \Rightarrow |x| = -۱$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_g = R \Rightarrow D_f = D_g = R$

$$f(x) = |x| - ۱\ \ ,\ \ g(x) = \frac{x^۲ - ۱}{|x| + ۱} \xrightarrow{x^۲ = |x|^۲} g(x) = \frac{|x|^۲ - ۱}{|x| + ۱} = \frac{(|x| - ۱)(|x| + ۱)}{|x| + ۱}$$

$$\Rightarrow g(x) = |x| - ۱ \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۵۵ - گزینه ۱ تابعی یک‌به‌یک است که اگر مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، مؤلفه‌های اول نیز یکسان باشند.

$$f = \{(-۳, k), (\frac{a}{۲}, -۲), (۲a + ۱, k), (b - ۱, ۱), (-۱, ۴b)\}$$

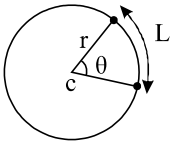
$$(-۳, k) \in f\ ,\ (۲a + ۱, k) \in f \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک}} ۲a + ۱ = -۳ \to ۲a = -۴ \to a = -۲$$

$$\to f = \{(-۳, k), (-۱, -۲), (-۳, k), (b - ۱, ۱), (-۱, ۴b)\}$$

$$(-۱, ۴b) \in f\ ,\ (-۱, -۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع}} ۴b = -۲ \to b = -\frac{۱}{۲}$$

پس: $a - b = -۲ - (-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۲}$

۵۶ - گزینه ۳



$$\to \theta = \frac{L}{r} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}} = ۲$$

۵۷ - گزینه ۳

$$\sin\alpha = \cos(۹۰ - \alpha)$$

$$\frac{۱ + \sin^۲ ۲۵ + \sin^۲ ۶۵}{\cot ۳۵ \cot ۵۵} = \frac{۱ + \sin^۲ ۲۵ + \cos^۲ ۲۵}{\frac{\cos ۳۵}{\sin ۳۵} \times \frac{\cos ۵۵}{\sin ۵۵}} = \frac{۱ + ۱}{\frac{\cos ۳۵}{\sin ۳۵} \times \frac{\sin ۳۵}{\cos ۳۵}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

۵۸ - گزینه ۴

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۱۸۰} \approx \frac{۳}{۱۸۰} = \frac{۱}{۶۰} \approx ۰٫۰۱۷$$

۵۹ - گزینه ۲

$$۱ \text{ رادیان} \simeq ۵۷٫۳ \text{ درجه} \to \begin{cases} ۳ \text{ رادیان} \simeq ۳ \times ۵۷٫۳^\circ \simeq ۱۷۱٫۹^\circ & (\text{ناحیهٔ دوم}) \\ ۴٫۵ \text{ رادیان} \simeq ۴٫۵ \times ۵۷٫۳^\circ \simeq ۲۵۷٫۸۵^\circ & (\text{ناحیهٔ سوم}) \end{cases}$$

۶۰ - گزینه ۲ می دانیم زوایای متمم، سینوس و کسینوس برابر هم دارند.

$$\sin\alpha = \cos(۹۰ - \alpha)$$

اگر طرفین را به توان دو برسانیم نتیجه می شودکه $\sin^۲\alpha = \cos^۲(۹۰ - \alpha)$ وخواهیم داشت:

$$A = \cos^۲ ۱۵ + \cos^۲ ۲۵ + \cos^۲ ۳۵ + \cos^۲ ۴۵ + \sin^۲ ۳۵ + \sin^۲ ۲۵ + \sin^۲ ۱۵ =$$

$$\underbrace{\sin^۲ ۱۵ + \cos^۲ ۱۵}_{۱} + \underbrace{\sin^۲ ۲۵ + \cos^۲ ۲۵}_{۱} + \underbrace{\sin^۲ ۳۵ + \cos^۲ ۳۵}_{۱} + \cos^۲ ۴۵ =$$

$$۱ + ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۲A = ۷$$

۶۱ - گزینه ۱

$$\begin{cases} \cos ۱۶۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ \\ \sin ۲۸۵^\circ = \sin(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ \\ \sin ۳۴۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin ۱۵^\circ \\ \cos ۲۵۵^\circ = \cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin ۱۵^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-۳\cos ۱۵^\circ + ۲\cos ۱۵^\circ}{-۳\sin ۱۵^\circ + ۴\sin ۱۵^\circ} = -\frac{\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ} = -\cot ۱۵^\circ = -\frac{۱}{a}$$

۶۲ - گزینه ۲ باید کمان‌ها را طوری بنویسیم که یکی از مضارب π یا مضارب $\frac{\pi}{۲}$ باشد. با توجه به کمان‌های مطرح شده، می‌توان نوشت:

$$A = ۲\sin^۲(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) + ۴\sin^۲(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ) - \frac{\cos(۵۴۰^\circ + ۳۰^\circ)}{\cos(۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ)} - \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ)$$

در این مرحله با توجه به ناحیهٔ قرار گرفتن کمان، علامت هر نسبت را تعیین کرده و تغییر لازم را ایجاد می‌نماییم:

@mir_azmoon11

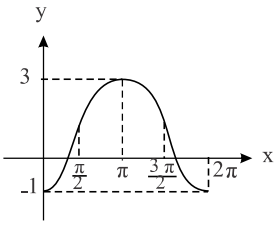
$$A = ۲(-\sin(۴۵^\circ))^۲ + ۴(-\sin(۶۰^\circ))^۲ - \frac{-\cos(۳۰^\circ)}{\cos ۳۰^\circ} - (-\tan ۴۵^\circ)$$

$$A = ۲(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + ۴(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ - (-۱) - (-۱) = ۱ + ۳ + ۱ + ۱ = ۶$$

۶۳ - گزینه ۳

$$-۲\cos ۰ + ۱ = -۲ + ۱ = -۱$$
$$-۲\cos\frac{\pi}{۲} + ۱ = ۰ + ۱ = ۱$$
$$-۲\cos\pi + ۱ = -۲ \times (-۱) + ۱ = ۳$$
$$-۲\cos\frac{۳\pi}{۲} + ۱ = ۰ + ۱ = ۱$$
$$-۲\cos ۲\pi + ۱ = -۲ + ۱ = -۱$$

x	y
۰	-۱
$\frac{\pi}{۲}$	۱
π	۳
$\frac{۳\pi}{۲}$	۱
۲π	-۱



۶۴ - گزینه ۳ مسافتی که دو چرخ طی می‌کنند، یکسان است. بنابراین داریم:

$$l_۱ = l_۲ \Rightarrow \theta_۱ r_۱ = \theta_۲ r_۲ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} \times ۵۰ = \theta_۲ \times ۱۲۰$$

$$\Rightarrow \theta_۲ = \frac{\pi \times ۵۰}{۲ \times ۱۲۰} \Rightarrow \theta = \frac{۵\pi}{۲۴}$$

۶۵ - گزینه ۱

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) = -\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha,\ \sin(۳\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = \sin\alpha\ ,\ \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \sin(۳\pi + \alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

$$\xrightarrow{\text{تک تک جملات را بر } \cos\alpha \text{ تقسیم می‌کنیم}} \frac{۱ + \tan\alpha}{۱ - \tan\alpha} = \frac{۱ + \frac{۲}{۳}}{۱ - \frac{۲}{۳}} = ۵$$

۶۶ - گزینه ۴

$$\sin ۷۵۰^\circ = \sin(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos(-۴۲۰^\circ) = \cos ۴۲۰^\circ = \cos(۳۶۰^\circ + ۶۰^\circ) = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan(-۳۱۵^\circ) = -\tan(۳۱۵^\circ) = -\tan(۳۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

پس: $$\frac{\sin ۷۵۰^\circ + \cos(-۴۲۰^\circ)}{۲\tan(-۳۱۵^\circ)} = \frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۲(۱)} = \frac{۱}{۲}$$

گزینهٔ ۴: $\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ ✓

۶۷ - گزینه ۴ می‌دانیم: دوره‌ی تناوب تابع $y = k \cdot \cos ax$ برابر $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ است.

@mir_azmoon11

باتوجه به شکل، نقطه‌ی $(۰, ۲)$ عضو تابع است پس در آن صدق می‌کند:

$$y(۰) = ۲ \Rightarrow ۲ = a\cos ۰ \Rightarrow a = ۲$$

از طرفی نصف دوره‌ی تناوب تابع باتوجه به شکل برابر $\frac{\pi}{۲}$ است، بنابراین:

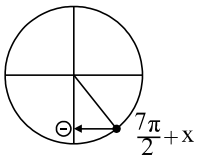
$$\frac{T}{۲} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

هر دو مقدار b قابل قبول است، پس $a + b$ می‌تواند برابر مقادیر صفر یا ۴ باشد.

۶۸ - گزینه ۴ برای یافتن گزینه صحیح ابتدا بهتر است کمان نسبت مثلثاتی را تغییر دهیم:

$$(\frac{۷\pi}{۲} + x) = (\frac{۸\pi - \pi}{۲} + x) = (۴\pi - \frac{\pi}{۲} + x)$$

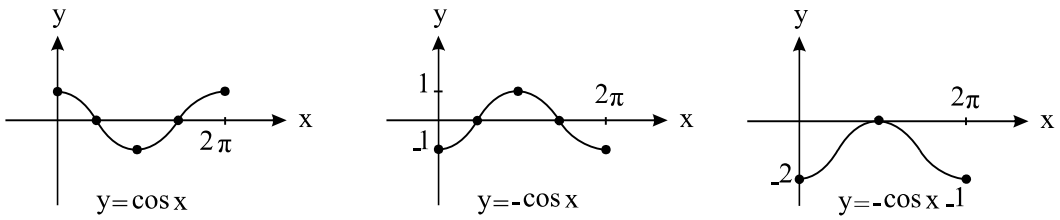
حال ناحیه این کمان را مشخص می‌نماییم:



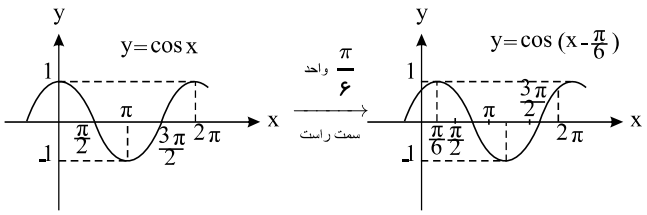
$$\sin(۴\pi - \frac{\pi}{۲} + x) = -\cos(x)$$

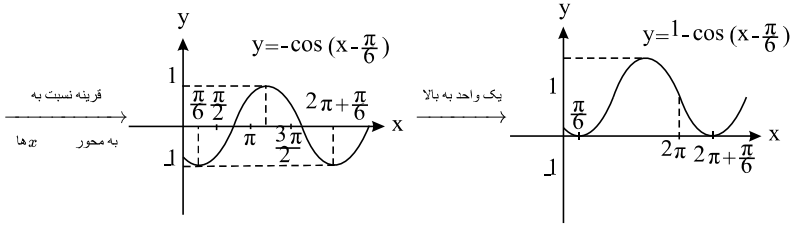
پس تابع به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$y = -\cos x - ۱$$



۶۹ - گزینه ۲ راه‌حل اول:





باتوجه به شکل مشخص است که نمودار در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ تنها ۱ بار به محور xها برخورد می‌کند.

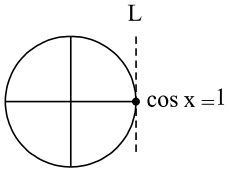
راه حل دوم:

برای محاسبهٔ تعداد برخوردها می‌توان از مفهوم ریشه استفاده کرد.

هر نقطه روی محور xها دارای ارتفاع صفر می‌باشد.

$$y = ۱ - \cos(x - \frac{\pi}{۶}) \to ۱ - \cos(x - \frac{\pi}{۶}) = ۰ \to \cos(x - \frac{\pi}{۶}) = ۱$$

با توجه به دایره داریم:



$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{۶} = ۰ \to x = \frac{\pi}{۶} \in [۰, ۲\pi] \\ x - \frac{\pi}{۶} = ۲\pi \to x = ۲\pi + \frac{\pi}{۶} \notin [۰, ۲\pi] \end{cases}$$

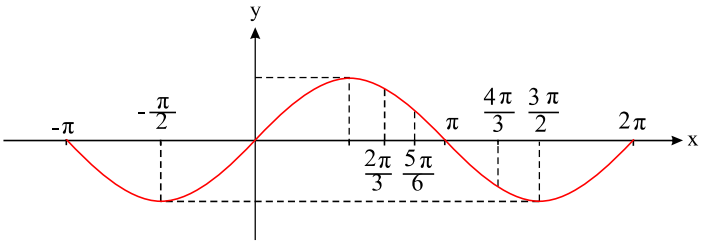
$$x - \frac{\pi}{۶} = -۲\pi \to x = -۲\pi + \frac{\pi}{۶} \notin [۰, ۲\pi]$$

@mir_azmoon11

لذا این منحنی فقط یکبار محور xها را قطع می‌نماید.

۷۰ - گزینه ۲

با توجه به شکل فقط در گزینهٔ «۲» یعنی بازهٔ $\left[\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳}\right]$ تابع $f(x)=\sin x$ یک‌به‌یک است.



۷۱ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{۴}^{\sqrt{۲}}+\log_{\sqrt{۸}}^{۲}=\log_{۲^{۲}}^{۲^{\frac{۱}{۲}}}+\log_{۲^{\frac{۳}{۲}}}^{۲}=\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۳}=\frac{۳+۸}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۷۲ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{ab}=\log_k^a+\log_k^b\ ,\ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^{۲}}=\log_{\sqrt{b}}^{a}+\log_{\sqrt{b}}^{b^{۲}}=\log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{a}+\log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{b^{۲}}=۲\log_b^a+۴=۲(\frac{۳}{۲})+۴=۷$$

۷۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ a^{\log_b^x}=x^{\log_b^a}}$

$$۵^{(۲\log_۵^۲+۳\log_۵^۳)}=۵^{(\log_۵^۴+\log_۵^{۲۷})}=۵^{\log_۵^{۴\times۲۷}}=۴\times۲۷=۱۰۸$$

۷۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\frac{\log ۸+\log ۳}{\log ۲+\log\sqrt{۶}}=\frac{\log ۲۴}{\log ۲\sqrt{۶}}=\frac{\log ۲۴}{\log\sqrt{۲۴}}=\frac{\log ۲۴}{\log(۲۴)^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\log ۲۴}{\frac{۱}{۲}\log ۲۴}=۲$$

۷۵ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N=x\to N=b^x}$

$$\log_{۲}^{x^{۳}+۵}=۵\xrightarrow{\text{تعریف}}x^{۳}+۵=۲^{۵}\to x^{۳}+۵=۳۲\to x^{۳}=۲۷\to x=۳$$
$$\log_{۵}^{x^{۲}-۴}\overset{x=۳}{=\!=\!=}\log_{۵}^{۵}=۱$$

۷۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{ab}=\log_k^a+\log_k^b\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log \overbrace{۶\times۱۰۰۰}^{۶۰۰۰}=\log \overbrace{۶}^{۲\times۳}+\log ۱۰۰۰=\log ۲+\log ۳+\log ۱۰^{۳}=۰/۳۰۱+۰/۵+۳=۳/۸۰۱$$

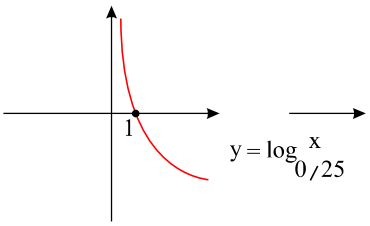
۷۷ - گزینه ۱

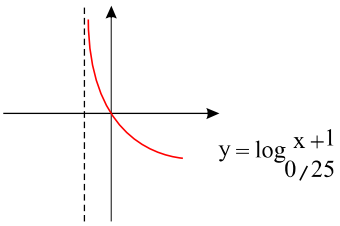
می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_b^N=x\to N=b^x}$

$$۲\log x-\log(x+۲)=۱\ \to\ \log x^{۲}-\log(x+۲)=۱$$
$$\to\ \log\frac{x^{۲}}{x+۲}=۱\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{x^{۲}}{x+۲}=۱۰\to x^{۲}-۱۰x-۲۰=۰$$
$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۱۰۰+۸۰=۱۸۰\begin{cases}x=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۲}=۵+۳\sqrt{۵}\\ x=\frac{۱۰-۶\sqrt{۵}}{۲}=۵-۳\sqrt{۵}\quad\text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)}\end{cases}$$

۷۸ - گزینه ۳ از انتقال نمودار $y=\log_{۰/۲۵}^{x}$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ محور xها، نمودار $y=\log_{۰/۲۵}^{x+۱}$ حاصل می‌شود.

@mir_azmoon11





۷۹ - گزینه ۴ می دانیم: $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}$

حاصل هر لگاریتم را جداگانه بدست آورده و سپس آنها را با هم جمع می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \log_{0/2}^{625} = \log_{\frac{2}{10}}^{5^4} = \log_{\frac{1}{5}}^{5^4} = \log_{5^{-1}}^{5^4} = -4 \\ 9^{\log_3^{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}^{\log_3^9} = \sqrt{5}^{\log_3^{3^2}} = (\sqrt{5})^2 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow -4+5=1$$

۸۰ - گزینه ۳ کافیست انرژی آزاد شده در دو حالت را محاسبه و بر هم تقسیم نمائیم.

$$\log E = 11/8 + 1/5M \rightarrow E = 10^{11/8+1/5M}$$

حالت اول $M_1 = 9 \rightarrow E_1 = 10^{11/8+1/5(9)} = 10^{25/3}$

حالت دوم $M_2 = 7 \rightarrow E_2 = 10^{11/8+1/5(7)} = 10^{22/3}$

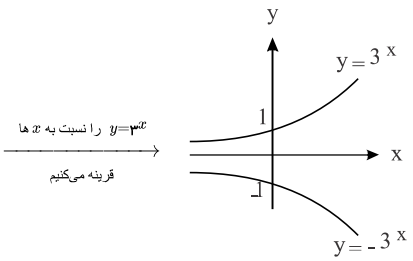
$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{25/3}}{10^{22/3}} = 10^3 = 1000 \rightarrow$ **پس قدرت تخریب ۱۰۰۰ برابر است.**

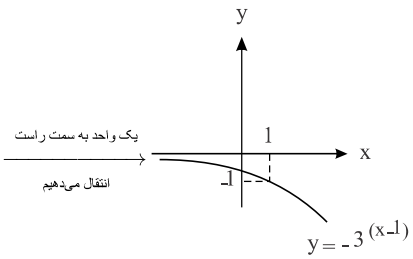
۸۱ - گزینه ۱ با توجه به این‌که پایه به بین صفر و یک قرار دارد و تابع نمائی اکیداً نزولی است در حل نامعادله جهت تغییر می‌نماید:

$$a^x < a^y \xrightarrow{0<a<1} x > y$$

$$(\frac{1}{3})^{5-x} < (\frac{1}{3})^{2x+1} \rightarrow 5-x > 2x+1 \rightarrow 3x < 4 \rightarrow x < \frac{4}{3}$$

۸۲ - گزینه ۱ به کمک انتقال، تابع داده شده را رسم می‌کنیم:

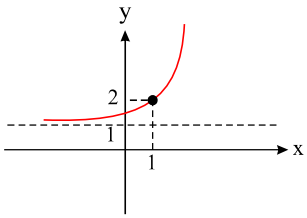




پس نمودار تابع داده شده از ناحیه‌های سوم و چهارم می‌گذرد.

۸۳ - گزینه ۱ نمودار تابع $y = 2^x$ را یک واحد در راستای افقی به سمت راست و سپس یک واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = 2^{(x-1)} + 1$ به‌دست آید. بنابراین داریم:

@mir_azmoon11



۸۴ - گزینه ۲

می‌دانیم $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ و $\log ۵ = ۱ - \log ۲$ است.

$$\log ۶ = \log(۲ \times ۳) = \log ۲ + \log ۳ \to \log ۳ = \log ۶ - \log ۲ = ۰/۷۸ - ۰/۳ = ۰/۴۸$$

پس: $\log ۱۵ = \log ۵ + \log ۳ = ۱ - \log ۲ + \log ۳ = ۰/۷ + ۰/۴۸ = ۱/۱۸$

۸۵ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b \ , \ \log ۵ = ۱ - \log ۲}$

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶} = \log(۱/۶)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\log ۱/۶ = \frac{۱}{۳}\log \frac{۱۶}{۱۰}$$

$$= \frac{۱}{۳}(\log ۱۶ - \log ۱۰) = \frac{۱}{۳}(۴\log ۲ - ۱) = \frac{۱}{۳}(۴(۱ - \log ۵) - ۱) = \frac{۱}{۳}(۳ - ۴\log ۵)$$

$$= \frac{۱}{۳}(۳ - ۱۲k) = \frac{۱}{۳}(۳(۱ - ۴k)) = ۱ - ۴k$$

۸۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log_x^{x^۲+۴} = ۱ + \log_x^۵ \Rightarrow \log_x^{x^۲+۴} = \log_x^x + \log_x^۵ \Rightarrow \log_x^{x^۲+۴} = \log_x^{۵x} \Rightarrow x^۲ + ۴ = ۵x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \ \text{غ ق ق (مبنا نمی‌تواند یک باشد)} \\ x = \frac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

$$\log_۲^x \xrightarrow{x=۴} \log_۲^۴ = \log_۲^{۲^۲} = ۲$$

۸۷ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_۳^{۲x^۲+۱} - \log_۳^{x+۲} = ۱ \to \log_۳^{\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}} = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۳^۱$$

$$\to ۲x^۲ + ۱ = ۳x + ۶ \to ۲x^۲ - ۳x - ۵ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی $\log_۸^{۲x-۱}$ فقط به جای x، می‌توانیم مقدار $x = \frac{۵}{۲}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x = -۱$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_۸^{۲x-۱} \xrightarrow{x=\frac{۵}{۲}} \log_۸^{۲(\frac{۵}{۲})-۱} = \log_۸^۴ = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}$$

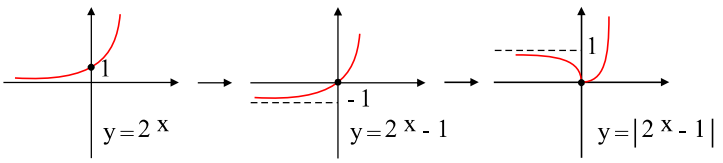
۸۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵}) = \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + \sqrt{۵})^۲ = \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + ۵ + ۲\sqrt{۵})$$

$$= \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۶ + ۲\sqrt{۵}) = \log \underbrace{(۶ - ۲\sqrt{۵})(۶ + ۲\sqrt{۵})}_{\text{مزدوج}} = \log(۳۶ - ۲۰) = \log ۱۶ = \log^{۲^۴} = ۴\log ۲ = ۴k$$

۸۹ - گزینه ۴



برای رسم توابع به فرم $y = |f(x)|$ هر آنچه از شکل تابع $y = f(x)$ زیر محور xها است آئینه‌وار به بالا منتقل می‌کنیم.

@mir_azmoon11

۹۰ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳} = \log(۸۱)^k \rightarrow \log ۳ + \log ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log ۳^{۴k} \rightarrow \log ۳ \times ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log ۳^{۴k}$$

$$\rightarrow \log ۳^{\frac{۵}{۴}} = \log ۳^{۴k} \rightarrow ۴k = \frac{۵}{۴} \rightarrow k = \frac{۵}{۱۶}$$

$$\log_{۲}^{\frac{۵}{k}} \xrightarrow{k=\frac{۵}{۱۶}} \log_{۲}^{۱۶} = \log_{۲}^{۲^۴} = ۴$$

@mir_azmoon11

@mir_azmoon11

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۱۴ - ۴	۲۷ - ۲	۴۰ - ۳	۵۳ - ۴	۶۶ - ۴	۷۹ - ۴
۲ - ۳	۱۵ - ۲	۲۸ - ۳	۴۱ - ۳	۵۴ - ۳	۶۷ - ۴	۸۰ - ۳
۳ - ۳	۱۶ - ۲	۲۹ - ۴	۴۲ - ۲	۵۵ - ۱	۶۸ - ۴	۸۱ - ۱
۴ - ۲	۱۷ - ۲	۳۰ - ۳	۴۳ - ۲	۵۶ - ۳	۶۹ - ۲	۸۲ - ۱
۵ - ۲	۱۸ - ۴	۳۱ - ۲	۴۴ - ۳	۵۷ - ۳	۷۰ - ۲	۸۳ - ۱
۶ - ۳	۱۹ - ۲	۳۲ - ۱	۴۵ - ۴	۵۸ - ۴	۷۱ - ۱	۸۴ - ۲
۷ - ۲	۲۰ - ۲	۳۳ - ۱	۴۶ - ۳	۵۹ - ۲	۷۲ - ۴	۸۵ - ۱
۸ - ۱	۲۱ - ۲	۳۴ - ۴	۴۷ - ۳	۶۰ - ۲	۷۳ - ۳	۸۶ - ۴
۹ - ۲	۲۲ - ۱	۳۵ - ۲	۴۸ - ۱	۶۱ - ۱	۷۴ - ۱	۸۷ - ۴
۱۰ - ۱	۲۳ - ۳	۳۶ - ۳	۴۹ - ۴	۶۲ - ۲	۷۵ - ۱	۸۸ - ۲
۱۱ - ۲	۲۴ - ۱	۳۷ - ۱	۵۰ - ۴	۶۳ - ۳	۷۶ - ۲	۸۹ - ۴
۱۲ - ۱	۲۵ - ۲	۳۸ - ۱	۵۱ - ۲	۶۴ - ۳	۷۷ - ۱	۹۰ - ۳
۱۳ - ۳	۲۶ - ۱	۳۹ - ۴	۵۲ - ۱	۶۵ - ۱	۷۸ - ۳	

@mir_azmoon۱۱

وَمَن يَتَوَكَّل عَلى الله فَهُوَحَسبُه

@mir_azmoon11